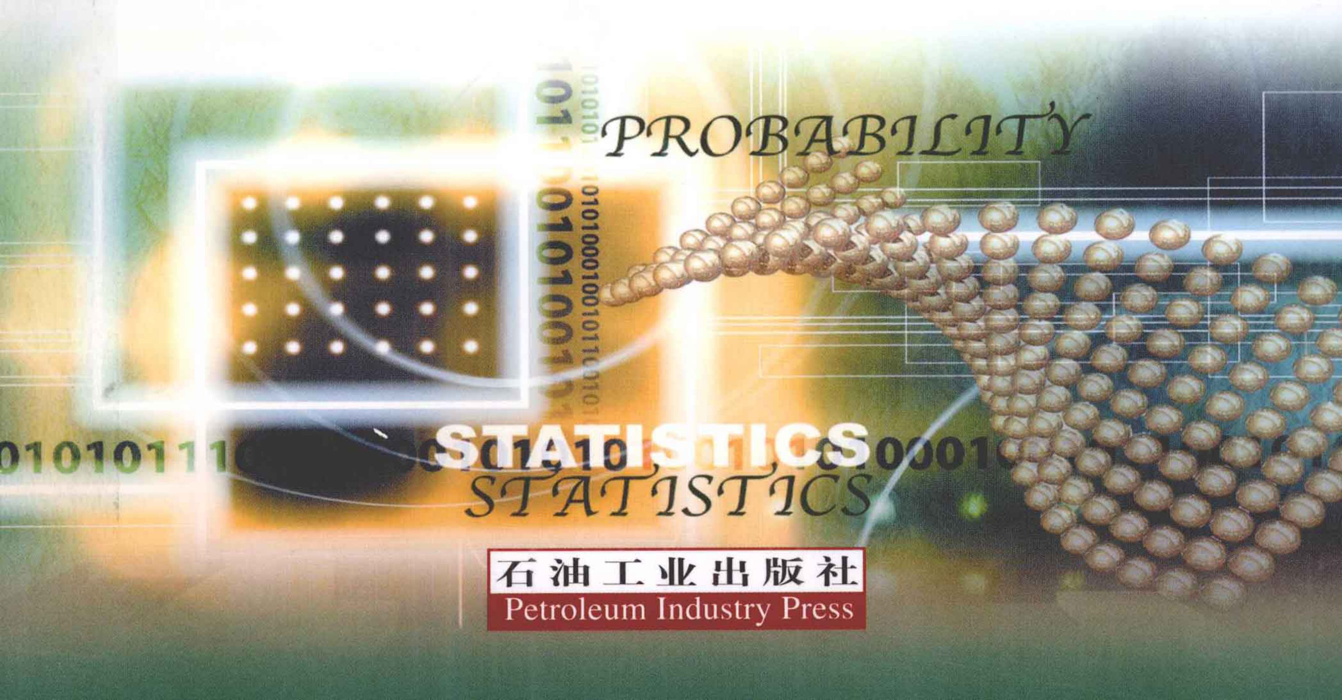
高等学校教材

概率论与数理统计学习指南

张艳 张蒙 崔景安 主编



石油工业出版社
Petroleum Industry Press

概率论与数理统计
学习指南

张　艳　张　蒙　崔景安　主编

石油工业出版社

内 容 提 要

本书为张艳、程士珍主编的高等学校教材《概率论与数理统计》的配套教材。书中详细介绍了每章的知识点、典型例题、习题详解，此外，还配有大量训练题及其参考答案，以供学生进一步掌握和消化相关要点。

本书可作为高等院校工科、理科各专业“概率论与数理统计”课程的配套教材，也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指南/张艳，张蒙，崔景安主编．
北京：石油工业出版社，2011.12
高等学校教材
ISBN 978-7-5021-8744-6

Ⅰ．概…
Ⅱ．①张…②张…③崔…
Ⅲ．①概率论-高等学校-教学参考资料
②数理统计-高等学校-教学参考资料
Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 212169 号

出版发行：石油工业出版社
（北京安定门外安华里 2 区 1 号　100011）
网　址：www.petropub.com.cn
编辑部：(010)64523579　发行部：(010)64523620
经　销：全国新华书店
印　刷：石油工业出版社印刷厂

2011 年 12 月第 1 版　2011 年 12 月第 1 次印刷
787×1092 毫米　开本：1/16　印张：13.5
字数：336 千字

定价：22.00 元
（如出现印装质量问题，我社发行部负责调换）

前　言

本书是与石油工业出版社出版的《概率论与数理统计》相配套的学习辅导书，旨在帮助学生掌握概率论与数理统计的基本内容和解题方法，帮助学生提高学习效率。

在本书的编写过程中，参照了高等工科院校的《概率论与数理统计教学基本要求》，考虑到教材的系统性，共分八章进行编写。第一章至第五章为概率论部分，第六章至第八章为数理统计部分。每章内容分五部分：

（1）知识点——便于读者在学习时提纲挈领地掌握课程内容。

（2）典型例题——通过例题的示范，指导读者解题，帮助读者掌握解题的步骤和方法。

（3）教材习题详解——对《概率论与数理统计》教材中习题的解题过程进行较为详细地说明和分析。

（4）训练题——通过配备一定数量的练习题，考查学生对教材中的基本概念、定理、公式是否清楚，自我评价对课程内容的掌握程度以增强学习效果。

（5）训练题参考答案——给出简答，便于学生自查。关于训练题参考答案，希望读者先主动思考，然后将自己的解题结果与答案对照，有益于提高解题水平。

本书由北京建筑工程学院理学院教师编写。具体分工如下：第一章由张丽萍编写，第二章和第六章由张艳编写，第三章和第五章由张蒙编写，第四章由刘志强编写，第七章由王晓静编写，第八章由卢崇煜编写。全书由张艳、张蒙、崔景安主持设计并负责统稿和定稿。

由于编者水平有限，书中难免存在错误和不当之处，敬请读者和同行批评指正。

编　者

2011 年 7 月

目　录

第一章　随机事件的概率

§1　知　识　点

一、随机现象

在自然界和人类社会中存在各种各样的现象，这些现象总的来说可以分成两类. 第一类是在一定条件下一定会发生的现象，我们称这类现象为确定现象. 第二类是事先无法确切知道哪一个结果一定会出现，但大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象，我们称这一类现象为随机现象.

二、随机试验

满足以下三个特点的试验称为随机试验，记为 E：

(1)可重复性，试验在相同条件下可以重复进行；

(2)可知性，每次试验的可能结果不止一个，并且事先能明确试验所有可能的结果；

(3)不确定性，进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现，但必然出现结果中的一个.

三、样本空间、随机事件

1. 样本空间、样本点

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为样本空间，记为 S. 样本空间中的元素称为样本点.

2. 随机事件

试验 E 的样本空间 S 的子集为这个试验的随机事件，简称事件，记为 A、B、C.

由一个样本点构成的单点集称为基本事件.

在每次试验中一定发生的事件称为必然事件，记为 S.

在每次试验中一定不发生的事件称为不可能事件，记为$\varnothing$.

3. 事件间的关系

(1)包含关系. 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$. 如果 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则 $A=B$，称事件 A 与事件 B 相等.

(2)事件的和. 事件 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$称为事件 A 与事件 B 的和事件，当且仅当 A，B 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生，记作 $A\cup B$.

一般地，事件的和可以推广到多个事件的情形，所以称$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$的和事件.

(3)事件的积. 事件 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$称为事件 A 与事件 B 的积事件，当且仅当

A,B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生，记作 $A\cap B$ 或 AB.

一般地，事件的积可以推广到多个事件的情形，称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件.

(4)事件的差. 事件 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件，当且仅当 A 发生、B 不发生时，事件 $A-B$ 发生.

(5)互不相容事件. 事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 为互不相容事件. 互不相容事件又称为互斥事件.

(6)逆事件. 若 $A\cup B=S$，且 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件，又称互为对立事件. 这是指在每一次试验中，事件 A 与事件 B 中必有一个发生，且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

4. 事件间的运算规律

(1)交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$；

(2)结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(3)分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(4)德・摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

四、频率与概率

1. 概率的定义

设有随机试验 E，S 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1)非负性：对于每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2)规范性：对于必然事件 S，有 $P(S)=1$；

(3)可列可加性：设 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两不相容事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

2. 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2)有限可加性：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两不相容事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

(3)对于任意两个事件 A,B，有 $P(B-A)=P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$；

特别地，若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，$P(B)\geqslant P(A)$；

(4)对于任意一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(5)逆事件的概率：对于任意一事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(6)加法公式：对于任意两个事件 A,B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，这条性质可以推广到多个事件，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是任意 n 个事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

五、古典概型

若随机试验 E 具有以下两个特点：

(1)样本空间(S)中只包含有限个样本点；

(2)试验中每个基本事件发生的可能性相同；

则称这类试验为等可能概型或古典概型.

在古典概型中，事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件总数}}.$$

六、条件概率

1. 条件概率的定义

设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

2. 乘法定理

设 $P(A)>0,P(B)>0$，则有

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B).$$

利用这个公式可以计算积事件的概率. 乘法公式可以推广到 n 个事件的情形.

若 $P(A_1,A_2,\cdots,A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1 \cdots A_{n-1}).$$

3. 划分的定义

设 S 为试验 E 的样本空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 E 的一组事件，若满足：

(1)$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$；

(2)$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S$；

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一个划分.

4. 全概率公式

设 S 为试验 E 的样本空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一个划分，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对 S 中的任意一个事件 B，都有

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n).$$

5. 贝叶斯公式

设 S 为试验 E 的样本空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一个划分，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，$P(B)>0$ 则

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)},i=1,2,\cdots,n.$$

七、独立性

1. 两个事件相互独立

若两事件 A,B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A,B 相互独立.

2. 两个事件相互独立的性质

(1)设 A,B 是两个事件，且 $P(A)>0$，若 A,B 相互独立，则 $P(B|A)=P(B)$.

(2)必然事件 S 与任意事件 A 相互独立；不可能事件$\varnothing$与任意事件 A 相互独立.

(3)若四对事件$\{A,B\}$，$\{\overline{A},B\}$，$\{A,\overline{B}\}$，$\{\overline{A},\overline{B}\}$中有一对是相互独立的，则另外三对也是相互独立的.

3. 多个事件相互独立

设 A,B,C 是三个事件，如果满足以下等式：

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称 A,B,C 相互独立.

一般，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n(n\geqslant 2)$个事件，如果对于其中任意 2 个、任意 3 个、任意 n 个事件的积事件的概率都等于各事件概率之积，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

由定义，可以得出以下两点推论：

(1)若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$相互独立，则其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$个事件也是相互独立的.

(2)若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$相互独立，则将 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立.

§2 典 型 例 题

一、样本空间、随机事件

例 1 设 A、B、C 为事件，试用 A、B、C 的运算来表示下列事件：

(1)A 发生，B、C 不发生；

(2)A、B、C 都发生；

(3)A、B、C都不发生；

(4)A、B、C至少一个有发生；

(5)A、B、C恰有一个发生；

(6)A、B、C不多于一个发生；

(7)A、B、C至少有两个发生；

(8)A、B、C中恰有两个发生.

解：(1)A发生，B、C不发生：$A\overline{B}\overline{C}$；

(2)A、B、C都发生：ABC；

(3)A、B、C都不发生：$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

(4)A、B、C至少一个有发生：$A\cup B\cup C$；

(5)A、B、C恰有一个发生：$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$；

(6)A、B、C不多于一个发生：$\overline{A}\overline{B}\cup\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{C}$

(或表示为：$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$)；

(7)A、B、C至少有两个发生：$AB\cup BC\cup AC$

(或表示为：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$)；

(8)A、B、C中恰有两个发生：$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.

例 2 掷一颗骰子的试验，观察出现的点数. 事件A表示"出现奇数点"，B表示"点数小于5"，C表示"小于5的偶数点". 试表示下列各事件：

$S,A,B,C,A\cup B,A-B,AB,AC,\overline{A}\cup B$.

解：$S=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，$C=\{2,4\}$，

$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$，$A-B=\{5\}$，$AB=\{1,3\}$，$AC=\varnothing$，$\overline{A}\cup B=\{1,2,3,4,6\}$.

例 3 设A、B、C为三个事件，已知$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，则$A$、$B$、$C$都不发生的概率是多少？

解：因为$ABC\subset AB$，所以有$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，因此$P(ABC)=0$. A、B、C都不发生的对立事件是A、B、C至少有一个发生，

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})&=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)]\\&=1-\left(\frac{1}{4}\times3-\frac{1}{16}\times2\right)=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

二、古典概型

例 1 两封信随机地投入到标号为1,2,3,4的四个邮筒中，求第2个邮筒恰好投入一封信的概率.

解：设$A=$"第2个邮筒恰好投入一封信"，两封信随机地投入四个邮筒，共有4^2种可能投法，若第2个邮筒恰好投入一封信，共有$C_2^1C_3^1$种投法. 由古典概型计算公式得

$$P(A)=\frac{C_2^1C_3^1}{4^2}=\frac{3}{8}.$$

例 2 口袋中装有 5 只白球和 4 只黑球，从中不放回地任取 3 只，求下列事件的概率：

(1)取到的都是白球；

(2)取到 2 只白球、1 只黑球.

解：从 9 只球中任取 3 只，共有 C_9^3种不同的取法.

(1)设 A=“取到的都是白球”，事件 A 包含的样本点数为 C_5^3，$P(A)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{5}{42}$.

(2)设 B=“取到 2 只白球 1 只黑球”，B 所包含的样本点数为 $C_5^2C_4^1$，$P(B)=\frac{C_5^2C_4^1}{C_9^3}=\frac{10}{21}$.

本例的取球方式是“不放回式”，若将其改为“放回式”抽取，则

$$P(A)=\frac{5^3}{9^3},P(B)=\frac{5^2\times 4}{9^3},$$

请读者自己思考.

例 3 将 3 个球随机地放入 3 个盒子中去，问：

(1)每盒恰有一球的概率是多少？

(2)空一盒的概率是多少？

解：设 A=“每盒恰有一球”，B=“空一盒”.

(1)样本空间中的样本点总数是 3^3，事件 A 包含的样本点数是 $3!$，故每盒恰有一球的概率是 $P(A)=\frac{2}{9}$.

(2)解法一：用对立事件.

$$P(B)=1-P\{\text{空两盒}\}-P\{\text{全有球}\}=1-\frac{3}{3^3}-\frac{2}{9}=\frac{2}{3}.$$

解法二：空一盒相当于两球一起放在一个盒子中，另一球单独放在另一个盒子中.

$$P(B)=\frac{C_3^2\times 3\times 2}{3^3}=\frac{2}{3}.$$

解法三：空一盒包括 1 号盒空、2 号盒空、3 号盒空且其余两盒全满这三种情况.

$$P(B)=\frac{3\times(2^3-2)}{3^3}=\frac{2}{3}.$$

所以每盒恰有一球的概率为 2/9；空一盒的概率是 2/3.

例 4 从 6 双不同的鞋子中任取 4 只，问这 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率是多少？

解：设事件 A=“4 只鞋子中至少有 2 只配成一双”.

考虑其对立事件 $\overline{A}$=“4 只鞋子全配不成对”，从 6 双鞋子中任取 4 双，再从每双中任取 1 只，有 $C_6^4\cdot 2^4$ 种取法，从 6 双鞋子中取 4 只有 C_{12}^4种取法.

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_6^4\cdot 2^4}{C_{12}^4}=\frac{17}{33}.$$

例 5 从 1～10 这 10 个整数中任取 3 个数，求：(1)最小号码是 5 的概率，(2)最大号码是 5 的概率.

解:从 1～10 这 10 个整数中任取 3 个数共有 C_{10}^3种取法,记 A="最小号码是 5",B="最大号码是 5".

(1)因选到的最小号码是 5,则其余的两个号码都大于 5,它们可以从 6～10 这 5 个数中选取,共有 C_5^2种取法,所以

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3};$$

(2)同理, $$P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}.$$

例 6 把 C、C、E、E、I、N、S 七个字母分别写在七张同样的卡片上,并且将卡片放入同一盒中,现从盒中任意一张一张地将卡片取出,并将其按取到的顺序排成一列,假设排列结果恰好拼成一个英文单词:S C I E N C E. 问:在多大程度上认为这样的结果是奇怪的,甚至怀疑是一种魔术?

解:七个字母的排列总数为 7!. 拼成英文单词 SCIENCE 的情况数为

$$2\times 2=4,$$

故该结果出现的概率为 $$P=\frac{4}{7!}=\frac{1}{1260}\approx 0.00079.$$

这个概率很小,这里算出的概率有如下的实际意义:如果多次重复这一抽卡试验,则所关心的事件在 1260 次试验中大约出现 1 次.

这样小概率的事件在一次抽卡的试验中就发生了,有比较大的把握怀疑这是魔术.

例 7 设有 n 个人,每个人都有可能被分配到 N 个房间中的任何一间去住($n\leqslant N$),求下列事件的概率:

(1)指定的 n 个房间各有一个人住;

(2)恰好有 n 个房间,其中各住一人.

解:设事件 A="指定的 n 个房间各有一个人住",事件 B="恰好有 n 个房间,其中各住一人". n 个人分配到 N 个房间中,每个人都有 N 个房间可供选择,n 个人可住的方式共有 N^n 种.

(1)指定的 n 个房间各有一个人住,其可能总数为 n 个人的全排列 $n!$,所以

$$P(A)=\frac{n!}{N^n};$$

(2)在 N 个房间中任意选取 n 个,共有 C_N^n种,对于选定的 n 个房间,有 $n!$ 种分配方式,由乘法原理得恰有 n 个房间各住一人的情况为 $C_N^n\cdot n!$ 种,所以

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}.$$

三、条件概率

例 1 设某种动物由出生算起活到 20 年以上的概率为 0.8,活到 25 年以上的概率为 0.4. 问现年 20 岁的这种动物,能活到 25 岁以上的概率是多少?

解:设 A="能活 20 年以上",B="能活 25 年以上",显然 $AB=B$. 依题意,

$$P(A)=0.8, P(B)=0.4.$$

由条件概率的公式得 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=0.5.$$

例 2 已知 $P(\bar{B}|A)=\frac{1}{3}, P(AB)=\frac{1}{5}$，求 $P(A)$.

解：由条件概率定义得 $P(\bar{B}|A)=\frac{P(A\bar{B})}{P(A)}$，而 $A\bar{B}=A-AB$，所以

$$P(\bar{B}\mid A)=\frac{P(A)-P(AB)}{P(A)},$$

代入数值得 $$\frac{P(A)-\frac{1}{5}}{P(A)}=\frac{1}{3},$$

解得 $$P(A)=\frac{1}{3}.$$

例 3 某商店搞抽奖活动，顾客需过三关，第 i 关从装有 $i+1$ 个白球和一个黑球的袋子中抽取一只，抽到黑球即过关，连过三关者可拿到一等奖. 求顾客能拿到一等奖的概率.

解：设 A_i＝"顾客在第 i 关通过"；B＝ "顾客能拿到一等奖"，所以

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\\&=\frac{1}{60},\end{aligned}$$

即顾客能拿到一等奖的概率为$\frac{1}{60}$.

例 4 设某公司库存的一批产品，已知其中 50%、30%、20%依次是甲、乙、丙厂生产的，且甲、乙、丙厂产品的次品率分别为$\frac{1}{10}$、$\frac{1}{15}$、$\frac{1}{20}$，现从这批产品中任取一件，求取得次品的概率?

解：设 A_1、A_2、A_3 分别表示"取得的这件产品是甲、乙、丙厂生产的"；设 B 表示"取得的产品为次品"，于是

$$P(A_1)=\frac{5}{10}, P(A_2)=\frac{3}{10}, P(A_3)=\frac{2}{10},$$

$$P(B\mid A_1)=\frac{1}{10}, P(B\mid A_2)=\frac{1}{15}, P(B\mid A_3)=\frac{1}{20};$$

由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)\\&=\frac{1}{10}\times\frac{5}{10}+\frac{1}{15}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{20}\times\frac{2}{10}=0.08.\end{aligned}$$

例 5 某小组有 20 名射手，其中一、二、三、四级射手分别为 2、6、9、3 名. 又若选一、二、三、四级射手参加比赛，则在比赛中射中目标的概率分别为 0.85、0.64、0.45、0.32，今随机选

一人参加比赛，试求该小组在比赛中射中目标的概率.

解：设 B="该小组在比赛中射中目标"，A_i="选 i 级射手参加比赛"，$i=1,2,3,4$，由全概率公式，有

$$
\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{n=1}^{4} P(A_n)P(B|A_n) \\
&= \frac{2}{20}\times 0.85+\frac{6}{20}\times 0.64+\frac{9}{20}\times 0.45+\frac{3}{20}\times 0.32 \\
&= 0.5275.
\end{aligned}
$$

例 6 已知 $P(A)=0.4, P(B|A)=0.5, P(B|\overline{A})=0.3$，求 $P(B)$.

解：A 与 $\overline{A}$ 可以看作样本空间 S 的一个划分，对于某个事件 B，由全概率公式得

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(B \mid A)P(A)+P(B \mid \overline{A})P(\overline{A}) \\
&= 0.4\times 0.5+(1-0.4)\times 0.3 \\
&= 0.38.
\end{aligned}
$$

例 7 已知某种疾病的发病率为 0.1%，该种疾病患者一个月内的死亡率为 90%；且知未患该种疾病的人一个月以内的死亡率为 0.1%；现从人群中任意抽取一人，问此人在一个月内死亡的概率是多少？若已知此人在一个月内死亡，则此人是因该种疾病致死的概率为多少？

解：设 A="某人在一个月内死亡"，B="某人患有该种疾病"，则由全概率公式得

$$P(A)=P(A \mid B)P(B)+P(A \mid \overline{B})P(\overline{B})\approx 0.002,$$

由贝叶斯公式得

$$
\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})} \\
&= \frac{0.9\times 0.001}{0.002}=0.45.
\end{aligned}
$$

四、独立性

例 1 三人独立地破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为 1/5，1/3，1/4，问三人中至少有一人能将密码译出的概率是多少？

解：将三人编号为 1，2，3，记 A_i="第 i 个人破译出密码"，$i=1,2,3$，

则

$$P(A_1)=\frac{1}{5}, P(A_2)=\frac{1}{3}, P(A_3)=\frac{1}{4},$$

$$
\begin{aligned}
P(A_1\cup A_2\cup A_3) &= 1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) \\
&= 1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) \\
&= 1-(1-P(A_1))(1-P(A_2))(1-P(A_3)) \\
&= 1-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}.
\end{aligned}
$$

例 2 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击，三人击中的概率分别为 0.4、0.5、0.7. 飞机被一人击中而击落的概率为 0.2，被两人击中而击落的概率为 0.6，若三人都击中，飞机必定被击落，求飞机被击落的概率.

解:设 A_i 表示"有 i 个人击中飞机",$i=1,2,3$,A,B,C 分别表示甲、乙、丙击中飞机,则

$$P(A)=0.4, P(B)=0.5, P(C)=0.7.$$

由 $A_1=A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$,得

$$\begin{aligned}P(A_1)&=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)\\&=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7\\&=0.36.\end{aligned}$$

由 $A_2=AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$,得

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)\\&=P(A)P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(B)P(C)\\&=0.41.\end{aligned}$$

由 $A_3=ABC$,得

$$\begin{aligned}P(A_3)&=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\\&=0.4\times0.5\times0.7\\&=0.14.\end{aligned}$$

因而,由全概率公式得飞机被击落的概率为

$$\begin{aligned}P&=0.2\times0.36+0.6\times0.41+1\times0.14\\&=0.458.\end{aligned}$$

例 3 一个均匀的正四面体,其第一面染成红色,第二面染成白色,第三面染成黑色,而第四面同时染上红、白、黑三种颜色. 现以 A,B,C 分别记投一次四面体出现红、白、黑颜色朝下的事件,问 A,B,C 是否相互独立?

解:由于在四面体中红、白、黑分别出现两面,所以

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},$$

又由题意知 $P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}$,故有

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{4},$$

$$P(BC)=P(B)P(C)=\frac{1}{4},$$

$$P(AC)=P(A)P(C)=\frac{1}{4},$$

则三事件 A,B,C 两两独立.

而
$$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C),$$

因此 A,B,C 不相互独立.

§3　教材习题详解

习题　1-1

1. 多项选择题：

(1)以下命题正确的是[　　].

A. $(AB)\cup(A\overline{B})=A$；　　B. 若 $A\subset B$，则 $AB=A$；

C. 若 $A\subset B$，则 $\overline{B}\subset\overline{A}$；　　D. 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$.

解：ABCD .

(2)某大学的学生做了三道概率题，以 A_i 表示“第 i 题做对了”$(i=1,2,3)$，则该生至少做对了两道题的事件可表示为[　　].

A. $\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}$；　　B. $A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_3A_1$；

C. $\overline{A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_3A_1}$；　　D. $A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1A_2A_3$.

解：BD.

2. A、B、C 为三个事件，说明下述运算关系的含义：

(1)A；　(2)$\overline{B}\,\overline{C}$；　(3)$A\overline{B}\,\overline{C}$；　(4)$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；　(5)$A\cup B\cup C$；　(6)$\overline{ABC}$.

解：(1)A 事件发生；(2)B,C 事件不发生；(3)A 事件发生，而 B,C 事件不发生；(4)A,B,C 都不发生；(5)A,B,C 至少有一个发生；(6)A,B,C 不同时发生.

3. 某机械厂生产的三个零件，以 A_i 和 $\overline{A}_i(i=1,2,3)$分别表示它生产的第 i 个零件为正品和次品. 试用 A_i 与 $\overline{A}_i(i=1,2,3)$表示以下事件：(1)全是正品；(2)至少有一个零件是次品；(3)恰有一个零件是次品；(4)至少有两个零件是次品.

解：(1)三个零件全是正品表示为 $A_1A_2A_3$；

(2)至少有一个零件是次品表示为$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$；

(3)恰有一个零件是次品表示为$\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}$；

(4)至少有两个零件是次品表示为$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cup\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_3}$.

4. 从 4 个白球、6 个黄球、3 个黑球中任取 2 白、2 黄、1 黑共 5 个球，有几种取法？

解：从 4 个白球中取 2 个球有 C_4^2种取法，从 6 个黄球中取 2 个球有 C_6^2 种取法，从 3 个黑球中取 1 个球有 C_3^1 种取法. 由乘法原理知从 4 个白球 6 个黄球 3 个黑球中任取 2 白 2 黄 1 黑共 5 个球的取法有 $C_4^2C_6^2C_3^1$种.

5. 将 3 个小球任意放入 5 个口袋中，不同的放法共有多少种？

解：将 3 个小球任意放入 5 个口袋中，每只球都有 5 种不同的放法，3 只球放入 5 个口袋中共有 5^3 种放法.

6. 20 件产品中有 12 件产品是次品，从中任取 8 件，取出的 8 件产品中，次品可能有几件？

解：取出的 8 件产品中，次品件数可能有 0,1,2,3,4,5,6,7,8 这九种可能的情况.

7. 6 件产品中有 3 件次品，每次从中任取 1 件，直到取到次品为止，可能需要取几件产品？

解：6 件产品中有 3 件次品，每次从中任取 1 件，直到取到次品为止，需要取的产品件数为 1,2,3,4 这四种可能的情况.