高等学校教材

数值分析

·下册·

孙庆新　等编著

东北工学院出版社

数　值　分　析

（下　册）

孙庆新　齐秉寅　张树功　编著
张利民　张　铁　阎家斌

东北工学院出版社

内 容 简 介

全书共十五章。第一章是为了帮助读者顺利学习本书的内容而编写的基础知识．第二至第十一章，着重介绍常用的计算方法及有关的理论．第十二至第十五章是为了进一步提高读者的解题能力、分析能力以及在计算机上上机计算的能力而编选的自学内容．全书共分上下两册．

该书内容丰富，取材精炼，重点突出，推导详细，数值计算例子较多．内容安排由浅入深，各节都有复习思考题，便于教学．本书可作高等工科院校非计算专业的高年级学生和研究生的教材，也可供从事数值计算的科技工作者参考．

数 值 分 析（下册）

孙庆新 等编著

东北工学院出版社出版（沈阳·南湖）

辽宁省新华书店发行

东北工学院印刷厂印刷

辽新出许字 89084 号

开本：787×1092　1/16　印张：21　字数：542 千字

1990 年 5 月第 1 版　1990 年 5 月第 1 次印刷

印数：1～3000

责任编辑：朱玉瑷　责任校对：科　志

封面设计：唐敏智

ISBN 7-81006-239-5/O·14　定价：4.49 元

前 言

各个学科领域，各种科学技术在其开发与研究的过程中，经常要把研究的问题数学模型化，计算数学模型，分析计算数据提供的信息。在计算数学模型时，怎样选择和使用适当的计算方法，怎样正确地对待计算结果并估计误差，怎样处理和解释计算过程中的异常现象等等，都是科技工作者需要解决的问题。因此，在培养各层次科技人材时，需要有相应的教学环节培养他们的科学计算能力。由于这一原因，在各大专院校非计算数学专业的理工科的高年级学生和研究生中，现已普遍设置了《数值分析》课。

本书是作者在总结多年教学经验的基础上编写而成的。读者对象是高等院校非计算数学专业的高年级学生、研究生和进行科学计算工作的科技人员。凡具有高等数学和线性代数知识的读者，都具有学习本书的条件。

《数值分析》亦称《计算方法》。它不是计算数学的学科，而是为了使读者在较短的时间内，掌握计算数学的几个不同学科的基本内容和基本方法而设置的一门综合性课程。各章内容有一定独立性，但是我们希望读者要注意到：第一，非线性方程（组）求根、线性方程组的数值解法以及函数插值与逼近，几乎是各种科学计算的“基础性计算”。第二，在解决任一个具体的数值计算的课题时，从算法的角度看，都带有综合性，譬如计算一个偏微分方程的定解，全离散后要解一个线性方程组，半离散后常常要解常微分方程组，因此，对于只学习本书部分内容的读者，应当对有关问题作进一步的了解。

为了使读者牢牢掌握这一科学研究和工程设计中的有力工具，并在此基础上能阅读有关文献，学习一些更新、更广以及更深的内容，以促进科学技术的发展，本书力求全面系统地介绍各类数值问题的基本解法和基本理论，同时还增加了基础知识、例题选讲和程序设计方法四章辅导性的内容。全书共分两册出版。

全书共十五章，其中理论部分约需授课 90 学时，如果删去第一章§3 至§5 以及第十和第十一两章，则需 60 学时左右。

书中的第一章和第六至第十一章由孙庆新编写，第二至第五章由齐秉寅编写，第十二至第十五章由张树功、张利民、张铁和阎家斌选编而成。我们希望读者在阅读本书后，提出宝贵的意见。

本书在编写的过程中得到东北工学院研究生院和东北工学院出版社的支持，也得到吉林大学冯果忱、黄明游两位教授的指教，作者在此谨致谢意。

作 者

1988 年 7 月

目　　录

第九章　常微分方程初值问题的数值解法

§1　引　　言

科学技术的各学科领域所研究的现象和问题虽然错综复杂，但是，以其量的变化规律而言，往往可以归结成求某个微分方程的定解。也就是说，求微分方程的定解，是科技界经常需要计算的一大类数学模型。

微分方程的理论已指明，很多微分方程的定解虽然存在，但不能用简单的初等函数表示。有的甚至不能给出解的表达形式。因此经常求其能满足精度要求的近似解。

微分方程的数值解法，是一种常用的求近似解的方法。由于它提供的算法能通过计算机进行快速计算，因此得到迅速的发展和广泛的应用。

微分方程的数值解法的特点是：把求解区域剖分，然后把微分方程离散成在节点上的状态，得到节点上的近似方程（组），最后结合定解条件求出近似解。这里，既有方法问题（怎样剖分，怎样离散），也有理论问题（稳定性、收敛性等）。

我们分三章来研究微分方程的数值解法。本章只讨论常微分方程初值问题的数值解法。其它内容放在第十和十一两章中，再分别研究。

1.1　基本知识复习

考虑如下方程定解问题

$$(a)\quad \begin{cases} y' = f(x,y) \qquad a \leqslant x \leqslant b & (1) \\ y(a) = \alpha & (2) \end{cases}$$

即是一阶常微分方程的初值问题。其中 $f(x,y)$ 是已知的函数，(2) 是初始条件。

定义 1　假设 $f(x,y)$ 定义在区域 $G=\{a\leqslant x\leqslant b, |y|<\infty\}$。若存在常数 L，使

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leqslant L|y_1-y_2| \qquad (3)$$

对任意 $x\in[a,b]$ 和所有的 y_1 和 y_2 成立。则称 $f(x,y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件. L 称 Lipschitz 常数。

当然，也可以定义关于 x 满足 Lipschitz 条件。事实上，当 $f(x,y)$ 对 y 有连续偏导数时，由中值定理知

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| = |f'_y(x,\xi)(y_1-y_2)| \leqslant L|y_1-y_2|$$

其中 $L=\max|f_y(x,y)|$。即 $f(x,y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件.

定理 1　设 $f(x,y)$在G上连续,关于 y 满足 Lipschitz 条件。则(a)的解存在且唯一。

定义 2　称初值问题(a)关于初始值 y_0 是适定的，如果存在正常数 k 和 τ，使得 $\varepsilon\leqslant\tau$，当

$$|y_0-\tilde{y}_0|<\varepsilon$$
$$|f(x,y)-\tilde{f}(x,y)|<\varepsilon \qquad (x,y)\in G$$

时，初值问题

$$\begin{cases} \tilde{y}' = \tilde{f}(x, \tilde{y}) \\ \tilde{y}|_{x=a} = \tilde{y}_0 \end{cases}$$

有解存在，并满足

$$|y - \tilde{y}| \leqslant k\varepsilon \tag{4}$$

适定性的概念是重要的。在数学模型的建立过程中 $f(x,y)$ 与初值都有误差。当两者的误差不大时，相应的解的误差也不应当严重振荡。否则，数学模型(a)就没有意义了。

定理 2 设 $f(x,y)$在 G 上连续，关于 y 满足 Lipschitz 条件，则初值问题(a)对任何初值都是适定的。

1.2 其它常微分方程

高阶常微分方程的初值问题，都可以转化成等价的一阶常微分方程组的初值问题。譬如

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \qquad a \leqslant x \leqslant b \\ y(a) = \alpha \\ y'(a) = \beta \end{cases}$$

取 $y' = u$，则转化成等价的一阶常微分方程组

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = f(x, y, u) \\ y(a) = \alpha, \ u(a) = \beta \end{cases}$$

因此，只须研究如下的一阶微分方程组的初值问题

$$(b) \qquad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, \cdots, y_m) \\ \vdots \\ y_m' = f_m(x, y_1, \cdots, y_m) \end{array}\right\} a \leqslant x \leqslant b \\ y_1(a) = \alpha_1 \\ \vdots \\ y_m(a) = \alpha_m \end{cases}$$

其中 $f_i(x, y_1, \cdots, y_m)$ 是已知函数。

取向量

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_m)^{\top}, \ \boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_m)^{\top}$$

把(b)写成向量形式

$$(c) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \\ \boldsymbol{y}|_{x=a} = \boldsymbol{y}_0 \quad \boldsymbol{y}_0 = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)^{\top} \end{cases}$$

此时，对初值问题(c)，我们在 6.1 中给出的定义和定理，都可以直接移植过来。譬如：如果存在常数 L，使

$$\|\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_2)\| \leqslant L \|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\|$$

对任意的 $\boldsymbol{y}_1$ 和 $\boldsymbol{y}_2$ 以及 $x \in [a, b]$ 成立，则称 $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ 关于 $\boldsymbol{y}$ 满足 Lipschitz 条件。也就是说，把绝对值符号都换成模。

我们以(a)为典型构造各种常用算法，建立有关的概念和理论。然后，再把它们推广到问题(c)。

思　考　题

针对问题 (c) 给出类似的定理一和定理二.

§2 Euler 方法

以典型问题

$$(a)\qquad \begin{cases} y' = f(x,y) & a \leqslant x \leqslant b \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

为例，建立比较直观的 Euler 方法。重点在于说明同数值解法有关的基本概念以及构造常微分方程数值解法时，常用的几种方法。

2.1 Euler 方法的导出

把求解区间 $[a,b]$ 等距剖分成 n 个小区间，取步长 $h = \dfrac{b-a}{n}$，节点

$$x_i = x_0 + ih \qquad i = 0,1,\cdots,n$$

其中 $x_0 = a$。

把微分方程(1)在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上积分，得到同(1)等价的方程

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'\mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)\mathrm{d}x$$

假定 $y(x)$ 是 (1) 的解，把上式写成

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)\mathrm{d}x \tag{5}$$

称(5)是(1)的微分积分方程。用左矩形公式

$$\int_a^b y'(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)y(a) + \frac{y'(\xi)}{2}(b-a)^2 \qquad \xi \in (a,b)$$

代替(5)的右端的积分，就得到

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = hf(x_i, y(x_i)) + R_i \tag{6}$$

其中 $R_i = \dfrac{y''(\xi)}{2!}h^2$，$\xi \in (x_i, x_{i+1})$，$i = 0,1,\cdots,n-1$。

这样，我们把微分方程(1)改变成在节点上的状态，把这个过程称作离散化。R_i 表示当 $y(x)$ 是 (1) 的解时，由离散方法带来的误差，此种误差称作局部截断误差。当 $y''(x)$ 有界时，记

$$R_i = O(h^2)$$

也称 $O(h^2)$ 是局部截断误差阶。式(6)是二阶的。

舍去局部截断误差，并用 $y_i \approx y(x_i)$，就得到一个差分方程

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \qquad i = 0,1,\cdots,n-1 \tag{7}$$

称(7)是(1)的 Euler 方法的计算公式。简称作 Euler 方法。把它同初始条件结合起来

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) & i = 0, 1, \cdots, n-1 \\ y_0 = \alpha \end{cases} \tag{8}$$

就能逐次求得 $y_1, y_2, \cdots, y_n$.

为了获得 Euler 公式，也可以用其它方法离散微分方程(1).

假定 $y(x)$ 是 (1) 的解，由于

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = [y']_i + \frac{y''(\xi)}{2!}h$$

也得到

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = hf(x_i, y(x_i)) + \frac{y''(\xi)}{2}h^2$$

舍去局部截断误差，并用 $y_i \approx y(x_i)$，同样得到 Euler 公式。也就是说，也可以用用差商代替微商的方法离散微分方程.

假定 $y \in C^2[a,b]$。把 $y(x_{i+1})$ 在节点 x_i 作 Taylor 展开，有

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{y''(\xi)}{2!}h^2$$

因为 $\qquad y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$

由此也可以得到 Euler 方法.

这样，我们用三种不同的方法离散 (1)，都得到 (7)，这三种方法是建立差分方程时的几个常用的方法.

Euler 方法有明显的几何直观性. 如图 9-1 所示，过点 (x_0, y_0) 的曲线是 (a) 的解. Euler 方法是：在 (x_0, y_0) 上作积分曲线的切线，它与直线 $x = x_1$ 交于 (x_1, y_1)。在 (x_1, y_1) 点作过此点的积分曲线的切线，它与直线 $x = x_2$ 交于 (x_2, y_2)，再在此点作过该点的积分曲线的切线，它又与直线 $x = x_3$ 相交，如此做下去，就得到一条在节点上同解曲线有相同的斜率的折线。Euler 方法的实质，就是以此折线，代替积分曲线. 故也称作 Euler 折线方法.

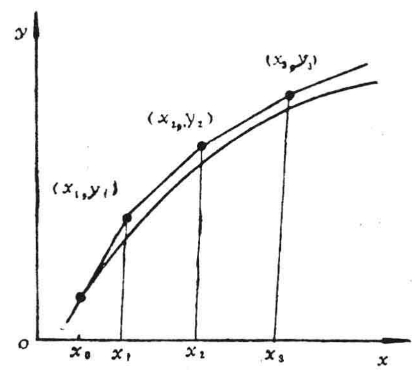

图 9-1

用右矩形公式和中矩形公式分别代替(5)的右端的积分和(1)在$[x_{i-1}, x_{i+1}]$的积分，可得

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = hf(x_{i+1}, y(x_{i+1})) - \frac{h^2}{2}y''(\xi) \quad \xi \in (x_i, x_{i+1})$$

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) = 2hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^3}{3}y'''(\xi) \quad \xi \in (x_i, x_{i+1})$$

从而得到二个差分方程

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}) \qquad i = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{9}$$

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i) \qquad i = 1, \cdots, n-1 \tag{10}$$

(9)的局部截断误差阶是 $O(h^2)$，而 (10) 则是 $O(h^3)$。把它们同初始条件结合起来，分别是

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}) & i = 0,1,\cdots,n-1 \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i) & i = 1,\cdots,n-1 \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

也可以逐次求得 $y_1, y_2, \cdots, y_n$。我们称(9)是 Euler 隐式。称(10)是 Euler 中点公式。

现在，比较已经得到的三个算法：

(1) 局部截断误差阶有高有低。由于局部截断误差阶反映离散方法的精度。从下面两式

$$[y' - f(x,y)]_i - \left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - f(x_i,\ y(x_i))\right] = O(h)$$

$$[y' - f(x,y)]_i - \left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - f(x_i,\ y(x_i))\right] = O(h^2)$$

更能看出截断误差阶的意义。也就是说，用局部截断误差阶比较高的方法，能更好的逼近微分方程。

其次，只有当局部截断误差阶 $O(h^\alpha)$ 中的 $\alpha>1$， 才能保证：当 $h\to 0$ 时，差分方程逼近微分方程。此时，称差分方程相容逼近于微分方程。

(2) 从(7)中能直接算出 y_{i+1}， 而(9)则需要解方程。更确切的说，当已知 $y_0,\cdots,y_i$，能从算式中直接求出 y_{i+1} 的算式称作显式。 否则，称作隐式。中点公式就是显式。

(3) 在计算 y_{i+1} 时，有的算法只用 y_i，有的算式要用到 y_{i+1} 以前的数个值。前者称作单步方法，后者称多步方法。 Euler 方法是单步方法，中点公式是两步方法。

今后，局部截断误差阶，记作

$$O(h^{p+1})$$

凡局部截断误差阶是 $O(h^{p+1})$ 的方法称作 p 阶方法。Euler 方法、Euler 隐式方法，都是单步一阶方法，中点公式是二步二阶方法。

例 1 求

$$\begin{cases} y' = -y & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的近似解。

解 取步长 $h=0.1$，节点

$$x_i = ih \qquad i = 0,1,\cdots,10$$

Euler 方法的算式：

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i(1-h) \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Euler 隐式及中点公式分别是

$$\begin{cases} y_{i+1} = \dfrac{y_i}{1+h} \\ y_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{i+1} = y_{i-1} - 2hy_i \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

计算结果见表 9-1.

表 9-1

x	精确值	Euler 方法	误差	隐式方法	误差	中点公式	误差
0.1	0.904837	0.900000	4.837 $E-5$	0.909091	-4.254 $E-5$	0.900000	4.837 $E-5$
0.2	0.818731	0.810000	8.731 $E-5$	0.826446	-7.715 $E-5$	0.820000	-1.269 $E-5$
0.3	0.740818	0.729000	1.1818 $E-4$	0.751315	-1.049 $E-4$	0.736000	4.818 $E-5$
0.4	0.670320	0.656100	1.422 $E-4$	0.683013	-1.269 $E-4$	0.672800	-2.48 $E-5$
0.5	0.606531	0.590490	1.604 $E-4$	0.620921	-1.439 $E-4$	0.601440	5.091 $E-5$
0.6	0.548812	0.531441	1.7371 $E-4$	0.564474	-1.566 $E-4$	0.552512	-3.7 $E-5$
0.7	0.496585	0.478297	1.8288 $E-4$	0.513158	-1.657 $E-4$	0.490938	5.647 $E-5$
0.8	0.449329	0.430467	1.8862 $E-4$	0.466507	-1.718 $E-4$	0.454324	-4.995 $E-5$
0.9	0.406570	0.387421	1.9149 $E-4$	0.424098	-1.753 $E-4$	0.400073	6.497 $E-5$
1.0	0.367879	0.348679	1.92 $E-4$	0.385543	-1.766 $E-4$	0.374310	-6.431 $E-5$

由表 9-1 看出：Euler 方法和隐式方法的结果差不多，精度不如中点公式好；但是，中点公式的误差波动大.

2.2 误差分析

设 $y(x)$ 是 (a) 的精确解，y_i 是 Euler 方法的精确解. 取

$$y(x_i)-y_i=\varepsilon_i$$

称 ε_i 是整体截断误差.

显然，若用

$$y(x_i)\approx y_i$$

需要估计 ε_i. 估计 ε_i，常常同研究当 $h\to 0$ 时，y_i 是否收敛于 $y(x_i)$ 及其收敛速度（即收敛阶）有关.

其次，通过 Euler 公式，经常也求不出 y_i，而是求得 y_i 的近似值 $\tilde{y}_i$. 这样，最终的误差是

$$y(x_i)-\tilde{y}_i=\beta_i$$

由于

$$\beta_i=y(x_i)-y_i+(y_i-\tilde{y}_i)$$

是由两部分组成. 显然，既使 y_i 收敛于 $y(x_i)$. 也不能保证有 $y_i-\tilde{y}_i\to 0\,(h\to 0)$. 我们称 $y_i-\tilde{y}_i$ 是舍入误差. 因为有

$$\tilde{y}_{i+1}=\tilde{y}_i+hf(x_i,\tilde{y}_i)$$

所以，假定在第 i 步计算上产生舍入误差，它势必带到以后的计算中去. 特别使我们担心的是它在以后计算中的影响的趋势如何？

例 2 用 Euler 方法及中点公式计算

$$\begin{cases} y'=-y & 0\leqslant x\leqslant 10 \\ y(0)=1 \end{cases}$$

假定在计算 y_1 时产生误差 ε，在以后的计算中不出现其它误差，分析此误差传播的趋势.

解 由于

$$y_{i+1}=(1-h)y_i$$
$$\tilde{y}_{i+1}=(1-h)\tilde{y}_i$$

故误差满足

$$\varepsilon_{i+1}=(1-h)\varepsilon_i$$

从而

$$\varepsilon_{i+1}=(1-h)^i\varepsilon$$

显然，当 $h<1$ 时，此误差在逐步计算中逐渐减弱。

中点公式的误差满足

$$\varepsilon_{i+1}=\varepsilon_{i-1}-2h\varepsilon_i$$

取 $h=0.5$，算得各步误差如下

$$\varepsilon_1=\varepsilon,\quad \varepsilon_2=-\varepsilon,\quad \varepsilon_3=2\varepsilon,\quad \varepsilon_4=-3\varepsilon,\quad \varepsilon_5=5\varepsilon,\quad \varepsilon_6=-8\varepsilon,\quad \varepsilon_7=13\varepsilon,$$
$$\varepsilon_8=-21\varepsilon,\quad \varepsilon_9=34\varepsilon,\quad \varepsilon_{10}=-55\varepsilon,\quad \varepsilon_{11}=89\varepsilon,\quad \varepsilon_{12}=144\varepsilon\quad \cdots.$$

其影响在逐步计算中明显加强，并有失控的趋势。前者我们认为是稳定的，后者是不稳定的。

综上所述，在分析误差时，不仅要研究收敛性，更需要研究稳定性。显然，一个不稳定的方法，其收敛阶既使再高，也没有多大的意义。我们在§4 中，再深入的去研究它们。

2.3 改进的 Euler 方法

在处理如下的微分积分方程时，

$$y(x_{i+1})-y(x_i)=\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x,y)\mathrm{d}x$$

用梯形公式代替右端的积分，得到

$$y(x_{i+1})-y(x_i)=\frac{h}{2}[f(x_i,y(x_i))+f(x_{i+1},\ y(x_{i+1}))]-\frac{h^3}{12}y''(\xi),\quad \xi\in[x_i,x_{i+1}]$$

从而得到一个局部截断误差阶是 $O(h^3)$ 的方法

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})] \tag{11}$$

称(11)是梯形方法。这是一种改进的 Euler 方法。它也是一个二阶单步隐式方法。把它同初值结合

$$\begin{cases} y_{i+1}=y_i+\dfrac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})] & i=0,1,\cdots,n-1 \\ y_0=\alpha \end{cases}$$

就可以逐次求 $y_1,\cdots,y_n$。但是，当 y_i 已知，用(11)求 y_{i+1}，需要解方程。在多数的情况下要用迭代方法求解，这样，需要给 y_{i+1} 的一个初值，按下式进行迭代

$$\begin{cases} y_{i+1}^{[0]} \\ y_{i+1}^{[k]}=y_i+\dfrac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1}^{[k-1]})] \end{cases} \tag{12}$$

当相邻两次迭代值满足

$$|y_{i+1}^{[k+1]}-y_{i+1}^{[k]}|<\varepsilon$$

就可以用 $y_{i+1}\approx y_{i+1}^{(k+1)}$。其中 $\varepsilon>0$ 是给定精度。

取迭代函数

$$\varphi(y)=y_i+\frac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y)]$$

若 $f(x,y)$关于 y 满足 Lipschitz 条件。由于

$$|\varphi(y)-\varphi(z)|\leqslant\frac{hL}{2}|y-z|$$

故当

$$h<\frac{2}{L}$$

迭代收敛。

若 $f(x,y)$ 对 y 有连续的一阶偏导时，由于

$$|\varphi(y)-\varphi(z)|\leqslant\frac{Mh}{2}|y-z|$$

故当

$$\frac{Mh}{2}<1$$

迭代也收敛。其中 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f_y(x,y)|$.

由于初值选择影响迭代速度，经常采用一种预估-校正算法：用显式给初值，即

$$y_{i+1}^{(0)}=y_i+hf(x_i,y_i)$$

再用式（12）迭代，其完整算式是

$$\begin{cases}y_0=\alpha\\ y_{i+1}^{(0)}=y_i+hf(x_i,y_i)\\ y_{i+1}^{(k+1)}=y_i+\dfrac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1}^{(k)})] \quad k=0,1,\cdots,\quad i=0,1,\cdots,n-1\end{cases}\tag{13}$$

（13）也称作改进后的 Euler 方法。

预估-校正算法的特点：用低精度的显式进行预算，并提供初值；再用精度较高的隐式进行校正性的迭代计算。一般地说迭代一两次就能达到精度要求。如果迭代几次后，精度达不到要求，说明步长偏大，应把步长减半后再进行计算。

例 3 求

$$\begin{cases}y'=y-\dfrac{2x}{y} \qquad x\in[0,1]\\ y_0=1\end{cases}$$

的数值解。

解 已知解是 $y=\sqrt{1+2x}$。我们取步长 $h=0.1$，用 Euler 方法和梯形方法进行计算。用表 9-2 列出计算结果。

表 9-2

x	Euler 方法	梯形方法	精确值
0.1	1.100000	1.095909	1.095445
0.2	1.191818	1.184096	1.183216
0.3	1.277438	1.266201	1.264911
0.4	1.358213	1.343360	1.341641
0.5	1.435133	1.416402	1.414214
0.6	1.508966	1.485956	1.483246
0.7	1.580338	1.552515	1.549193
0.8	1.649783	1.616476	1.612452
0.9	1.717779	1.678168	1.673320
1.0	1.784770	1.737869	1.732051

从表 9-2 看梯形方法的精度明显的优于 Euler 方法。

例 4 用预估-校正算法求

$$\begin{cases} y' = y^2 & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

解 本题的算式是

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{i+1}^{(0)} = y_i + hy_i^2 \\ y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + \dfrac{h}{2}[y_i^2 + (y_{i+1}^{(k)})^2] \end{cases}$$

取步长 $h=0.5$，则

$$y_1^{(0)} = 1.500,\quad y_1^{(1)} = 1.812,\quad y_1^{(2)} = 2.071,\quad y_1^{(3)} = 2.322,\cdots$$

它不收敛于 $y(0.5)=2.0000$。

取 $h=0.4$，则

$$y_1^{(0)} = 1.4000,\quad y_1^{(0)} = 1.5920,\quad y_1^{(2)} = 1.7068,\cdots,y_1^{(23)} = 1.9984$$

同 $y(0.4)=1.6667$ 相比，绝对误差是 0.3317，显然太大。取 $h=0.1$，则

$y_1^{(0)} = 1.1000$，$y_1^{(1)} = 1.1105$，$y_1^{(2)} = 1.1118$，同 $y(0.1)=1.1111$ 比较，绝对误差是 0.0007，已很小了。

思　考　题

1. 假定 $y=y(x)$ 是初值问题的解. 如果把 Euler 方法的右端换成解在节点上的精确值，此时

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1}$$

是否是局部截断误差？由此给出局部截断误差的定义.

2. 如何评价一个单步方法的优劣？

3. 构造单步方法的常用方法有几种？

§3 高阶单步方法

在§4以后，可知收敛的局部截断误差阶是$O(h^{p+1})$的单步方法，其收敛阶是$O(h^p)$。步长相同时，一般地是阶数高的方法比较好。因此，如何构造一些高阶的单步方法，是本节的重要内容。

3.1 Taylor 方法

假定 $f(x,y)$ 充分光滑，或者说 $y(x)\in C^{p+1}[a,b]$。利用 p 阶 Taylor 公式有：

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+y'(x_i)h+\frac{y''(x_i)}{2!}h^2+\cdots+\frac{y^{(p)}(x_i)}{p!}h^p+\frac{y^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!}h^{p+1},$$

$$\xi\in(x_i,x_{i+1}) \tag{14}$$

式中的 $y^{(k)}$，可以用 $y'=f(x,y)$ 求得。其算式如下：

$$y''(x)=[f(x,y(x))]'=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}f=\left(\frac{\partial}{\partial x}+f\frac{\partial}{\partial y}\right)f=Df$$

其中算符 $D=\dfrac{\partial}{\partial x}+f\dfrac{\partial}{\partial y}$。

$$y'''=f_{xx}+2f_{xy}+f^2f_{yy}+f_yf_x+f_y^2f=D^2f+f_yDf$$

$$\vdots$$

这样就得到一个局部截断误差阶是 $O(h^{p+1})$ 的单步方法：

$$\begin{cases}y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)+\dfrac{h^2}{2}f'(x_i,y_i)+\cdots+\dfrac{h^p}{p!}f^{(p-1)}(x_i,y_i)\\ y_0=\alpha\end{cases} \tag{15}$$

其中 $y^{(r)}=f^{(r-1)}(x,y(x))$。

显然，利用(15)进行计算时，计算工作量集中在求 $f^{(r)}(x,y(x))$上。只有 f 比较简单时，(15)式给出的算法，才有实用的价值。否则难以使用。

3.2 怎样构造容易计算的高阶单步方法

把改进的 Euler 方法写成

$$\begin{cases}y_{i+1}=y_i+\dfrac{h}{2}[k_1+k_2]\\ k_1=f(x_i,y_i)\\ k_2=f(x_i+h,y_i+hk_1)\end{cases} \tag{16}$$

其优点是在算式中，只计算 $f(x,y)$ 的值。现在，分析式(16)的局部截断误差。为此，把(16)在 x_i 点作 Taylor 展开，得到

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}f(x_i,y_i)+\frac{h}{2}[f(x_i,y_i)+hf_x(x_i,y_i)+hk_1f_y(x_i,y_i)]+O(h^3)$$

把上式 y_i 换成 $y(x_i)$，则有