初三

初中数学奥林匹克训练指导

顾跃平　赵伟然　主编

上海科学普及出版社

初中数学奥林匹克训练指导

（初 三）

顾跃平　赵伟然　主编

要冲刺还是要针刺?!

上海科学普及出版社

女据

训练指导. 初三/顾跃平，赵伟
.海：上海科学普及出版社，2002. 5
])
5427 - 2144 - 5

Ⅱ. ①顾... ②赵... Ⅲ. 数学课—
教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 005966 号

策　划　郭子安
责任编辑　高　平

初中数学奥林匹克训练指导
（初　三）
顾跃平　赵伟然　主编
上海科学普及出版社出版
（上海中山北路 832 号　邮政编码 200070）

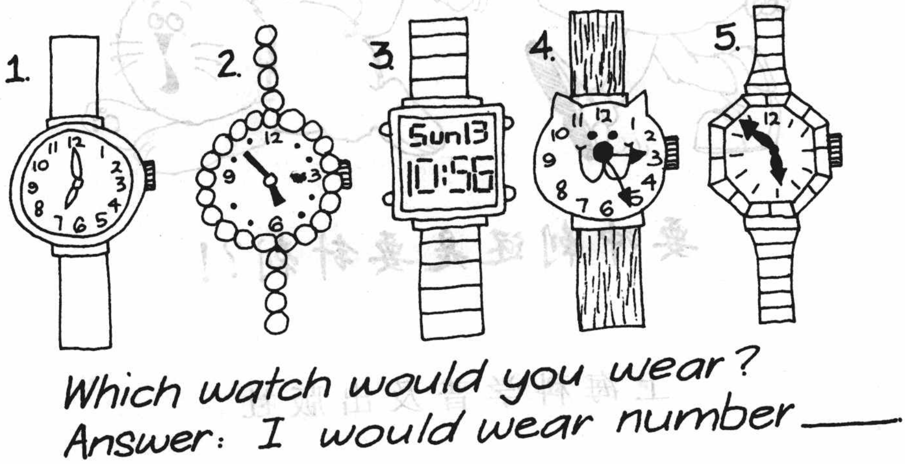
新华书店上海发行所发行　上海市印刷七厂一分厂印刷
开本 787×1092 1/16　印张 17　字数 410 000
2002 年 5 月第 1 版　2004 年 8 月第 2 次印刷
印数 8 001-16 000

ISBN 7-5427-2144-5/O・49　定价：20.00 元

内 容 提 要

本丛书是为数学爱好者所编写,并按数学分类方法从初一至初三分为三册。每一册内容由浅入深,语言通俗易懂,对于比较难理解的内容,有专门的评注分析。其特点是每章节前均有知识点导读,对新的定理与知识都给予详细介绍,并有例题剖析,使读者能尽快了解新的知识点。书中的习题,从易到难,有利于培养学生学习数学的兴趣和自信心,书后附有解答提示和参考答案,所以本书也可以作为数学爱好者的自学用书。

本丛书每册均分为三部分：一、同步提高篇；二、专题辅导篇；三、综合训练篇。本册供初中三年级选用。主要介绍：分式方程与无理方程、二次方程组的解法与应用、正(反)比例函数与一次函数、二次函数、相似三角形、锐角三角比与解直角三角形、圆、同余及其应用、计数原理与计数方法、极端性原则、反证法和构造法等内容。最后还有模拟测试卷和最新竞赛试卷汇编,可供读者自我考查。



前　言

数学在现代教育中占据着重要和永恒的地位，无论是小学教育还是大学教育都将数学作为基础课程。数学是自然学科的基础，物理、化学、生物学、计算机等学科中无不渗透着数学原理。数学更是各门科学发展的基础，当代科学和技术的迅猛发展和巨大进步，同样得益于数学的现代发展和计算机在数学方面的应用，所以说："数学是科学的大门和钥匙。"

由于数学所处的重要地位，以及它那坚实的基础、博大的内容、广泛的涉及面、繁多的运算方法，决定了学习数学的长期性和艰苦性。所以，学习数学一定要认认真真、一步一个脚印地打好基础，决不可疏于练习，也不可好高骛远，专找一些偏题、怪题、难题来做，而放松了课堂教育，因为你们在学校数学课上学的数学知识和技能是掌握数学知识和学会科学思考方法的重要途径，一定要认真学好。只是学校的数学课程是面向全民族的义务教育，仅仅是数学中最基础的内容，对于学有余力的学生，或者从小爱好数学的学生，难以满足自己学习的需求，总希望多学一点，学好一点。新编的《初中数学奥林匹克训练指导》丛书，就是为学有余力的数学爱好者所编著的，它完全能够满足你们智力快速发展的需求，正如《新教学大纲》中指出的："能力是在知识的教学和技能的训练中，通过有意识地培养而得到发展的。"

本书是《小学数学奥林匹克训练指导》的自然延续，在编写中仍保留有小学部分的特点，即各章的编写结构分三部分：知识要点、例题解析和配套练习。

《初中数学奥林匹克训练指导》丛书共三册，每册在内容上均分为三部分。

第一部分：同步提高篇。在编写中按教材的结构顺序，将每章划分成若干个知识点，通过典型例题的解答与评注，让同学们了解该章节中的主要题型、分析与解决问题的方法，并配以一定数量的练习，以便同学们自我训练与测试，牢固掌握基础知识。

第二部分：专题辅导篇。根据初中数学竞赛的要求，对教材的知识面作适当的拓广，以开阔同学们的视野，同时对教材内容中的一些知识、方法、技巧作一些归纳，用专题的形式介绍给大家，以提高同学们的解题能力。

第三部分：综合训练篇。在此汇集了几套最近国内各地数学竞赛的试卷，以便同学们对当前数学竞赛的命题形式与趋势有所了解；另外，也为同学们提供了几套模拟测试卷，以提高同学们适应竞赛的能力。

本书是一套训练指导书，训练仍是我们想要提供给同学们的首要东西，因为缺乏训练的学习最终将是一句空话，现在就让我们开始学习吧！

在编写本书的内容时，主要参考了上海市东格致中学数学特色班的教学讲义，从近几年在上海浦东地区的使用效果来看是比较好的，因此本书可以作为对数学有所爱好并且想在数学方面要求有进一步提高的同学的一本课外训练书，当然本书也可以作为学校数学课外活动的辅助教材。

鉴于作者水平有限，因此对书中出现的不当乃至错误之处，敬请不吝指正。

编　者

2002.4

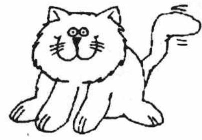
小学数学奥林匹克训练丛书介绍

小学数学奥林匹克训练指导（一至二年级）	19.80元
小学数学奥林匹克训练指导（三年级）	12.00元
小学数学奥林匹克训练指导（四年级）	15.00元
小学数学奥林匹克训练指导（五年级）	15.00元
小学数学奥林匹克训练指导（六年级）	16.50元
小学数学奥林匹克系列训练（三至六年级）	11.00元

初中数学奥林匹克训练丛书介绍

初中数学奥林匹克训练指导（初一）	19.80元
初中数学奥林匹克训练指导（初二）	19.80元（估价）
初中数学奥林匹克训练指导（初三）	20.00元

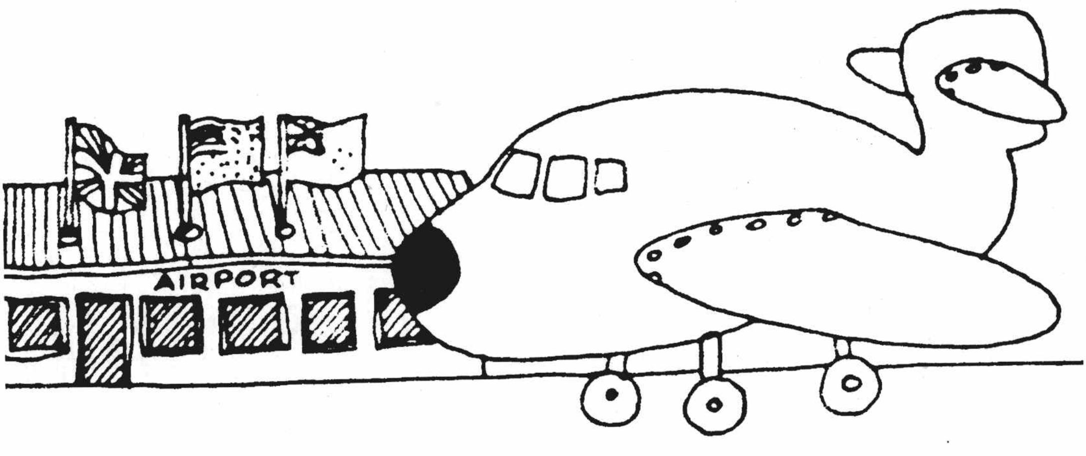
目　录




TICKETS

第一篇

同步提高篇



天 空 任 飞 翔

第一章　分式方程与无理方程

【知识要点】

分式方程是指分母中含有未知数的方程，解分式方程的主要方法是去分母，使之转化为整式方程，再通过解整式方程来达到解题的目的。

无理方程是指被开方数中含有未知数的方程，解无理方程的主要方法是通过两边乘方的手段，使无理方程转化为有理方程，再通过解有理方程来达到解题的目的。

总之，分式方程与无理方程在解的过程中都是利用一定的手段使之转化为较低级的方程，由于在转化的过程中，不一定能保持方程的同解性，可能会产生增根，因此最后验根的步骤是不可缺少的。

第一节　分式方程及其解法

例 1：解下列分式方程。

(1) $\dfrac{3x-1}{x+1}+\dfrac{2-x}{x-1}=1+\dfrac{2}{x^2-1}$

(2) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=0$

解：(1) 方程两边同时乘以 x^2-1，得

$$(3x-1)(x-1)+(2-x)(x+1)=(x^2-1)+2$$

即　$x^2-3x+2=0$。

$\therefore x_1=2,\ x_2=1$。

经检验，$x=1$ 为增根，$x=2$ 是原方程的根。

(2) 原方程可化为：$\dfrac{2x}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x^2-4}=0$

方程两边同时乘以 $(x^2-1)(x^2-4)$，得

$$2x(x^2-4)+2x(x^2-1)=0$$

即　$2x(2x^2-5)=0$

$\therefore x_1=0,\ x_2=\dfrac{\sqrt{10}}{2},\ x_3=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$。

经检验，$x_1=0,\ x_2=\dfrac{\sqrt{10}}{2},\ x_3=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ 均是原方程的解。

【评　注】 解分式方程的基本思路是在方程两边同时乘以各分母的最简公分母，再转化为整式方程。由于在上述转化过程中可能产生增根，所以最后必须验根。

例 2：解下列分式方程组。

$$\begin{cases}\dfrac{3}{x+y-2}-\dfrac{1}{x-y}=2\\ \dfrac{4}{x-y}+\dfrac{1}{x+y-2}=5\end{cases}$$

解：令 $\dfrac{1}{x-y}=a$，$\dfrac{1}{x+y-2}=b$，则原方程组为

$$\begin{cases}3b-a=2 & (1)\\ 4a+b=5 & (2)\end{cases}$$

(1)×4＋(2)得　$13b=13$

$\therefore b=1$，代入(1) 得 $a=1$

则 $$\begin{cases}\dfrac{1}{x-y}=1\\ \dfrac{1}{x+y-2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y=1 & (3)\\ x+y-2=1 & (4)\end{cases}$$

(3)＋(4)得　$2x-2=2$

$\therefore x=2$，代入(3) 得 $y=1$。

经检验，$\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$ 是原方程组的解。

【评　注】 本题若采用直接去分母的办法，则方程组将转化为二元二次方程组，而本题的解中我们采用了换元的方法，使方程组得到了简化，同时也达到了分式方程向整式方程的转化。

例 3：解下列分式方程。

(1) $\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{4x+8}{x}+3=0$

(2) $\dfrac{3x}{x^2+1}+\dfrac{x^2+1}{x}-4=0$

解：(1) 令 $\dfrac{x}{x+2}=a$，则原方程为 $a-\dfrac{4}{a}+3=0$。

$$a^2+3a-4=0。$$

$\therefore a_1=1$，$a_2=-4$。

当 $a=1$ 时，$\dfrac{x}{x+2}=1$　　则 $x=x+2$　$\therefore$ 无解；

当 $a=-4$ 时，$\dfrac{x}{x+2}=-4$ 则 $x=-4x-8$　$\therefore x=-\dfrac{8}{5}$。

经检验，$x=-\dfrac{8}{5}$ 是原方程的解。

(2) 令 $\dfrac{x}{x^2+1}=a$，则原方程为 $3a+\dfrac{1}{a}-4=0$。

$$3a^2-4a+1=0。$$

$\therefore a_1=1, a_2=\dfrac{1}{3}$。

当 $a=1$ 时，$\dfrac{x}{x^2+1}=1$　则 $x^2-x+1=0$　$\therefore$ 无解；

当 $a=\dfrac{1}{3}$ 时，$\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{3}$　则 $x^2-3x+1=0$　$\therefore x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$。

经检验，$x_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, x_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 均为原方程的解。

【评　注】 换元的手段在解分式方程中是十分常见的，一方面它能简化方程，另一方面也是解方程的一种必然需要，因为有些方程若不采用换元，则去分母后转化得到的将是二次以上的整式方程，而这类方程我们没有统一可行的解法。如例中(2)必须利用换元，不然将出现四次方程，而(1)不采用换元，也不影响解方程的顺利进行。

例 4：解下列分式方程。

(1) $6\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-38=0$

(2) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}+\dfrac{2x^2+x+2}{x^2+x+1}=\dfrac{19}{6}$

(3) $\dfrac{1}{x^2+11x-8}+\dfrac{1}{x^2+2x-8}+\dfrac{1}{x^2-13x-8}=0$

解：(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}-2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$

令 $x+\dfrac{1}{x}=a$，　则原方程为　$6(a^2-2)+5a-38=0$

$$6a^2+5a-50=0$$

$\therefore a_1=\dfrac{5}{2}, a_2=-\dfrac{10}{3}$。

当 $a=\dfrac{5}{2}$ 时，$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$　　则 $2x^2-5x+2=0$　$\therefore x_1=2, x_2=\dfrac{1}{2}$；

当 $a=-\dfrac{10}{3}$ 时，$x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{10}{3}$　　则 $3x^2+10x+3=0$　$\therefore x_3=-3, x_4=-\dfrac{1}{3}$。

经检验，$x_1=2, x_2=\dfrac{1}{2}, x_3=-3, x_4=-\dfrac{1}{3}$ 均是原方程的解。

(2) 原方程化为 $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}+1+\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}=\dfrac{19}{6}$。

令 $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=0$,则原方程为 $a+\frac{1}{a}=\frac{13}{6}$

$$6a^2-13a+6=0。$$

$\therefore a_1=\frac{3}{2}$, $a_2=\frac{2}{3}$。

当 $a=\frac{3}{2}$ 时,$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{3}{2}$ 则 $x^2-2x+1=0$ $\therefore x_1=1$;

当 $a=\frac{2}{3}$ 时,$\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{2}{3}$ 则 $x^2+3x+1=0$ $\therefore x_2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $x_3=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$。

经检验,$x_1=1$, $x_2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $x_3=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ 均是原方程的解。

(3) 令 $x^2-8=y$,则原方程为 $\frac{1}{y+11x}+\frac{1}{y+2x}+\frac{1}{y-13x}=0$

$$(y+2x)(y-13x)+(y+11x)(y-13x)+(y+11x)(y+2x)=0$$

则 $3y^2-147x^2=0$。

$\therefore y_1=7x$, $y_2=-7x$。

当 $y=7x$ 时,$x^2-8=7x$, $\therefore x_1=8$, $x_2=-1$;

当 $y=-7x$ 时,$x^2-8=-7x$, $\therefore x_3=-8$, $x_4=1$。

经检验,$x_1=8$, $x_2=-1$, $x_3=-8$, $x_4=1$ 均是原方程的解。

【评 注】 有一些分式方程直接用去分母的方法去解将出现高次方程,而换元又没有明显的相同部分,此时我们常采用适当的变形,使方程中产生可换元的相同部分;另外有些问题中我们只采用部分换元的办法。

练 习 一 (1)

一、填空题:

1. 方程 $\frac{x^2}{x-1}+\frac{2x}{x-1}=\frac{3}{x-1}$ 的解是________

2. 分式 $\frac{3}{x}-\frac{x+1}{x^2+2x}=\frac{2x-1}{x^2+x-2}$ 中,最简公分母是________

3. 当 $x=$ ________ 时,分式 $\frac{x}{x+2}$ 与 $\frac{2}{x-1}$ 的值相等。

4. 分式方程 $\frac{x+2}{2x+1}-\frac{2x+1}{x+2}=\frac{17}{4}$,设________ $=y$ 换元后,变形整理得到的整式方程为________

5. 分式方程 $2x^2-x+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+3=0$,设 $x-\frac{1}{x}=y$,则变形整理得到的整式方程为

____

二、解下列分式方程：

1. $2-\frac{x}{x^2-1}+\frac{3}{x-1}=0$

2. $\frac{3}{x+1}-\frac{1-x}{x-2}+\frac{x-2}{x^2-x-2}=0$

3. $1-\frac{2}{x+1}-\frac{4}{x^2-1}=\frac{x}{1-x}$

4. $\frac{9x-2}{x^2-x-6}-\frac{1-x}{3-x}=\frac{2-x}{x+2}+1$

5. $\frac{2x}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}+\frac{1}{2x+4}=\frac{1}{2}$

6. $\frac{4x}{x^2-4}+\frac{2}{2-x}=1+\frac{1}{x+2}$

7. $\frac{3x-1}{x^2-1}-\frac{x}{x-1}=2$

8. $\frac{x+1}{x^2+2x-3}+\frac{2x-2}{x^2+x-6}+\frac{6x}{x^2-3x+2}=0$

三、解下列分式方程：

1. $\frac{6}{x^2+x}=x^2+x+1$

2. $\frac{2x-1}{x^2}-\frac{3x^2}{2x-1}=-2$

3. $\frac{x+1}{x^2-x+2}+\frac{x^2-x+2}{3x+3}=2\frac{1}{6}$

4. $x^2+x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=5\frac{3}{4}$