高等院校公修数学课辅导丛书

微积分学习指导

WEIJIFEN XUEXIZHIDAO

微积分学习指导编写组

（下）

郑州大学出版社

高等院　　　　　　　　导丛书

微积分学习指导

WEIJIFEN XUEXIZHIDAO

微积分学习指导编写组

（下）

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导(下)/微积分学习指导编写组. —郑州:郑州大学出版社,2004.1

ISBN 7-81048-828-7

Ⅰ.微… Ⅱ.微积分学习指导编写组 Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 080703 号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路40号 邮政编码:450052

出版人:谷振清 发行部电话:0371-6966070

全国新华书店经销

郑州文华印务有限公司印制

开本:850 mm×1 168 mm 1/32

印张:11

字数:276 千字

版次:2004 年 1 月第 1 版 印次:2004 年 1 月第 1 次印刷

书号:ISBN 7-81048-828-7/G·74 定价:14.80 元

本书如有印装质量问题,由承印厂负责调换

作者名单

（以姓氏笔画为序）

王玉林　刘华民
杨松华　宋士仓
黄玉琴　薄仙慧

内 容 提 要

本书是微积分学习用书，下册内容包括空间解析几何初步、多元函数微分学、重积分、线面积分和傅里叶级数。每章开始是知识点的总结，然后是常见题型与解题方法，配有大量例题及精选的习题，习题后附有相应答案或提示。全书最后附有 2003、2004 年硕士研究生入学考试数学试题微积分部分。

本书可作为高等学校理工科各专业本科生微积分课程的辅助教材或复习参考书，也可作为准备报考硕士研究生的考生考前强化训练的指导书。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

序　言

1995年至2000年郑州大学数学系公修数学教学组承担了原国家教委面向21世纪教学改革立项项目“面向21世纪非数学类专业高等数学教学内容和课程体系的改革研究”子项目的研究工作。项目总负责人萧树铁先生曾向教育部提交了其研究成果报告——“高等数学教学改革研究报告”,该报告已由高等教育出版社于2000年出版。在此报告中对数学教育在大学教育中的重要作用,国内外数学教育改革情况,今后改革的原则,改革的方案等问题作了精辟的论述。同时公修数学教学组也特别关注由马知恩先生负责的原国家教委面向21世纪教学改革立项项目“面向21世纪工科高等数学教学内容和课程体系的改革研究”的研究成果,该成果的报告“工科数学系列课程教学改革研究报告”也已由高等教育出版社于2001年出版。公修数学教学组在学校、数学系领导的关怀和校内各院系支持下,由阎占立、王长群、罗俊明等人执笔分别写出了《微积分(上、下)》、《线性代数》、《概率论与数理统计》三本新教材。这些教材已在我校试用多年,现经全体授课教师的反复实践和讨论,已定稿出版。这三本教材完全符合上述两个教学改革项目研究成果的精神并具有自己的特色,这是我校公修数学课教学改革的一项代表性成果。

由于新教材贯彻了一些新想法,加强了理论性,有大量新的习题,给教与学都带来了新的问题。另外,硕士研究生入学考试要求高于教学要求,要想通过这一考试,必须在课堂教学的基础上拓宽知识面和进行强化训练。为了解决这两个问题,教学组又编写了

与新教材配套的学习参考书。书中对基础知识进行了串讲总结，通过精选的例题阐明了常见的解题方法和技巧，对课本习题中难度大的题目给出了详细解答。这些参考书对同学们学习数学课程以及应对研究生入学考试会有很好的作用。

李梦如

2003 年 8 月

前　　言

微积分是高等学校理工科各专业的一门重要的基础理论课。由于近年来教学改革的实施，微积分授课时间有所减少，这使得课堂讲授内容受到了一定的影响。如在概念的深入探讨，知识点的融会贯通，处理问题的思想、方法和技巧等方面都难以充分讲授；另一方面，后续课程以及研究生入学考试对微积分的要求却有深化的趋势。如何解决这一新的矛盾，如何帮助学生全面系统地学习、掌握微积分的基本概念、基本理论、基本方法与技巧，以及如何与研究生入学考试复习紧密衔接等，是我们教学第一线老师亟待解决的问题。为此，我们根据教学大纲和研究生入学考试大纲的要求组织编写了这本《微积分学习指导》。

这本书的编写者都在高校任教多年，有着丰富的微积分教学经验，也是郑州大学数学系所承担的原国家教委面向 21 世纪教学改革立项项目“面向 21 世纪非数学类专业高等数学教学内容和课程体系的改革研究”子项目课题组的主要成员。本书内容既汇聚了编者的教学经验，也吸收了该课题研究成果。

本书每章设有内容提要、典型例题、同步练习及其答案或提示。选编的典型例题有的是澄清基本概念与基本运算的题，有的是教材中较难的习题，有的是历年来一些研究生入学考试题。希望通过例题分析能帮助读者把握并理解各章的基本概念和重要的定理与公式的应用，总结归纳各类问题的解题规律、方法和技巧，培养学生用微积分的思想分析和解决实际问题的能力。读者做各章设置的同步练习可达到巩固、理解、提高的目的。在做同步练习

时，一定要独立思考，动手做题，实在有困难再看提示或答案。带 * 的例题或习题是较难的题目，初读时可以略过。书后附有 2003、2004 年全国硕士研究生入学统一考试的数学试题的微积分部分，其中各试卷中重复的试题只列一次。

本书可作为高等学校理工科各专业本科生微积分课程的辅助教材或复习参考书，也可作为准备报考硕士研究生的考生考前强化训练的指导书。

河南省惟一的首届全国优秀教学名师奖获得者、郑州大学公修数学教学组负责人李梦如教授对本书的编写给予了热情指导，本书还得到郑州大学教务处、数学系领导和许多同仁的大力支持与鼓励，在此一并表示感谢。

本书编写人员如下：王玉林（第十五章）、刘华民（第十四章）、宋士仓（第十、十三章）、杨松华（综合练习题）、黄玉琴（第十二章）、薄仙慧（第十一章）。

鉴于编者水平有限，书中难免存在不足之处，敬请读者批评指正。

编者

2004 年元月

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第十章　空间解析几何初步

直线、平面为空间解析几何的主要研究对象,同时在多元函数微积分学的学习中起着重要作用. 本章对直线和平面方程的建立进行训练,并对常用的二次曲面借助于图形有所了解.

一、内容提要

(一) 平面

(1)若平面过(x_0, y_0, z_0),并且法向量为$\boldsymbol{n}=(A, B, C)$,则确定出的平面方程为

$$A(x-x_0)-B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

(2) 不共线的三点可惟一确定一个平面. 设平面过三点$M_i(x_i, y_i)$,$i=1,2,3$,则$\boldsymbol{M_1M_2}\times\boldsymbol{M_1M_3}$为平面的法向量,从而确定平面方程.

也可以由动点$M(x, y, z)$应满足

$$\boldsymbol{M_1M}\cdot(\boldsymbol{M_1M_2}\times\boldsymbol{M_1M_3})=0$$

即

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

得到方程.

还可以设平面的一般方程为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

将 M_i 的坐标代入方程，解出一组 A,B,C,D，即求出平面方程.

(3)点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(4)对于两平面

$$\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

二者之间的夹角 θ 是指它们法线之间的夹角，应有

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

由此得出下面结论：

两平面垂直的充要条件为

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

两平面平行的充要条件为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

(二)直线

(1)过点 $M_0(x_0,y_0)$，且平行于向量$\boldsymbol{s}=(l,m,n)$的直线方程可以写为

$$\begin{cases}x=x_0+lt\\y=y_0+mt\\z=z_0+nt\end{cases}\quad(-\infty<t<+\infty)$$

该方程称为直线的**参数方程**，向量$\boldsymbol{s}$称为直线的**方向向量**.

上述直线方程也可以写成下面的**点向式方程**，也称为**标准方程**：

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

(2) 两点 $M_i(x_i,y_i,z_i)$，$i=1,2$，可惟一确定一直线，其直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

(3) 两个不平行的平面的交线

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

为一直线，称为直线的**一般方程**.

由一般形式可推出直线的方向向量为

$$\boldsymbol{n}=(A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2)$$

再设法求出方程组的一个解 (x_0,y_0,z_0)，进而可写出直线的参数方程和点向式方程.

(4) 设两直线 L_1,L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(l_1,m_1,n_1)$，$\boldsymbol{s}_2=(l_2,m_2,n_2)$. 两方向向量的夹角 φ 称为两直线的夹角，即

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

两直线平行的充要条件为

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

两直线垂直的充要条件为

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

(5) 点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 到直线 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 的距离按如下方法计算：

记 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，$\boldsymbol{s}=(l,m,n)$，先计算$\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{M_0M_1}$，然后

$$d=\frac{|\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{M_0M_1}|}{|\boldsymbol{s}|}$$

$$=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} m & n \\ y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n & l \\ z_1-z_0 & x_1-x_0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l & m \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

(三)直线与平面的位置关系

对于直线

$$L:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

和平面

$$\Pi:Ax+By+Cz+D=0$$

记直线的方向向量为$\boldsymbol{s}=(l,m,n)$，平面的法向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则二者之间夹角 φ 为$\boldsymbol{s}$与$\boldsymbol{n}$夹角的余角，即

$$\varphi=\arcsin\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}$$

$$=\arcsin\frac{|lA+mB+nC|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

直线与平面平行的充要条件为直线的方向向量与平面的法向量垂直，即

$$lA+mB+nC=0$$

直线与平面垂直的充要条件为直线的方向向量与平面的法向量平行，即

$$\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}$$

(四)平面束

设直线 L 的一般方程为

$$L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

即两平面的交线，当然要求两个平面的法向量$\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$与$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$不平行.

对任意不全为零的实数λ,μ，显然

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad (1)$$

即

$$(\lambda A_1+\mu A_2)x+(\lambda B_1+\mu B_2)y+(\lambda C_1+\mu C_2)z+(\lambda D_1+\mu D_2)=0$$

为一平面(因$\boldsymbol{n}_1$与$\boldsymbol{n}_2$对应分量不成比例，可推出上述x,y,z的系数不全为0).

对任意的λ,μ，平面(1)通过直线L；反过来，过直线L的任一平面都可适当地选取λ,μ，使该平面具有(1)的形式. 称(1)所表示的这族平面为通过直线L的平面束.

(五)空间曲线的切线与法平面

设空间光滑曲线

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases} \quad (\alpha\leqslant\beta)$$

在参数t_0对应的点$P(x_0,y_0,z_0)=(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$处有$(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))\neq\mathbf{0}$，则曲线在$P$点处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

在P点处的法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

(六)二次曲面

在空间解析几何中，三元二次方程一般情况下表示为一个二

次曲面，即椭球面、抛物面或双曲面等，当然退化的情况可能是一平面或方程无解. 本章介绍微积分中常用的几种二次曲面.

1. 球面

球面为到定点距离等于常数的动点轨迹. 定点为球心，常数为半径，如以(x_0, y_0, z_0)为球心，以 R 为半径的球面方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

图 10 - 1 绘制了球心在原点的一个单位球面.

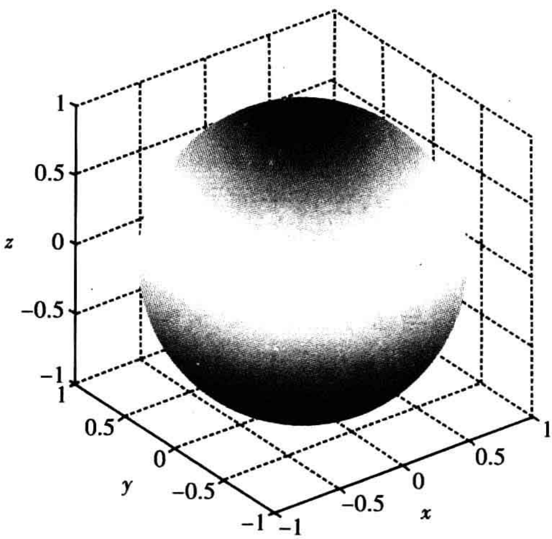

图 10 - 1　球面

2. 椭球面

方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

表示的曲面为椭球面，如图 10 - 2 为 $a = 2, b = 2, c = 1$ 时的图形.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com