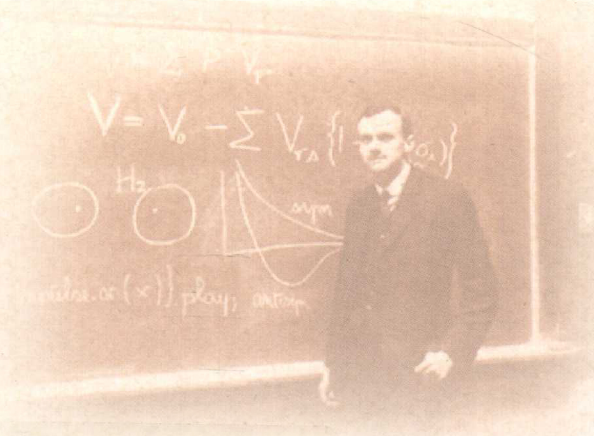
全新量子力学习题

范洪义　任　刚　著



中国科学技术大学出版社

全新量子力学习题

范洪义　任　刚　著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书以发展狄拉克符号法为主线，系统地介绍了有序算符内积分（IWOP）技术及其应用．本书包含10章，分别对IWOP技术、粒子数态、相干态、纠缠态、量子主方程、不变本征算符、算符的外尔编序、压缩态、角动量、量子纠缠态和费恩曼-赫尔曼定理等专题编撰了适量的新习题．本书以例题和习题相结合的方式，给读者以指导和练习．每章习题大部分都配有参考答案．此外，除第5章外其他章还有配套思考练习，留给读者更大的思考空间．

本书中的习题全部是由作者在长期的科研工作中自己新构思的，具有明显的创新性和基础性，可以配合学生学习量子力学、量子光学和固体物理．

图书在版编目(CIP)数据

全新量子力学习题/范洪义，任刚著．—合肥：中国科学技术大学出版社，2012.3

ISBN 978-7-312-02897-7

Ⅰ．全…　Ⅱ．①范…　②任…　Ⅲ．量子力学—习题　Ⅳ．O413.1-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第016125号

出版发行　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号，230026
http://press.ustc.edu.cn
印　　刷　中国科学技术大学印刷厂
经　　销　全国新华书店
开　　本　710 mm×960 mm　1/16
印　　张　17.5
字　　数　265千
版　　次　2012年3月第1版
印　　次　2012年3月第1次印刷
定　　价　32.00元

前　言

孔子曰, “学而时习之”（《论语 · 学而第一》）, 指出了 “习” 的重要性. 如果把孔子说的这句话作为一篇八股文的题目, 那么首先要破题（即分析题面和题意）. 古人曾把此题破为 “纯心于学者, 无时而不习也”, 上句破 “学”, 下句破 “时习”, 这是分破法, 也是明破、顺破. 同一个题目也可破为 “学务时敏（题面）, 其功已专也（题意）”, 这里暗破了 “习”, 这也称为 揔 (总) 破法. 如果题目改为 “学而时习之, 不亦说（悦）乎”(有两句), 则其题面和题意与上题就有区别. 可以正破为 “说 (悦) 因学而生, 唯时习者能之也”, 这是清嘉庆举人高凤台的正破; 而清同治进士陈康琪则反破此题为 “为学而惮其苦, 圣人以 ‘时习’ 诱之焉”. 可见破题可以在认清题面的基础上从不同的角度出发, 角度不同, 或侧重面不同, 解题的立意也要做相应的变通.

这也给我们今人举出了如何分析题目的范例, 即解题可从因至果, 也可从果至因, 做物理题更是如此.

要真正理解物理, 必须做题. 我们不可想象, 一个书法爱好者观摩了很多次书法展览, 评头品足一番后就能写出一手好字. 要成为书法家, 必须聚墨为池、笔耕不辍、勤奋用心练习, 练到握笔的指节上长出老茧, 练到随心所欲, 才能意在笔先. 所以我们要用多种方法多做物理题, 在解题中一方面加深理解, 更为重要的方面是培养创新能力.

做物理题不同于解数学题. 做物理题的过程中时时刻刻要顾及物理意义, 要学会量纲分析、数量级估计、对称性辨认等. 积累了经验, 就可以化艰为易, 就可以从多个侧面去解, 也许就会发现新的真理.

做物理题不能拘泥于某一种思维模式, 而要善于在遵循与打破模式之间游刃有余. 量子力学的题目又难又活, 因为量子力学内容丰富, 涉及面广, 含义深刻, 又不易懂, 甚至连费恩曼这样的天才物理学家也认为没有人真正懂得量子力学, 但是通过做题, 我们可以趋近 "懂" 的境界.

本书收编的习题都是新构思的, 是在发展狄拉克符号法的基础上悟出来的, 具有基本的重要性. 狄拉克认为: "The symbolic method, however, seems to go more deeply into the nature of things. It enables one to express the physical laws in a neat and concise way, and will probably be increasingly used in the future as it becomes better understood and its own special mathematics gets developed." 可见符号法是量子力学的语言, 具有抽象性与普适性, 所以一旦在数学上发展了它, 形成了一套新的数理方法, 就可悟出很多有物理背景的习题来.

事实上, 这本书不光是一个习题集. 爱因斯坦曾说: "提出一个问题有时比解决一个问题还难." 或曰: "提出一个问题相当于解决此问题的一半. " 所以悟出新题目的过程, 就充溢着创新性; 进一步给予新解答, 其价值就体现在物理意义. 例如, 每个学量子力学的人都知道坐标表象的完备性关系式 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \,|x\rangle\langle x| = 1$, 但是大家可能只是知其然, 而不知其所以然, 对 $|\ \rangle\langle\ |$ 这类积分到底是如何实现的是否作过思考呢? 如果我们将这个完备性关系式稍微做一下变化而写为 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \left|\frac{x}{\mu}\right\rangle \langle x| \,(\mu > 0)$, 那么这个积分结果又是什么呢? (只知 $\mu = 1$ 时的积分值为 1.) 这是一个积分型的投影算符. 这个题目看似平庸, 而真正实现这个积分并不容易. 学会这个积分, 你就会看到一道新风景, 它不但具有形式美, 而且具有抽象美. 已故画家吴冠中认为: "抽象美是形式美的核心. " 对艺术如此, 对科学也然. 读者可以通过做这本习题集体会量子力学深层处的美. 这也说明表象理论的确需要发展, 我们对狄拉克符号法的理解确实应该更深入.

我们不提倡题海战术, 如目前有的人辅导高考那样. 我们编撰《全新量子力学题集》的动机是启迪思考, 让人在做题中体会创新. 有悟性的人必能从我们的习题中想出新的问题, 或许是一篇不错的论文的开端.

读这本书, 难免会为一道题绞尽脑汁数天, 而不得解; 忽一日, 茅塞顿开, 豁然开朗, 或可称为顿悟（改变思维的定式）, 思至随心初成才, 算成所欲方显真, 这就是思考的快乐. 让我们期待这样的快乐吧.

作者感谢中国科学技术大学张淑林副校长对本书出版的支持.

范洪义

2011 年 9 月于中国科学技术大学

目　　次

第 1 章　有序算符内的积分技术

1.1　新增基础知识与例题

半个多世纪以来, 量子理论不断完善, 使得 “现在第一流的物理学家做第二流的工作都非常困难”. 一般认为, 量子理论是由古典物理概念演化而来的, 这一过程大约完成于 20 世纪中叶后的二三年. 由于崭新的创想和新颖的数学形式的建立, 以及物理意义和哲学解释, 整个新理论的系统就确立无疑了.

狄拉克 (Dirac) 是量子力学的创始人之一, 他的名著《量子力学原理》问世于 1930 年, 从那以后半个多世纪中一直是该领域中的一部基本的、权威的教科书. 在该书中, 狄拉克总结了海森伯 (W. Heisenberg) 的矩阵理论和薛定谔的量子态概念, 提出了自己独特的表述量子论的数学形式 ——符号法, 从而使量子论成为严密的理论体系. 在书中, 狄拉克用他的 “神来之笔” 引入了右矢和左矢的概念, 简洁而深刻地反映了量子力学中力学量和态矢之间的关系. 他把非对易的量子变量称为 q 数, 发展出比矩阵力学更为普遍的 q 数理论, 其中包括表象理论和以不对易量 q 数为基础的方程.

关于狄拉克创立量子力学的 “符号法” , 科学史上曾有这么一件事. 1925 年夏天, 量子力学创始人之一的海森伯在英国剑桥大学作了一个报告, 题目是 “运动学和力学关系的量子论再解释”; 8 月, 他将论文寄给剑桥大学的福勒 (R. H.

Fowler) 教授. 福勒教授将海森伯的报告转交给自己的学生狄拉克. 10 月, 狄拉克在一次乡间散步时, 忽然想起海森伯文章中的不可对易关系与经典力学的泊松括号十分相像, 但已经记不清楚具体什么样子了. 他立刻赶回住所, 翻遍了所有的书籍和笔记, 结果仍查不到泊松括号的确切定义. 不巧因为那天是星期天, 又到了傍晚, 所有的图书馆都关闭了. 狄拉克当时度 "时" 如年地熬过了那一夜. 第二天他一大早就迫不及待地到图书馆, 终于在惠特克 (E. T. Whittaker) 所著的《论粒子和刚体的分析动力学》中找到了泊松括号, 并且一切正如他所预想的. 在这一基础上, 狄拉克创立了量子力学的 "符号法". 根据此方法, 在基本的泊松括号等号右边乘以 $\mathrm{i}\hbar$, 就可以得到量子括号.

1980 年以来, 本书作者之一范洪义教授在量子力学中所创造和发展的有序算符内积分 (英文简称: IWOP) 技术, 作为一种特殊的数学物理方法, 使得狄拉克的符号法更完美、更具体, 从而能更多更好地表达物理规律, 也使牛顿–莱布尼茨的积分对象从普通函数进入到 ket-bra 算符.

虽然算符的正规乘积排序的概念起源于量子场论, 并在几乎所有的量子场论书中有所介绍, 但我们觉得其有关性质须作进一步阐明. 关于玻色算符 a 和 $a^\dagger$ 的任何多项式函数, 不失一般性可写为

$$f\left(a,a^{\dagger}\right)=\sum_{j}\cdots\sum_{m}a^{\dagger j}a^{k}a^{\dagger l}\cdots a^{m}f\left(j,k,l,\cdots,m\right), \tag{1.1}$$

其中 $j,k,l,\cdots,m$ 是正整数或零. 利用玻色算符对易关系 $\left[a,a^{\dagger}\right]=1$, 总可以将所有的产生算符 $a^\dagger$ 都移到所有湮灭算符 a 的左边, 这时称已变化了的算符函数为正规乘积形式, 以 $::$ 标记. 其重要的性质是:

(1) 在正规乘积内玻色子算符相互对易, 即 $a^\dagger a = :a^\dagger a:$, 又因 $a^\dagger a = :aa^\dagger:$, 所以有 $:a^\dagger a: =: aa^\dagger:$.

(2) c 数 (即普通函数) 可以自由出入正规乘积记号.

(3) 由性质 (1), 可对正规乘积内的 c 数进行积分或微分运算, 前者要求积分收敛.

(4) 正规乘积内的正规乘积记号可以取消.

(5) 正规乘积 $:W:$ 与正规乘积 $:V:$ 之和为 $:W+V:$.

(6) 正规乘积算符 $:g(a,a^\dagger):$ 的相干态矩阵元为 $\langle z'|:g(a^\dagger,a):|z\rangle = g(z'^*,z)\langle z'|z\rangle$.

(7) 真空投影算符 $|0\rangle\langle 0|$ 的正规乘积展开式是 $|0\rangle\langle 0| =: \exp(-a^\dagger a):$.

(8) 厄米共轭操作可以进入 $::$ 内进行, 即 $:(W\cdots V):^\dagger =: (W\cdots V)^\dagger:$.

(9) 在正规乘积内以下两个等式成立:

$$
\begin{aligned}
&:\frac{\partial}{\partial a}f(a,a^\dagger): = [:f(a,a^\dagger):,a^\dagger],\\
&:\frac{\partial}{\partial a^\dagger}f(a,a^\dagger): = [a,:f(a,a^\dagger):].
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

对于多模情况, 上式可作如下推广:

$$
:\frac{\partial^2}{\partial a_i\partial a_j}f\left(a_i,a_j,a_i^\dagger,a_j^\dagger\right): = \left[\left[:f\left(a_i,a_j,a_i^\dagger,a_j^\dagger\right):,a_j^\dagger\right],a_i^\dagger\right].
\tag{1.3}
$$

【例 1.1】 已知粒子数态的完备性关系式 $\sum_{n=0}^{+\infty}|n\rangle\langle n| = 1$, $|n\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$, 证明: 真空投影算符 $|0\rangle\langle 0|$ 的正规乘积展开式为 $|0\rangle\langle 0| =: \exp(-a^\dagger a):$.

证明 由粒子数态的完备性, 可得

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{n=0}^{+\infty}|n\rangle\langle n| = \sum_{n,n'}^{+\infty}|n\rangle\langle n'|\frac{1}{\sqrt{n!n'!}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^*}\right)^n (z^*)^{n'}\Big|_{z^*=0}\\
&= \exp\left(a^\dagger\frac{\partial}{\partial z^*}\right)|0\rangle\langle 0|\exp(z^*a)\Big|_{z^*=0}.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

设真空态投影算符 $|0\rangle\langle 0|$ 的正规乘积形式为 $:W:$ (W 待定), 代入式 (1.4), 得

$$
1 = \exp\left(a^\dagger\frac{\partial}{\partial z^*}\right):W:\exp(z^*a)\Big|_{z^*=0}.
\tag{1.5}
$$

此时, 式 (1.5) 中 $:W:$ 的左边恰好为产生算符 $a^\dagger$, 右边为湮灭算符 a, 故可以把式 (1.5) 右边的项完全纳入正规乘积记号内, 即

$$
1 =: \exp\left(a^\dagger\frac{\partial}{\partial z^*}\right)W\exp(z^*a)\Big|_{z^*=0}:.
\tag{1.6}
$$

利用正规乘积的性质 (3) 和 (4) 完成微分运算, 得到

$$1 =: \exp\left(a^{\dagger}a\right) W :=: \exp\left(a^{\dagger}a\right) : W : : . \tag{1.7}$$

可见, $|0\rangle\langle 0| =: \exp\left(-a^{\dagger}a\right) :$.

点评　本题的关键在于利用“离散 δ 函数”的具体形式, 即

$$\delta_{nn'} = \frac{1}{\sqrt{n!n'!}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^*}\right)^n (z^*)^{n'}\bigg|_{z^*=0}.$$

【例 1.2】 根据正规乘积的性质, 给出算符 $\exp\left(\lambda a^{\dagger}a\right)$ 的正规乘积形式.

解　首先利用粒子数态的完备性, 可得

$$\begin{aligned}\exp\left(\lambda a^{\dagger}a\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\exp\left(\lambda a^{\dagger}a\right)|n\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{+\infty}\exp\left(\lambda n\right)|n\rangle\langle n| \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\exp\left(\lambda n\right)\frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle\langle 0|\frac{a^n}{\sqrt{n!}}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

然后利用正规乘积的性质 (1),(2) 和 (5), 得

$$\exp\left(\lambda a^{\dagger}a\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}: \frac{1}{n!}\left(\mathrm{e}^{\lambda}a^{\dagger}a\right)^n \mathrm{e}^{-a^{\dagger}a} : =: \exp\left[\left(\mathrm{e}^{\lambda}-1\right)a^{\dagger}a\right] : . \tag{1.9}$$

于是, $\exp\left(\lambda a^{\dagger}a\right)$ 的正规乘积形式为 $: \exp\left[\left(\mathrm{e}^{\lambda}-1\right)a^{\dagger}a\right] :$.

点评　在求算符的正规乘积形式时, 往往“无中生有”, 首先通过插入某种量子态的完备性“1”, 然后利用该态的性质进行分析.

【例 1.3】 利用粒子数表象 $\langle n|$, 给出坐标本征态 $|q\rangle$ 在福克 (Fock) 空间的波函数.

解　本题有多种解法, 这里只介绍两种: 第一种是传统的做法; 第二种借用 IWOP 技术.

解法 1　用动量算符 P 和坐标算符 Q 来定义产生算符和湮灭算符:

$$a = \frac{Q+\mathrm{i}P}{\sqrt{2}}, \quad a^{\dagger} = \frac{Q-\mathrm{i}P}{\sqrt{2}}, \tag{1.10}$$

并注意到在福克空间存在以下关系:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n\rangle, \quad a^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \tag{1.11}$$

于是基态 $|0\rangle$ 的波函数 $\langle q|0\rangle$ 可以由下式给出：

$$0 = \langle q|a|0\rangle = \langle q|\frac{Q+\mathrm{i}P}{\sqrt{2}}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\right)\langle q|0\rangle, \tag{1.12}$$

即

$$\langle q|0\rangle = c\exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right), \tag{1.13}$$

其中 c 是归一化系数, 可以由下式确定:

$$1 = \langle 0|0\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}q\,\langle 0|q\rangle\langle q|0\rangle = |c|^2\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-q^2\right) = |c|^2\sqrt{\pi}, \tag{1.14}$$

所以

$$\langle q|0\rangle = \pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right). \tag{1.15}$$

利用坐标表象的完备性关系式 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}q|q\rangle\langle q| = 1$, 粒子数态 $|n\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$ 和式 (1.15), 得到

$$\begin{aligned}\langle q|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}q'\,\langle q|a^{\dagger n}|q'\rangle\langle q'|0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}q'\left(q-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\right)^n\delta(q-q')\langle q'|0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\left(q-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\right)^n\mathrm{e}^{-\frac{q^2}{2}}.\end{aligned} \tag{1.16}$$

利用厄米 (Hermite) 多项式的表达式

$$\mathrm{H}_n(q) = \mathrm{e}^{\frac{q^2}{2}}\left(q-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\right)^n\mathrm{e}^{-\frac{q^2}{2}}, \tag{1.17}$$

把式 (1.16) 变为

$$\langle q|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{-\frac{q^2}{2}}\mathrm{H}_n(q). \tag{1.18}$$

利用粒子数态的完备性关系式 $\sum_{n=0}^{+\infty}|n\rangle\langle n|=1$, 再由式 (1.18), 可得坐标本征态 $|q\rangle$ 的福克表象

$$
\begin{aligned}
|q\rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty}|n\rangle\langle n|\,q\rangle=\sum_{n=0}^{+\infty}|n\rangle\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{-\frac{q^2}{2}}\mathrm{H}_n(q) \\
&= \pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{q^2}{2}+\sqrt{2}qa^\dagger-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle.
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

最后一步推导利用了厄米多项式的母函数公式

$$
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_n(q)}{n!}t^n=\exp\left(2qt-t^2\right). \tag{1.20}
$$

解法 2 根据坐标表象的正交性 $\langle q'|\,q\rangle=\delta(q'-q)$, 可知

$$
|q\rangle\langle q|=\delta(q-Q). \tag{1.21}
$$

对其进行傅里叶变换, 并利用 $Q=\left(a+a^\dagger\right)/\sqrt{2}$, 其中 a 与 $a^\dagger$ 分别为玻色湮灭算符与产生算符, 满足对易关系 $\left[a,a^\dagger\right]=1$, 得到

$$
\begin{aligned}
\delta(q-Q) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p\exp\left[\mathrm{i}p(q-Q)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p\exp\left[\mathrm{i}p\left(q-\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p:\,\exp\left[-\frac{1}{4}p^2+\mathrm{i}p\left(x-\frac{a^\dagger}{\sqrt{2}}\right)-\mathrm{i}p\frac{a}{\sqrt{2}}\right]: \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}:\,\exp\left[-\left(x-\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}\right)^2\right]:.
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

再由 IWOP 技术就可以得到式 (1.19).

由坐标表象完备性的高斯形式 (范氏形式)

$$
1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi}}:\,\exp\left[-(q-Q)^2\right]:, \tag{1.23}
$$

以及 IWOP 技术, 可得

$$
\mathrm{H}_n(Q)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi}}\mathrm{H}_n(q):\,\exp\left[-(q-Q)^2\right]:\;=2^n:\,Q^n:. \tag{1.24}
$$

进一步, 可知

$$\begin{aligned}\langle q|\,\mathrm{H}_n\,(Q)\,|0\rangle &= \langle q|\,2^n\colon\left(\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}\right)^n\colon|0\rangle\\ &= \left(\sqrt{2}\right)^n\langle q|\,a^{\dagger n}\,|0\rangle = \sqrt{2^n n!}\,\langle q|\,n\rangle\,,\end{aligned} \tag{1.25}$$

于是

$$\langle q|\,n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\mathrm{H}_n\,(q)\,\langle q|\,0\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{2^n n!}}\mathrm{H}_n\,(q)\exp\left(-\frac{q^2}{2}\right). \tag{1.26}$$

点评　对比解法 1 与 2, 可见传统的做法比较麻烦, 而利用 IWOP 技术进行求解显得简洁明了.

【例 1.4】　在福克空间我们引入介于 $|q\rangle$ 和 $|p\rangle$ 之间的中介表象

$$\begin{aligned}|x\rangle_{\lambda,v} =& \left[\pi\left(\lambda^2+v^2\right)\right]^{-1/4}\\ &\times\exp\left[-\frac{x^2}{2\left(\lambda^2+v^2\right)}+\sqrt{2}a^\dagger\frac{x}{\lambda-\mathrm{i}v}-\frac{\lambda+\mathrm{i}v}{2\left(\lambda-\mathrm{i}v\right)}a^{\dagger 2}\right]|0\rangle\,,\end{aligned} \tag{1.27}$$

验证其中介性, 并证明其完备性和正交性.

证明　利用玻色算符对易关系 $\left[a,a^\dagger\right]=1$ 及 $a\,|0\rangle=0$, 可得

$$a\,|x\rangle_{\lambda,v} = \frac{1}{v+\mathrm{i}\lambda}\left[\sqrt{2}\mathrm{i}x+\left(v-\mathrm{i}\lambda\right)a^\dagger\right]|x\rangle_{\lambda,v}\,. \tag{1.28}$$

上式可以变形为

$$\frac{\left(v+\mathrm{i}\lambda\right)a-\left(v-\mathrm{i}\lambda\right)a^\dagger}{\sqrt{2}\mathrm{i}}\,|x\rangle_{\lambda,v} = x\,|x\rangle_{\lambda,v}\,. \tag{1.29}$$

再根据式 (1.10), 可知

$$\left(\lambda Q+vP\right)|x\rangle_{\lambda,v} = x\,|x\rangle_{\lambda,v}\,. \tag{1.30}$$

可见, 当 $\lambda=1$, $v=0$ 时, $|x\rangle_{\lambda,v}$ 变为

$$|q\rangle\,|_{q=x} = \pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{q^2}{2}+\sqrt{2}qa^\dagger-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle\,; \tag{1.31}$$

当 $\lambda=0$, $v=1$ 时, $|x\rangle_{\lambda,v}$ 变为

$$|p\rangle\,|_{p=x} = \pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{p^2}{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}pa^\dagger+\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle\,. \tag{1.32}$$

因此, $|x\rangle_{\lambda,v}$ 可以称为坐标表象和动量表象的一个中介新表象.

$|x\rangle_{\lambda,v}$ 作为表象的必要条件之一应该满足完备性关系, 利用 IWOP 技术可以证明:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,|x\rangle_{\lambda,v}\,{}_{x,v}\langle x| \\
&=\left[\pi\left(\lambda^2+v^2\right)\right]^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{x^2}{\lambda^2+v^2}+\sqrt{2}x\frac{a^\dagger}{\lambda-\mathrm{i}v}-\frac{\lambda+\mathrm{i}v}{2(\lambda-\mathrm{i}v)}a^{\dagger 2}\right] \\
&\quad\times|0\rangle\langle 0|\exp\left[\sqrt{2}x\frac{a}{\lambda+\mathrm{i}v}-\frac{\lambda-\mathrm{i}v}{2(\lambda+\mathrm{i}v)}a^2\right] \\
&=\left[\pi\left(\lambda^2+v^2\right)\right]^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}:\,\exp\left[-\frac{x^2}{\lambda^2+v^2}+\sqrt{2}x\frac{a^\dagger}{\lambda-\mathrm{i}v}-\frac{\lambda+\mathrm{i}v}{2(\lambda-\mathrm{i}v)}a^{\dagger 2}\right. \\
&\quad\left.-a^\dagger a+\sqrt{2}x\frac{a}{\lambda+\mathrm{i}v}-\frac{\lambda-\mathrm{i}v}{2(\lambda+\mathrm{i}v)}a^2\right]: \\
&=\left[\pi\left(\lambda^2+v^2\right)\right]^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}:\,\exp\left\{-\frac{1}{\lambda^2+v^2}\left[x-(\lambda Q+vP)\right]^2\right\}: \\
&=1.
\end{aligned}\tag{1.33}$$

因此, $|x\rangle_{\lambda,v}$ 是完备的.

下面进一步证明 $|x\rangle_{\lambda,v}$ 的正交性. 从式 (1.30) 易知

$$\langle q|\left(\lambda Q+vP\right)|x\rangle_{\lambda,v}=\left(\lambda q-\mathrm{i}v\frac{\partial}{\partial q}\right)\langle q|\,x\rangle_{\lambda,v}=x\,\langle q|\,x\rangle_{\lambda,v}\,,\tag{1.34}$$

其解为

$$\langle q|\,x\rangle_{\lambda,v}=c\exp\left[\frac{\mathrm{i}q\left(x-\lambda q/2\right)}{v}\right],\tag{1.35}$$

式中 c 为积分常数, 由坐标表象的正交性确定, 即

$$\begin{aligned}
\delta\left(q-q'\right)&=\langle q\,|q'\rangle \\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,\langle q|\,x\rangle_{\lambda,v}\,{}_{\lambda,v}\langle x|\,q'\rangle \\
&=|c|^2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\exp\left[\mathrm{i}\left(q-q'\right)\frac{x}{v}+\mathrm{i}\frac{\lambda}{2v}\left(q'^2-q^2\right)\right] \\
&=|c|^2\,2\pi v\delta\left(q-q'\right),
\end{aligned}\tag{1.36}$$