中学数理化发展智能丛书

怎样学好高一代数

周长生 常相舜
刘 坤 谢长青
编著

中学数理化发展智能丛书

怎样学好高一代数

周长生 常相舜 刘 坤 编著

河南科学技术出版社

中学数理化发展智能丛书
怎样学好高一代数
周长生　常相舜　刘　坤　编著

责任编辑　孙允萍

河南科学技术出版社出版
河南郑州解东印刷厂印刷
河南省新华书店发行

787×1092　32开　11.25印张　224千字
1990年2月第1版　1990年2月第1次印刷
印数：1—11,190册
ISBN7-5349-0560-5/G·560

定价：4.20元

本册说明

初中代数的基本内容可以概括为这样两部分，第一是代数式的恒等变形，第二是方程和方程组的同解变形，有了这两个方面的知识作基础，就可以研究具有广泛应用的函数．在初中代数里，我们已经学了函数的概念，并且研究了三个重要的函数，就是正比例函数、反比例函数和一次函数．在高中代数里，我们还要继续研究一些重要的函数．这一册书将要研究的函数有四个，就是二次函数、幂函数、指数函数和对数函数．不过，需要指出，在研究这些函数之前，我们还要着重讲讲函数的概念．说到这里，大家自然会提出问题：在初中代数里，我们不是已经学了函数的概念吗？为什么在高中代数里还要讲这个呢？这是因为，初中代数里的函数概念是用“变化”的观点表述的．现行初中代数教材关于函数的定义是：设在某变化过程中有两个变量 x，y，如果对于 x 在某一范围内的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与它对应，那么就说 y 是 x 的函数．这样，用变化的观点定义函数，强调自变量 x 和函数 y 的连续不断的变化的过程，就是当自变量 x 在连续不断的变化的过程中，函数 y 是如何随着 x 的变化而变化的．表述函数的这一观点是上百年以

前的事了，除了这个观点以外，表述函数还有另外一种观点，就是“集合”和“映射”，这是近代函数的观点。这两种观点，有什么区别呢？用近代的函数观点研究函数有什么好处呢？近代的函数观点，它的意义更为广泛，它能说明的问题更多，有些不具有变化的事实也可以用函数的观点去说明。就是说，变化的观点表述的函数同集合的观点表述的函数相比，前者的范围小，后者的范围广大，后者包括前者。事实上，用“集合”表述的近代函数观点是对用“变化”表述的函数观点的一个重大的发展。高中代数就是用这种观点解释函数的。所以，在这一册书里，研究函数之前

近代函数的概念。为了这个目的，这一册书先讲“集合”然后再讲“映射”，接下去是函数。但是，需要指出，集合，除了用于函数以外，在数学里它还有更多的用处。

目　录

第一章　集合与对应，真命题与假命题

一、集　　合

1.1[*]　集　　合

1.1.1[**]　集合的引入

对我们来说，“集合”不是一个陌生的字眼，在初中数学里，曾多次应用它，例如，“自然数的集合”、“有理数的集合”、“某一个方程的解的集合”、“到定点的距离等于定长的所有点的集合”等等。但是，到底什么是集合以及为什么要讲集合呢？以前我们并没有回答过。这一节就来研究这个问题。

大家知道，数学研究的内容有两个方面，一个是形（指图形），一个是数。当我们研究形和数时，并不是孤立地去研究某一个特定的图形或某一个特定的数，而是去研究某一类具有共同属性的形或数，比如，我们研究的三角形，就是包括大大小小的各种不同形状的一切三角形，我们研究的自然

---

[*] 1.1 表示第一章第一节；

[**] 1.1.1 表示第一章第一节第一小节。

数，也是指1、2、3等所有的自然数。就是说，我们总是把要研究的许多对象联合在一起而把它们看做一个总体或者整体去考虑。因此，我们学过的三角形、四边形、圆、自然数、有理数、实数等等，事实上都是指的包括许多对象在内的一个总体。对于这样的总体，在数学里，我们给它一个名称就叫做集合（简称集）。例如，把每一个自然数作为对象，而由所有的自然数组成的整体就叫自然数集合，由方程 $x^2-7x+12=0$ 的每一个解为对象而组成的整体就叫方程 $x^2-7x+12=0$ 的解的集合。

对于集合里的每一个对象，我们也给它一个名称就叫做**元素**。例如，2是自然数集合的一个元素，$\frac{2}{3}$是有理数集合的一个元素，$\sqrt{2}$是实数集合的一个元素，5是方程 $x^2-8x+15=0$ 的解的集合中的一个元素等等。

根据以上简略的叙述，关于什么是集合以及为什么要研究集合，这两个问题也就都回答了。

但是，需要指出，在上面的叙述中，我们并没有给出集合的定义，集合，只是我们对（一些对象所组成的）“总体”所起的一个名称。容易看出，要想给“总体”或“整体”这些概念下一个定义是很困难的，所以，就像几何中的点、直线、平面一样，集合也是数学里的一个不定义的概念。

思 考 题

集合的元素是不是只能是形或数呢？

我们知道，集合的提出是由于这样一种需要：把要研究的一群对象看做一个总体，至于所研究的对象究竟是什么东西并没有限定．所以，集合中的元素可以是图形，可以是数，也可以是其他的对象．例如，中国的直辖市就可以看做一个集合，其中有三个元素，就是北京、上海、天津；太阳系的行星也可当成一个集合，其中有九个元素，就是，水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、冥王星、海王星；中国古代在技术上的四大发明，从总体看也是一个集合，其中的元素是火药、指南针、造纸、印刷术．

事实上，对于日常生活中的许多概念，人们也都是从集合的角度去看待的，比方，当我们说“人能思维”的时候，这里所说的“人”，就是包括每一个人在内的一个总体，即由人组成的一个集合．因此，飞机、大炮、桌子、椅子、马、牛、羊等等，事实上，都是集合．

所以，由集合的意义可以看出，集合中的元素可以是任何事物．

1.1.2 集合的记号

我们规定用花括号“{ }”作为集合的记号，而把它的元素写在花括号里面．

例如，由十个数码组成的集合，可以写成：

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

用逗号“，”把每一个元素隔开．

又如，由6的所有约数组成的集合，可以写成：

$\{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$。

又如，由方程$x^2-3x+2=0$的所有解组成的集合可以写成：

$\{1, 2\}$。

又如，雨后的彩虹由七种颜色所组成，把它看成一个集合，可以写成：

{红，橙，黄，绿，青，蓝，紫}.

其中每一种颜色都是这个集合的元素。

又如，把我国的直辖市看成一个集合，可以写成：

{北京，天津，上海}.

为了简便起见，通常也用大写字母作为集合的记号。这样，上面列举的五个集合，可以分别记做：

$A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$；

$B=\{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$；

$C=\{1, 2\}$；

$D=${红，橙，黄，绿，青，蓝，紫}；

$E=${北京，天津，上海}.

我们知道，集合是指由一些对象（元素）组成的总体，因此，集合和集合中的元素是两个不同的概念。就好像高一(1)班和高一(1)班的学生是两个不同的概念是一样的，高一(1)班指的集合，高一(1)班的学生是组成这个集合的元素．一般地说，当a是某一个集合A的一个元素* 时，我们就说

* 集合的元素常用小写字母表示。

"元素 a 属于集合 A"，并记作

$$a \in A.$$

读作"a 属于 A"．

当 b 不是某一个集合 A 的元素时，我们就说"b 不属于集合 A"，并记作

$$b \notin A.$$

读作"b 不属于 A"．

例如，在上面的例子中，有：

$0 \in A$，$2 \in B$，$1 \in C$，红 $\in D$，上海 $\in E$．

$-2 \notin A$，$7 \notin B$，$\frac{2}{3} \notin C$，白 $\notin D$，郑州 $\notin E$．

练 习 1.1

1．试举出 5 个集合的例子．

2．用花括号写出下列各集合的元素：

（1）由小于 5 的所有自然数组成的集合；

（2）由 8 的所有正约数组成的集合；

（3）由大于 2 并且小于10的所有奇数组成的集合；

（4）由大于 3 同时小于15的所有偶数组成的集合；

（5）由大于 2 且小于20的所有能被 3 整除的整数组成的集合；

（6）由方程 $x^4-7x^2+12=0$ 的所有解组成的集合．

3．用"$\in$"或"$\notin$"填空：

（1）已知 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，那么：1 ____ A， 4 ____ A，6 ____ A，7 ____ A；

（2）已知$B=\{$语文，数学，物理，化学$\}$，那么：语文 ____ B，数学 ____ B，地理 ____ B；

（3）已知 $M=\{a, b, c, d, e\}$，那么：a ____ M，c ____ M，g ____ M；

（4）设A代表由所有两位数组成的集合，则：25 ____ A，5 ____ A，101 ____ A。

1.1.3 有限集和无限集

从前面列举的例子可以看出，集合中的元素的个数，可以是有限个，也可以是无数多个。含有有限个元素的集合叫做**有限集**，含有无数多个元素的集合叫做**无限集**。

练 习 1.1

4.在下列集合中，哪些是有限集？哪些是无限集？

（1）全体自然数的集合；

（2）由所有有理数组成的集合；

（3）由全部英文字母组成的集合；

（4）由所有中国的省会组成的集合；

（5）由已知线段AB上的所有点组成的集合；

（6）由通过点A的所有直线组成的集合；

（7）由通过A、B两点的所有直线组成的集合；

（8）五口之家（把一个有五人组成的家庭看做一个集合）；

(9) 一口之家；

(10) $\{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\cdots\}$；

(11) $\{a, b, c\}$；

(12) $\{a\}$。

5.方程$x+y=1$的解集是有限集还是无限集？

需要指出，a和$\{a\}$是两个不相同记号，$\{a\}$表示一个集合，而a是这个集合的一个元素。容易看出，集合$\{a\}$只含有一个元素，这样的集合也叫做**单元素集**。一口之家就是一个单元素集，方程 $2x-5=0$ 的解集也是一个单元素集。

思　考　题

1.解方程的含义是什么？

2.在实数范围内，方程$x^2-1=0$的解集有几个元素？方程$x^2+1=0$的解集呢？

3.我们知道，解方程有两种情形，或者有解，或者无解。有解时，我们可用解集来表述解的总体，无解时，是否也可以用解集来说明问题呢？

没有任何元素的集合叫做**空集**，通常用符号ϕ表示空集，例如，在实数范围内，方程$x^2+1=0$的解集是ϕ。

练　习 1.1

6.我们知道，方程$x^2-4x+3=0$的解集是$\{1, 3\}$，方程

$x-5=0$的解集是$\{5\}$，方程$3x=0$的解集是$\{0\}$，$\{0\}$ 是不是空集呢？或$\{0\}$是不是ϕ呢？

7.ϕ既表示空集，那么“$0\in\phi$”的写法正确吗？

8.要说“ϕ中元素的个数是 0 ”可不可以呢？

有几个重要的数集，分别用特定的字母来表示，现列举如下：

全体自然数的集合通常称自然数集，记作N。

全体整数的集合通常称**整数集**，记作Z.

全体有理数的集合通常称**有理数集**，记作Q.

全体实数的集合通常称实数集，记作R.

为了方便起见，有时我们还用 R^+ 表示全体正实数的集合，用Q^{-1}表示全体负有理数的集合，等等.

练　习 1.1

9.用$\in$或$\notin$填空：

2 ____ N, 0 ____ N, -1 ____ N, $\sqrt{3}$ ____ N,

2 ____ Z, 0 ____ Z, -1 ____ Z, $\sqrt{3}$ ____ Z,

2 ____ Q, 0 ____ Q, -1 ____ Q, $\sqrt{3}$ ____ Q,

2 ____ R, 0 ____ R, -1 ____ R, $\sqrt{3}$ ____ R,

2 ____ R^-, 0 ____ R^+, -1 ____ $\overline{R^-}$, $\sqrt{3}$ ____ $\overline{R^-}$.

10.判断下列各命题是否正确，对正确的在后面括号内画“$\surd$”，对不正确的画“$\times$”.

（1）$0\in N$；（　　）　　　　（2）$0\in\overline{R^-}$；（　　）

(3) $\pi \in R^+$；(　　)　　(4) $\frac{2}{3} \in Q$；(　　)

(5) 2不同于$\{2\}$；(　　)　(6) $2 \notin \{2\}$。(　　)

今后，我们把这样的题目简称为“判断题”。

1.1.4　三点说明

研究集合，主要着眼于其中元素的共同属性，因此，对于集合的元素需要做出三点说明。

1.集合中的元素是**无序的**。例如，当我们想了解某一班是由哪些个学生组成时，这个问题与学生的座次是没有关系的，又如，方程 $(x-5)(x-2)(x-8)=0$ 的解集有三个元素，5、2、8，这三个数的顺序无论怎样安排，从求方程的解来说，是没有任何影响的。因此，$\{5, 2, 8\}$、$\{2, 5, 8\}$、$\{8, 2, 5\}$都是同一个集合。这就是集合中元素的无序性。

2.集合中的元素是**互异的**。就是说，集合中的元素不允许重复出现，例如，$\{a, a, b, c\}$ 和 $\{a, b, c\}$都是由三个元素a、b、c组成的集合。这个集合通常不写成$\{a, a, b, c\}$而写成$\{a, b, c\}$。事实上，只有对不同的对象研究它们的共同属性才有理论价值和应用价值。

3.集合中的元素是**确定的**。现在我们不妨来考虑这样一个问题：把我们班上的高个子的同学做为元素能不能构成一个集合呢？乍一看，好像这是一个不成问题的问题，答案应该是肯定的。实际上，这是办不到的，因为“高个子”并没