清华北大学子

高效学习法

中国第一套
杂志式教辅

讲述学习和考试的方法

配套人民教育出版社实验教科书
——A版

高中数学 选修2-2

主 编 薛金星

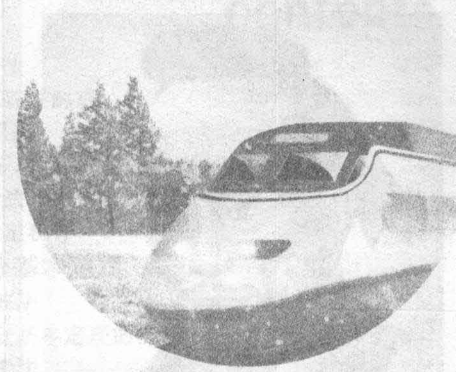
祖冲之（429—500）

贡献 在世界数学史上第一次将圆周率（π）值计算到小数点后七位；编制了《大明历》。
影响 揭开了中国古代历法改革的新一页。
赞誉 杰出的数学家、天文学家、机械专家。
名言 愿闻显据，以核理实。浮辞虚贬，窃非所惧。

团结出版社
北京二十一世纪金星教育科技有限公司研发

卷首语

juanshouyu



承受是一种力度

□文/张新宏

人类本质上的沉重感，主要源自于责任，期盼和压力。因而，承受便是生命的一种需要和方式了。

我们不可能也决不能无任何负载地来往于世，作为人必须有所承受，承受我们需要承受的东西。在理想的王国里，我们承受亲人故人寄予的热望和要求；在生活路途上，我们承受着来自世俗的各种恶意与善待；在情感的海洋里，我们承受着人生变故中的各种打击和煎熬。我们承受着，承受着风霜雨雪，也承受着鲜花硕果。承受是一种力度和气度；是一种坦然的接纳和始终清醒的生命理念；是为实现自我的一种收敛，是为寻求迸发所做的自我蓄结。对人生的幸福和苦难而言，没有超越自我的气概，内视自守的精神品质，就不会在苦难的胁迫下，保持一个谈笑自如的我；没有对世情的彻悟，洒脱的生命情怀，也就不会在幸福的裹挟下，保持一个恬淡平和的心境。

一个真正能够迎接和承受各种人生际遇和挑战的人，绝不是气量狭小的平庸之徒，他可能会忧郁，但灵魂的天空不会黑云压城；他也许会兴奋，但热泪盈盈中他不会因此迷失方

一个善于承受，[illegible]显得沉稳，但人生却因此丰富和深厚。承受了阳光，就有了鲜花硕果；承受了巨浪，就有了登临彼岸时的放松释然；承受了炼狱之痛，就有了获得新生的欢欣和感悟。承受的结果，是一种对灵魂的提升，道德的修炼，能量的聚集，每一次承受，无不宣泄和张扬着深厚博大的人格魅力。承受是一种精神，是人生苦涩而美丽的一番心境。不论你愿意与否，生活本身的内容，决定了我们终将是山，是海，是那只踽踽独行，默默跋涉的戈壁骆驼，终将以胸怀以肩膀去承受生活的各种施加。

生为人，我们需要承受，只有承受。

主　　编　薛金星
本册主编　王晓丽
本册编委　张洪伟
　　　　　王浩允

图书邮购热线：(010)61743009　61767818
图书邮购地址：北京市天通苑邮局 6503 号信箱
邮政编码：102218
图书邮购网址：http://www.firstedubook.com
质量监督热线：(0536)2223237
集团网站：http://www.jxedue.net
金星教学考试网：http://www.jxjxks.com

目　录

第一章　导数及其应用

1.1　变化率与导数

1.1.1　变化率问题　1
重难点突破法　1
妙用“变化率”解决三类问题　1
易错点辨析法　2
正确理解函数的平均变化率　2
高效能解题法　2
巧用变化率探究切线问题　2
零距离备考法　3
透视高考试题中的函数变化率问题　3

1.1.2　导数的概念　4
重难点突破法　4
妙用定义巧解题　4
易错点辨析法　4
初学导数的两个常犯错误　4
高效能解题法　5
点击四类导数问题　5
零距离备考法　6
高考中的导数概念及应用　6

1.1.3　导数的几何意义　6
重难点突破法　6
例谈导数几何意义的三个实际应用　6
易错点辨析法　7
警惕导数解题中的“两个忽视”　7
例析用导数求切线方程的误区　8
高效能解题法　8
妙用导数几何意义求解四类常见问题　8
例析导数的几何意义及其妙用　9
零距离备考法　10
聚焦考题看导数的几何意义　10

1.2　导数的计算

1.2.1　几个常用函数的导数　10
1.2.2　基本初等函数的导数公式及导数的运算法则　10
重难点突破法　10
循序渐进学习函数求导运算　10
求导运算时的两点注意　11
例析复合函数求导　11
易错点辨析法　12
导数运用中的易错点　12
导数运算中的四类常见错解　13
高效能解题法　14
例谈三类特殊函数的求导　14
点击求导的四个运算技巧　14
巧用导数妙求参数　15
零距离备考法　15
高考中的导数计算　15

contents

1.3 导数在研究函数中的应用

1.3.1 函数的单调性与导数 16

重难点突破法 16

利用导数求解函数的单调性 16

易错点辨析法 17

求解函数单调性的三类错解反思 17

函数单调性的错误例析 17

高效能解题法 18

分类讨论思想在函数单调性问题中的应用 18

活用导数,妙求参数范围 19

零距离备考法 20

涉及导数与函数单调性的三类高考题 20

1.3.2 函数的极值与导数 21

重难点突破法 21

初探函数极值的概念 21

易错点辨析法 21

初学函数极值的两种常犯错误 21

高效能解题法 22

例谈求函数极值的步骤 22

函数极值的两种重要题型 22

零距离备考法 23

数学思想方法在极值问题中的体现 23

1.3.3 函数的最大(小)值与导数 24

重难点突破法 24

"五步法"求解最值问题 24

易错点辨析法 25

辨析函数的最值与极值 25

高效能解题法 26

函数在开、闭区间上的最值问题 26

例析函数最值的三个应用 26

零距离备考法 27

聚焦高考看导数在函数中的应用 27

1.4 生活中的优化问题举例

重难点突破法 28

如何利用导数解决生活中的优化问题 28

易错点辨析法 29

求解生活中优化问题的思维误区分析 29

高效能解题法 30

导数与生活中的五类优化问题 30

零距离备考法 31

直面高考中的优化问题 31

1.5 定积分的概念

重难点突破法 33

与定积分概念相关的三个知识点 33

巧用定积分的几何意义 33

易错点辨析法 34

两问为你答疑解惑 34

高效能解题法 34

体验"四步曲"解定积分 34

零距离备考法 35

高考中的定积分 35

1.6 微积分基本定理

重难点突破法 36

谈微积分基本定理的活用 36

易错点辨析法 36

剖析定积分计算中的常见错误 36

高效能解题法 38

定积分求解中的四个技巧 38

定积分问题分类解析 39

零距离备考法 39

直击高考中的定积分及运算 39

1.7 定积分的简单应用

重难点突破法 40

利用定积分求面积的步骤 40

定积分在物理中的应用举例 41

易错点辨析法 41

定积分应用中的思维误区分析 41

高效能解题法 42

数学思想在定积分中的体现 42

零距离备考法 43

定积分与微积分高考题聚焦 43

本章复习法

本章知识网络 44

牢记求导三个方面破解积分的运算问题 44

高考中导数的交汇问题 45

参数范围问题的导数解法 45

导函数与原函数图象的交汇三类型 46

由高考看导数的学习 47

导数工具何时用 48

本章高效达标

第二章 推理与证明

2.1 合情推理与演绎推理

2.1.1 合情推理 50

重难点突破法 50

巧用性质活用类比 50

归纳推理的要点是发现规律 50

易错点辨析法 51

归纳推理与类比推理一样吗 51

类比路上险重重 52

高效能解题法 52

高中数学中四类类比推理 52

归纳推理的两个基本类型 53

零距离备考法 54

高考中的合情推理 54

contents

2.1.2 演绎推理 55
重难点突破法 55
演绎推理及其构成 55
易错点辨析法 56
剖析推理的三个误区 56
三段论推理正误对比 57
高效能解题法 58
三段论在数学证明中的应用 58
零距离备考法 58
高考中的合情推理与演绎推理 58
透过考题学推理 59
2.2 直接证明与间接证明
2.2.1 综合法和分析法 60
重难点突破法 60
直接证明的两种方法 60
易错点辨析法 61
综合法与分析法的比较 61
高效能解题法 61
分析法的证明策略及应用 61
运用综合法求解三类问题 62
分析法证明三角函数 62
零距离备考法 63
例析高考中的分析法与综合法 63
2.2.2 反证法 65
重难点突破法 65
反证法的应用及步骤 65
反证法中的三类"矛盾" 65
易错点辨析法 66
反证法证明中的常见雷区 66
高效能解题法 66
例析反证法的应用 66
零距离备考法 67
直击高考中的反证法 67
2.3 数学归纳法
重难点突破法 68
解读数学归纳法 68
逆向思考 破解难点 69
当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,必须从 $n=1$ 归纳吗 69
易错点辨析法 70
设而不用也是错 70
运用数学归纳法的两个误区 70
高效能解题法 71
放缩法在数学归纳法中的应用 71
例谈数学归纳法的三个应用 71
零距离备考法 73
高考中的数学归纳法 73
本章复习法
本章知识网络 74
浅谈探索型问题的解决 74
参透推理奥妙,方能得心应手 74
例析推理与证明中的思想方法 75
推理与证明新题速递 76
本章高效达标
第三章 数系的扩充与复数的引入
3.1 数系的扩充和复数的概念
3.1.1 数系的扩充和复数的概念 79
重难点突破法 79
理清概念巧解题 79
易错点辨析法 79
复数中的思维陷阱 79
高效能解题法 80
解析复数概念的四种题型 80
零距离备考法 81
高考试题面对面 81
3.1.2 复数的几何意义 81
重难点突破法 81
解读复数的几何意义 81
易错点辨析法 82
有关复数几何意义的思维陷阱 82
高效能解题法 82
聚焦复数的几何意义 82
零距离备考法 83
巧用几何意义妙解复数问题 83
3.2 复数代数形式的四则运算
重难点突破法 83
例谈共轭复数及其应用 83
复数代数形式的运算知识小结 84
易错点辨析法 84
复数中的三个易错点剖析 84
高效能解题法 85
活解复数四则运算问题的四个策略 85
例说复数解题六法 86
零距离备考法 87
高考中复数问题的解法初探 87
本章复习法
本章知识网络 87
复数运算中的简化策略 87
与复数有关的创新型问题 88
复数系中的一元二次方程问题 89
分类解析复数与三角函数的交汇 89
回顾复数要点,体会知识运用 90

第一章 导数及其应用

1.1 变化率与导数

1.1.1 变化率问题

重难点突破法

妙用"变化率"解决三类问题

变化率是导数学习中首先接触的一个概念,深入理解变化率是学好导数的前提.

1. 速度的大小比较

例 1 甲、乙两人走过的路程 $s_1(t)$、$s_2(t)$与时间 t 的关系如图 1-1-1,试比较两人的速度哪个快.

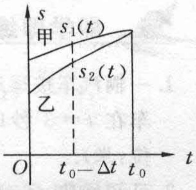


图 1-1-1

解:由图 1-1-1 知,在相同的时间 Δt 内,两人走过的路程在 t_0 处 $s_1(t_0)=s_2(t_0)$,但 $\frac{s_1(t_0)-s_1(t_0-\Delta t)}{\Delta t}\leqslant\frac{s_2(t_0)-s_2(t_0-\Delta t)}{\Delta t}$,所以在单位时间内乙的速度比甲的速度快.因此,在图 1-1-1 所示的整个运动状态中乙的速度比甲的速度快.

评注:欲比较两人的速度,其实就是比较两人路程对时间的平均变化率,通过平均变化率的大小关系得出结论.

2. 斜坡的坡度问题

例 2 某斜坡在某段内的倾斜程度可以近似地用函数 $y=-x^2+4x\left(\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2\right)$来刻画,其中 y 表示斜坡的垂直高度,x 表示此段坡的底线的水平距离,试分析该段斜坡坡度的变化情况.

分析:考查函数在某区间内的平均变化率.

解:$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{[-(x+\Delta x)^2+4(x+\Delta x)]-(-x^2+4x)}{\Delta x}$

$=\frac{-2x\cdot\Delta x+4\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}=-2x+4-\Delta x$,

则当 $\Delta x\to 0$ 时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to -2x+4$.

由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-2x+4$ 在区间 $\left[\frac{3}{2},2\right]$ 内是减函数,所以 $0\leqslant\frac{\Delta y}{\Delta x}\leqslant 1$.

故该段斜坡的坡度在开始时是 45°,随着高度慢慢上升,坡度在慢慢变小,在 x 达到 2 时坡度为 0°.

评注:求一个确定的坡度是没有问题的,如何求一个变化着的斜坡的坡度呢?我们可以给出 y(高度)一个小小的增量 Δy,假定这个增量是确定的,再求在这个增量内的坡度,即用 y 的增量 Δy 去除以 Δx(水平增量),即得平均变化率,再对商求极限即可得瞬时变化率.

3. 特殊量的求解

例 3 竖直向上弹射一个小球,小球的初速度为 120 m/s,试求小球在何时的速度为零.(g 取 9.8 m/s²)

解:小球的运动方程为 $h(t)=120t-\frac{1}{2}gt^2$.

$$\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{\left[120(t+\Delta t)-\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2\right]-\left(120t-\frac{1}{2}gt^2\right)}{\Delta t}$$

$$=\frac{120\Delta t-gt\Delta t-\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}=120-gt-\frac{1}{2}g\Delta t.$$

当 $\Delta t\to 0$ 时,上式趋近于 $120-gt$,可见 t 时刻的瞬时速度为 $120-gt$.

令 $120-gt=0$,得 $t=\frac{120}{g}=\frac{120}{9.8}\approx 12.2$(s).

故小球大约在 12.2 s 时的速度为零.

评注:瞬时速度的求解实际上是先求平均变化率,再通过平均变化率求出瞬时变化率.

通过上面三个例题可以看出,变化率是一个十分重要的概念,它是连接初等数学与导数的桥梁.

即学即练 1

1. 自由落体运动的方程为 $s=\frac{1}{2}gt^2$,计算 t 从 3 s 到 3.1 s,3.01 s,3.001 s各时间段内的平均速度(s 的单位为 m).
2. 自由落体运动的方程是 $s=\frac{1}{2}gt^2$($g=9.8$ m/s²),求物体在 $t=3$ s 时刻的速度.
3. 甲、乙两人跑步路程与时间的关系以及两人百米赛跑路程和时间的关系分别如图 1-1-2(1)(2),试问:

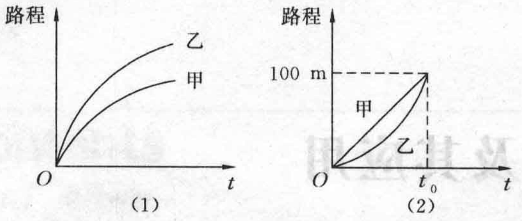


图 1-1-2

(1)根据图(1)判断甲、乙两人哪一个跑得快?

(2)甲、乙两人百米赛跑,问快到终点时,谁跑得较快?

易错点辨析法

正确理解函数的平均变化率

函数的平均变化率是一个重要概念,需要从定义和几何意义两方面加以理解.

1. 函数平均变化率的定义

已知函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其附近有意义,则任取 $\Delta x\neq 0$,那么比值 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率. 若当 Δx 趋近于 0 时,该比值趋近于常数 c,此时 c 就称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的瞬时变化率,即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=c$.

例 1 已知物体自由落体运动的方程为 $s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$ ($g=10\ \mathrm{m/s^2}$).

(1)求物体在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的平均速度;

(2)求物体在 $t=t_0$ 时刻的瞬时速度.

分析:物体在 t_0 时刻的瞬时速度就是物体在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内,当 Δt 趋近于 0 时平均速度的极限值,即 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$.

解:当 t 由 t_0 取得一个改变量 Δt 时,s 取得的相应改变量是 $s(t_0+\Delta t)-s(t_0)=\dfrac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\dfrac{1}{2}gt_0^2$

$=gt_0\Delta t+\dfrac{1}{2}g(\Delta t)^2$.

(1)物体在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{gt_0\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}=g\left(t_0+\frac{1}{2}\Delta t\right).$$

(2)$\Delta t\to 0$ 时,物体在 $t=t_0$ 时刻的瞬时速度为

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}g\left(t_0+\frac{1}{2}\Delta t\right)=gt_0.$$

点评:要求瞬时速度,首先求出平均速度,然后当时间改变量 Δt 趋近于零时的极限值即为物体的瞬时速度.

2. 函数平均变化率的几何意义

设函数 $y=f(x)$ 的图象如图 1-1-3 所示.

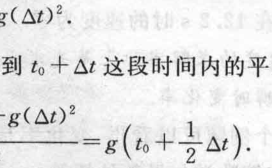


图 1-1-3

设 $A(x_0,f(x_0))$,$B(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$,则割线 AB 的斜率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 即为函数 $y=f(x)$ 由 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 的平均变化率. 当点 B 沿曲线趋近于点 A 时,割线 AB 绕点 A 转动,它的极限位置即为曲线在点 A 处的切线,即当 Δx 趋近于 0 时,$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=k$,则常数 k 为切线 AD 的斜率,也就是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的瞬时变化率.

例 2 曲线 $y=x^3$ 上两点 $P(1,1)$ 和 $Q(1+\Delta x,1+\Delta y)$,作曲线的割线 PQ,求当 $\Delta x=0.1$ 时割线的斜率 k 和曲线在点 P 处的切线的斜率 k_1.

分析:本题主要考查对函数平均变化率的求解过程以及如何求曲线在某点处的瞬时变化率.

解:因为 $\Delta y=(1+\Delta x)^3-1=(\Delta x)^3+3(\Delta x)^2+3\Delta x$,所以割线的斜率为

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^3+3(\Delta x)^2+3\Delta x}{\Delta x}=(\Delta x)^2+3\Delta x+3.$$

当 $\Delta x=0.1$ 时,$k=0.1^2+3\times 0.1+3=3.31$.

曲线过点 P 的切线的斜率为

$$k_1=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[(\Delta x)^2+3\Delta x+3]=3.$$

点评:解决该题的关键是深刻理解函数平均变化率的几何意义.

即学即练 2

1. 一辆汽车按运动规律 $s=3t^2+1$ 作直线运动,求这辆汽车在 $t=3$ 秒时的瞬时速度(时间单位:秒,位移单位:米).

2. 已知函数 $f(x)=ax^2$ 在区间$[1,2]$上的平均变化率为 $\sqrt{3}$,求 $f(x)$在$[-2,-1]$上的平均变化率.

高效能解题法

巧用变化率探究切线问题

1. 切线的斜率

例 1 求曲线 $y=f(x)=2x^2$ 在点 $P(1,2)$处的切线的斜率 k.

分析:要求切线的斜率,只要求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 就可以了.

解:因为 $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=2(\Delta x)^2+4\Delta x$,

所以 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2\Delta x+4$.

故 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2\Delta x+4)=4$.

点评:求曲线的切线斜率可分为三步:

(1)求 Δy;(2)求 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 并化简;(3)求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. 切线的倾斜角

例 2 求曲线 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+5$ 在 $x=1$ 处的切线的倾斜角.

分析:要求切线的倾斜角,应先求切线的斜率 k,再根据斜率 $k=\tan\alpha$,求出倾斜角 α.

解:设曲线 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+5$ 在 $x=1$ 处的切线的倾斜角为 α,则

$$\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(1+\Delta x)^3-(1+\Delta x)^2+5-\left(\frac{1}{3}-1+5\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(\Delta x)^3-\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{3}(\Delta x)^2-1\right]=-1.$$

因为 $\alpha\in[0,\pi)$,所以 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$. 故切线的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$.

点评:切线的倾斜角 α 是通过求切线的斜率而得到的,在解题过程中,一定要注意切线的倾斜角 α 的取值范围.

3. 曲线的切线

例 3 求过点 $P\left(2,\frac{8}{3}\right)$ 且与曲线 $y=\frac{1}{3}x^3$ 相切的切线方程.

分析:要求过点 P 的曲线的切线方程,需求过点 P 的切线的斜率 k,然后根据点斜式可求切线方程.

解:因为 $P\left(2,\frac{8}{3}\right)$ 在曲线 $y=\frac{1}{3}x^3$ 上,$\Delta y=\frac{1}{3}(2+\Delta x)^3-\frac{1}{3}\times 2^3=4\Delta x+2(\Delta x)^2+\frac{1}{3}(\Delta x)^3$,

所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=4+2\Delta x+\frac{1}{3}(\Delta x)^2$.

故 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[4+2\Delta x+\frac{1}{3}(\Delta x)^2\right]=4$,

即 $k=4$.

故与曲线 $y=\frac{1}{3}x^3$ 在点 P 处相切的切线方程为

$y-\frac{8}{3}=4(x-2)$,即 $12x-3y-16=0$.

点评:求过点 P 且与曲线相切的切线方程时,要注意点 P 的位置,若点 P 在曲线上,可根据本题的方法求出切线的斜率,然后再根据点斜式求切线方程;若点 P 不在曲线上要设切点坐标后,用待定系数法求解.

4. 求切点坐标

例 4 若曲线 $f(x)=x^3$ 在点 P 处的切线的斜率为 3,求点 P 的坐标.

分析:要求点 P 的坐标,可设点 P 的坐标为 (x_0,x_0^3),然后由切线的斜率为 3,解方程求得.

解:设点 P 的坐标为 (x_0,x_0^3),

则斜率 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=3$.

因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2]=3x_0^2,$$

所以 $3x_0^2=3$,解得 $x_0=\pm 1$,

故点 P 的坐标是 $(1,1)$ 或 $(-1,-1)$.

点评:值得注意的是切点 P 的坐标有两个,部分同学可能误认为只有一个 $(1,1)$ 而出错.

即学即练③

1. 已知曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上一点 $P(2,2)$,求在点 P 处的切线的斜率,并写出切线方程.
2. 如果曲线 $y=x^2+x-3$ 的某一条切线与直线 $y=3x+4$ 平行,求切点坐标与切线方程.

零距离 备考法

透视高考试题中的函数变化率问题

变化率问题是本章学习的基础知识点,其在高考试题中主要以选择题的形式考查变化率的意义,难度以简单题为主. 现示例如下:

例 1 (全国高考)已知曲线 $y=\frac{x^2}{4}$ 的一条切线的斜率为 $\frac{1}{2}$,则切点的横坐标为( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答案:A

解析:$\Delta y=\frac{(x+\Delta x)^2}{4}-\frac{x^2}{4}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{4}$.

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x+\Delta x}{4}$,$\therefore$ 当 $\Delta x\to 0$ 时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\frac{1}{2}x$.

令 $\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}$,得 $x=1$,即切点的横坐标为 1.

例 2 (全国高考)设曲线 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 在点 $(3,2)$ 处的切线与直线 $ax+y+1=0$ 垂直,则 $a=$( )

A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -2

答案:D

解析:$\Delta y=\frac{x+\Delta x+1}{x+\Delta x-1}-\frac{x+1}{x-1}$

$$=\frac{(x+\Delta x+1)(x-1)-(x+1)(x+\Delta x-1)}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$$

$$=\frac{-2\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)},$$

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$,

$\therefore$ 当 $\Delta x\to 0$ 时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to-\frac{2}{(x-1)^2}$,即 $k=-\frac{2}{(x-1)^2}$.

$\therefore -\frac{2}{(3-1)^2}\cdot(-a)=-1$,解得 $a=-2$.

例 3 (2010·课标全国)曲线 $y=\frac{x}{x+2}$ 在点 $(-1,-1)$ 处的切线方程为( )

A. $y=2x+1$ B. $y=2x-1$ C. $y=-2x-3$ D. $y=-2x-2$

答案:A

解析:$\Delta y=\frac{x+\Delta x}{x+\Delta x+2}-\frac{x}{x+2}=\frac{(x+\Delta x)(x+2)-x(x+\Delta x+2)}{(x+\Delta x+2)(x+2)}$

$$=\frac{x^2+2x+\Delta x\cdot x+2\Delta x-x^2-x\cdot\Delta x-2x}{(x+2)(x+\Delta x+2)}$$

$$=\frac{2\Delta x}{(x+2)(x+\Delta x+2)}.$$

$\because \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2}{(x+2)(x+\Delta x+2)}$,

$\therefore$ 当 $\Delta x\to 0$ 时,$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to\dfrac{2}{(x+2)^2}$.

而 $k=\dfrac{2}{(x+2)^2}$,$\therefore k=\dfrac{2}{(-1+2)^2}=2$.

$\therefore$ 曲线 $y=\dfrac{x}{x+2}$ 在 $(-1,-1)$ 处的切线方程为 $y-(-1)=2[x-(-1)]$,即 $y=2x+1$.

即学即练 4

1. 曲线 $y=2x^2+1$ 在点 $P(-1,3)$ 处的切线方程为(　　)

A. $y=-4x-1$　　B. $y=-4x-7$

C. $y=4x-1$　　D. $y=4x+7$

2. 已知曲线 $y=2ax^2+1$ 过点 $(\sqrt{a},3)$,则该曲线在该点的切线方程是(　　)

A. $y=-4x-1$　　B. $y=4x-1$

C. $y=4x-11$　　D. $y=-4x+7$

1.1.2　导数的概念

重难点 突破法

妙用定义巧解题

掌握导数的定义是学好导数的基础,其应用非常广泛,只有深刻理解其定义,才能灵活地变换形式,应用定义解题.

1. 利用导数的定义求函数的导数

例 1　试求函数 $f(x)=x(2-|x|)$ 在 $x=0$ 处的导数值 $f'(0)$.

解:因为 $\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$

$=\dfrac{\Delta x(2-|\Delta x|)}{\Delta x}=2-|\Delta x|$,

所以 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2-|\Delta x|)=2$.

点评:对于带绝对值的在某点可导的函数,可直接应用导数的定义求导.

2. 利用导数的定义求参数的值

例 2　设 $f(x)=ax^3+2$,若 $f'(-1)=3$,则 $a=$(　　)

A. -1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\dfrac{1}{3}$

答案:C

解析:因为 $f'(-1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a(\Delta x-1)^3+a}{\Delta x}=3a$,

所以 $3a=3$,解得 $a=1$,故选 C.

点评:利用导数的定义求参数的值时,关键是求出函数在某点处的导数,然后列方程求解.

3. 导数定义的变形应用

例 3　已知 $a=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,

$b=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,$c=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,

$d=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$,$e=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,

则 b,c,d,e 中与 a 相等的是(　　)

A. c,d　　B. d,e　　C. b,e　　D. c,e

答案:B

解析:因为 $a=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$,

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+(-\Delta x))-f(x_0)}{-\Delta x}$

$\neq\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=b$,

所以 b 不等于 a;

因为 $c=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=2f'(x_0)$

$\neq\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=f'(x_0)$,

所以 c 不等于 a;

因为 $d=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x+2\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$,

$e=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x_0+x-x_0)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$,

所以 d,e 与 a 相等,故选 B.

4. 导数定义的综合应用

例 4　已知函数 $f(x)=ce^x$,其中 $c\in\mathbf{R}$ 为常数.若 $b^2\leqslant 4(c-1)$,且 $b+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-c}{x}=4$,试证:$-6\leqslant b\leqslant 2$.

证明:因为 $b+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-c}{x}=b+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ce^x-c}{x}$,

且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c(e^x-1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c(e^x-e^0)}{x-0}=c(e^x)'|_{x=0}=c$,

所以 $b+c=4$.

由 $\begin{cases}b+c=4,\\ b^2\leqslant 4(c-1),\end{cases}$ 得 $b^2+4b-12\leqslant 0$,解得 $-6\leqslant b\leqslant 2$.

点评:只有对导数的定义有深刻的理解,才能快速地解答出本题.

即学即练 1

1. 用导数的定义求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $x=1$ 处的导数.

2. 若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有导数,则 $\lim\limits_{h\to a}\dfrac{f(h)-f(a)}{h-a}$ 为(　　)

A. $f(a)$　　B. $f'(a)$　　C. $f'(h)$　　D. $f(h)$

易错点 辨析法

初学导数的两个常犯错误

用导数知识求解某些问题方便、快捷,但在运用导数知识求解问题时常常出现一些错误,举例剖析如下:

1. 导数概念理解错误

例 1　已知 $f(x)=x^4+3x-2$,

则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$______.

答案:7

错解:$\because \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=f'(1)$,

且由导数的定义可求得 $f'(x)=4x^3+3$,$\therefore f'(1)=7$,故填 7.

剖析:产生以上错解的主要原因是对导数定义的理解不透彻,胡乱套用定义式.事实上,在导数定义中,增量 Δx 的形式是多种多样的,但无论如何变化,其实质是分子中 x 的增量与分母中 x 的增量必须一致,否则必须通过一些恰当的变形使之一致.本例分子中 x 的增量为 $2\Delta x$(即 $1+2\Delta x-1=2\Delta x$),而分母中 x 的增量为 Δx. **答案**:14

正解:由导数的定义可求得 $f'(x)=4x^3+3$,

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}\times 2=2f'(1)=14.$

评注:导数的定义对考生的要求不高,但对一些基本的变形形式要有所了解.

2. 忽视 $f'(x)$ 与 $f'(x_0)$ 的区别

例 2 已知 $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$,求 $f'(2)$.

错解:$f'(2)=\left(\dfrac{2}{1-4}\right)'=0.$

剖析:$f'(x)$ 是导函数,$f'(2)$ 是导函数的一个函数值,所以要求 $f'(2)$ 应先求 $f'(x)$.

正解:$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{x+\Delta x}{1-(x+\Delta x)^2}-\dfrac{x}{1-x^2}}{\Delta x}$

$=\dfrac{x^2+1+x(\Delta x)}{[1-(x+\Delta x)^2](1-x^2)}$,

当 Δx 无限趋近于 0 时,$f'(x)=\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$.

所以 $f'(2)=\dfrac{1+2^2}{(1-2^2)^2}=\dfrac{5}{9}$.

即学即练②

1. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,且 $f'(x_0)$ 已知,求下列各式的极限值.

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

2. 如图 1-1-4,函数 $f(x)$ 的图象是折线段 ABC,其中 A,B,C 的坐标分别为 $(0,4)$,$(2,0)$,$(6,4)$,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$______.(用数字作答)

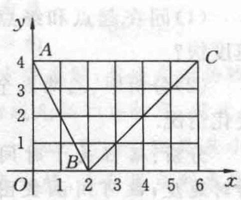


图 1-1-4

高效能解题法

点击四类导数问题

导数的定义不仅明确了求解导数的三个步骤:(1)求函数的增量;(2)求平均变化率;(3)取极限得导数,而且还为我们解决有关问题提供了新的思路,示例如下:

1. 推导求值问题

例 1 已知函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数为 b,求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+4\Delta x)-f(a+5\Delta x)}{\Delta x}$ 的值.

分析:在导数的定义中,增量 $\Delta f(x)$ 的形式是多种多样的,但不论 $\Delta f(x)$ 选择哪种形式,Δx 只需选择相应的形式,利用函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的条件,可以将已给定的式子恒等变形转化为导数定义的结构形式.

解:$\because \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=b$,

$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+4\Delta x)-f(a+5\Delta x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+4\Delta x)-f(a)+f(a)-f(a+5\Delta x)}{\Delta x}$

$=4\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+4\Delta x)-f(a)}{4\Delta x}+5\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a)-f(a+5\Delta x)}{5\Delta x}$

$=4\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+4\Delta x)-f(a)}{4\Delta x}-5\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+5\Delta x)-f(a)}{5\Delta x}$

$=4b-5b=-b.$

评注:紧扣函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的定义式 $f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$,将所给的式子进行等价变形,使问题进行转化,是解决本题的关键.遇到类似的问题,一般地,应用定义是解题的一个重要途径.

2. 分段函数求导问题

例 2 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{5}x^2, & x<10,\\ 16x-80, & x>10,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

分析:这是一个分段函数的求导问题,对于分段函数导数问题,只能运用导数的定义分段求解,要分别求出当自变量在不同区间上相应函数的导数.

解:当 $x<10$ 时,取 $x=10$ 附近左边的点,

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{4}{5}(x+\Delta x)^2-\dfrac{4}{5}x^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{8}{5}\Delta x\cdot x+\dfrac{4}{5}(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{8}{5}x+\dfrac{4}{5}\Delta x\right)=\dfrac{8}{5}x.$

当 $x>10$ 时,取 $x=10$ 附近右边的点,

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[16(x+\Delta x)-80]-16x+80}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{16\Delta x}{\Delta x}=16.$

$\therefore f'(x)=\begin{cases}\dfrac{8}{5}x, & x<10,\\ 16, & x>10.\end{cases}$

评注:对于分段函数的导数应分段求导.

3. 求参数值问题

例 3 直线 l:$y=x+a(a\neq 0)$ 和曲线 C:$y=x^3-x^2+1$ 相切,求 a 的值.

解:设直线 l 和曲线 C 相切于点 $P(x_0,y_0)$,则对于曲线 C,

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x_0+\Delta x)^3-(x_0+\Delta x)^2+1-(x_0^3-x_0^2+1)}{\Delta x}$

$=3x_0^2-2x_0.$

由题意知,曲线在点 P 处切线的斜率为 $k=1$,

即 $3x_0^2-2x_0=1$,解得 $x_0=-\dfrac{1}{3}$ 或 $x_0=1$.

于是切点的坐标为$\left(-\frac{1}{3},\frac{23}{27}\right)$或(1,1).

当切点为$\left(-\frac{1}{3},\frac{23}{27}\right)$时,$\frac{23}{27}=-\frac{1}{3}+a$,于是$a=\frac{32}{27}$.

当切点为(1,1)时,$1=1+a$,于是$a=0$(舍去).

所以a的值为$\frac{32}{27}$.

评注:解决本题的关键是正确理解、掌握导数的定义,运用导数的定义进行求解.

4. 用导数定义比较大小

例 4 设$f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上可导,且$f'(x)>g'(x)$,则当$a<x<b$时,有(　　)

A. $f(x)>g(x)$

B. $f(x)<g(x)$

C. $f(x)+g(a)>g(x)+f(a)$

D. $f(x)+g(b)>g(x)+f(b)$

答案:C

解析:因为$f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上可导,且$f'(x)>g'(x)$,

所以$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$,

即有$f(x)-f(a)>g(x)-g(a)$,

则有$f(x)+g(a)>g(x)+f(a)$.故选 C.

典题例析

点评:本题利用导数的极限定义,旨在考查导数的概念.

即学即练 3

1. 如果函数$y=f(x)$的瞬时变化率处处为 0,则下列函数可以满足条件的是(　　)

A. $y=2x+3$　　B. $y=3x$

C. $y=c$(c为常数)　　D. $y=x^2+5$

2. 设函数$f(x)$在点x_0附近有定义,且有$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=a\Delta x+b(\Delta x)^2$($a$,$b$为常数),则(　　)

A. $f'(x)=a$　　B. $f'(x)=b$

C. $f'(x_0)=a$　　D. $f'(x_0)=b$

3. 已知$f(3)=2$,$f'(3)=-2$,求$\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-3f(x)}{x-3}$的值.

零距离 备考法

高考中的导数概念及应用

导数的概念是学习导数及其应用的基础,单纯考查导数定义的题目在高考试题中很少出现,常与其他知识联系起来考查.示例如下:

例 1 (海南模拟)若$f'(x_0)=2$,则$\lim\limits_{k\to 0}\frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{2k}$等于(　　)

A. -1　　B. -2　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

新课标理念提示:本题考查导数的定义.

答案:A

方法指导:先把所求极限式进行代数恒等变形,改写成$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$的形式,然后代入求解.

解析:$\lim\limits_{k\to 0}\frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{2k}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{k\to 0}\frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{-k}$

$=-\frac{1}{2}f'(x_0)=-1$.故选 A.

评注:(1)自变量的增量$\Delta x=(x_0-k)-x_0=-k$,因此应把分母改写成$-k$.

(2)如果本题这样变形:$\lim\limits_{k\to 0}\frac{f(x_0-k)-f(x_0)}{2k}=-\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{k\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-k)}{k}=-\frac{1}{2}f'(x_0)$,那就意味着自变量的增量为$\Delta x=x_0-(x_0-k)=k$,应注意两者本质上的区别.

例 2 (江苏高考)已知二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$的导数为$f'(x)$,$f'(0)>0$,且对于任意实数x,都有$f(x)\geqslant 0$,则$\frac{f(1)}{f'(0)}$的最小值为________.

新课标理念提示:考查导数的概念与基本不等式.

答案:2

方法指导:函数$f(x)=ax^2+bx+c$的导数$f'(x)=2ax+b$,由$f'(0)>0$,得$b>0$,再根据$f(x)\geqslant 0$恒成立知$a>0$,且$b^2-4ac\leqslant 0$.

解析:由题意可以得到$b>0$,且$a>0$,$b^2-4ac\leqslant 0$,即$b^2\leqslant 4ac$,而$\frac{f(1)}{f'(0)}=\frac{a+b+c}{b}=\frac{a+c}{b}+1\geqslant\frac{2\sqrt{ac}}{b}+1\geqslant\frac{b}{b}+1=2$.

即学即练 4

1. 过曲线$f(x)=x^3$上两点$P(1,1)$和$Q(1+\Delta x,1+\Delta y)$作曲线的割线,求出当$\Delta x=0.1$时割线的斜率,并求曲线在P点处的切线的斜率.

2. 若函数$f(x)$在$x=a$处的导数为A,求$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{2\Delta x}$.

1.1.3　导数的几何意义

重难点 突破法

例谈导数几何意义的三个实际应用

1. 比较速度的大小

例 1 如图 1-1-5,甲、乙两人百米赛跑的路程和时间的函数关系分别为$y=f(t)$和$y=g(t)$.

(1)问在起点和终点附近谁的速度快?

(2)分析甲、乙两人全程速度的变化情况.

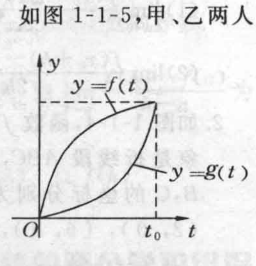


图 1-1-5

分析:路程关于时间的导数是瞬时速度,故可用函数图象在某一点处切线的斜率的大小来研究甲、乙两人在这一时刻速度的大小.

解:(1)在起点附近分别作曲线$y=f(t)$和$y=g(t)$的切线,可知曲线$y=f(t)$的切线的斜率比曲线$y=g(t)$的切线的斜率要大,即甲的瞬时速度比乙的瞬时速度大,故在起点附近甲的速度快;在终点附近分别作曲线$y=f(t)$和$y=g(t)$的切线,可知曲线$y=f(t)$的切线的斜率比曲线$y=g(t)$的切线的斜率要小,即甲的瞬时速度比乙的瞬时速度小,故在终点附近

乙的速度快.

(2)随着时间的增长，图中曲线 $y=f(t)$ 的切线的斜率由大变小，所以甲的速度是由大变小的；随着时间的增长，图中曲线 $y=g(t)$ 的切线的斜率由小变大，所以乙的速度是由小变大的.

评注：只有明确导数的几何意义，并能正确理解、把握，才能深刻揭示其本质，从而灵活解决问题.

2. 研究增减的快慢

例 2 太平洋某小岛上的野兔数量近似由函数 $P(t)$ 给出，其中 t 是 1774 年以来的年数. 当初船长詹姆斯·库克在这个岛屿上留下了 10 只野兔，函数 $P(t)$ 的图象如图 1-1-6 所示.

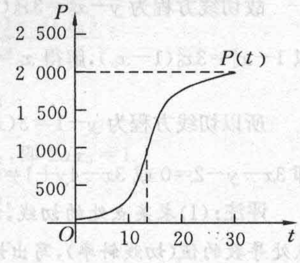


图 1-1-6

(1)问野兔总数是否达到了平衡？

(2)试估计野兔在何时增长最快，那时总数达到了多少？

(3)请说明什么自然原因可能导致 $P(t)$ 的图象具有这种形状？

分析：由于 $P(t)$ 对 t 的导数即为函数 $P(t)$ 在该点处切线的斜率，故可用 $P'(t)$ 来刻画 $P(t)$ 的变化情况.

解：(1)如图 1-1-6，当 $t>25$ 时，函数 $P(t)$ 的图象在此以后各点处的切线的斜率接近于零，也就是导数接近于零，这时，野兔的数量几乎就不再增加，达到了平衡.

(2)图 1-1-6 中曲线的切线的斜率最大处的 t 值即是野兔增长最快的时候. 由图可知，大约在 1774 年后 13 年，即 1787 年时野兔增长最快，这时大约有野兔 1 000 只.

(3)由于岛屿面积有限，生长的野草仅能够供给大约 2 000只野兔食用，因此，导致 $P(t)$ 的图象具有这种形状.

评注：由导数的几何意义可知，函数在某一点处切线的斜率越大，导数就越大，那么函数在这一点附近的增长率越大，即函数在这一点附近增长得越快.

3. 研究距离的长短

例 3 如图 1-1-7，一飞机沿抛物线 $f(x)=-x^2$ 飞行，另有一空中加油机沿直线 l：$4x+3y-77=0$ 飞行(x，y 的单位都是米)，并伺机为飞机加油，已知加油管长 15 米，问能否进行空中加油？

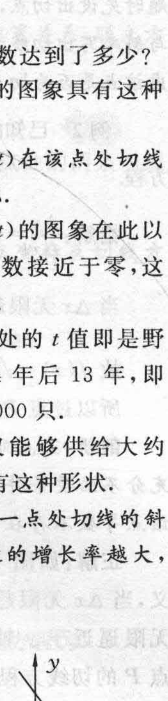


图 1-1-7

分析：能否进行空中加油，只需看直线 l 上的点到抛物线的最短距离和 15 的大小关系即可，而最短距离可用以下方法求解：直线在抛物线的右侧，当平移直线时，直线会和抛物线先相切再相交，因此，切线的切点就是抛物线上到直线 $4x+3y-77=0$ 距离最小的点(如图 1-1-7). 利用导数先求切点坐标，再利用点到直线的距离公式求最小距离，最后比较.

解：设与直线 l 平行的抛物线的切线的切点为 $Q(x_0, y_0)$.

因为 $y=-x^2$，

所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-(x_0+\Delta x)^2+x_0^2}{\Delta x}=-2x_0$.

又因为直线 l 的斜率为 $-\dfrac{4}{3}$，

所以切线的斜率 $k=-2x_0=-\dfrac{4}{3}$，解得 $x_0=\dfrac{2}{3}$.

将其代入 $y=-x^2$，得 $y_0=-\dfrac{4}{9}$，

所以点 $Q\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{9}\right)$ 即为抛物线上到直线 l 距离最小的点. 由点到直线的距离公式，求得直线上的点到抛物线上点的距离的最小值为 $\dfrac{\left|4\times\dfrac{2}{3}+3\times\left(-\dfrac{4}{9}\right)-77\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{227}{15}>15$，故不能进行空中加油.

评注：对于本题，利用导数求切点坐标比利用一元二次方程根的判别式等于 0 求解要直接而简单.

即学即练 1

如图 1-1-8，设计 4 个杯子的形状，使得向杯中匀速注水时，杯中水的高度 h 随时间 t 的变化图象与下列图象相符合.

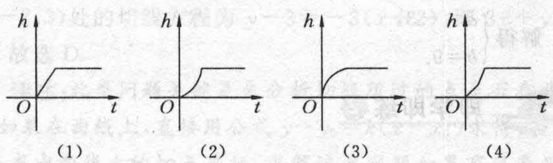


图 1-1-8

易错点 辨析法

警惕导数解题中的“两个忽视”

1. 忽视点不在曲线上

例 1 已知曲线 $f(x)=2x^3-3x$，过点 $M(0,32)$ 作曲线 $f(x)$ 的切线，求切线的方程.

错解：$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\dfrac{2(x+\Delta x)^3-3(x+\Delta x)-(2x^3-3x)}{\Delta x}$

$=6x^2-3+6(\Delta x)x+2(\Delta x)^2$，

当 Δx 无限趋近于 0 时，可得 $f'(x)=6x^2-3$.

由导数的几何意义知，$k=f'(0)=-3$.

故曲线的切线方程为 $y=-3x+32$.

剖析：误将点 M 作为切点来解题.

正解：设切点坐标为 $N(x_0, 2x_0^3-3x_0)$，则易知切线的斜率为 $k=f'(x_0)=6x_0^2-3$，

所以切线方程为 $y=(6x_0^2-3)x+32$.

又点 N 在切线上，所以 $2x_0^3-3x_0=(6x_0^2-3)x_0+32$，解得 $x_0=-2$.

故切线方程为 $y=21x+32$.

点拨：用导数几何意义解题，应先判定该点是否在曲线上.

2. 忽视切点在曲线上的隐含条件

例 2 已知曲线 $y=ax^2+bx-5$ 在点 $(2,1)$ 处的切线方程为 $y=-3x+7$，求 a、b 的值.

错解：$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\dfrac{a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)-5-(ax^2+bx-5)}{\Delta x}$

$=2ax+b+a\Delta x$.

当 Δx 无限趋近于 0 时，$y'=2ax+b$，

所以 $y'|_{x=2}=4a+b$.

所以直线 $y-1=(4a+b)(x-2)$ 与直线 $y=-3x+7$ 是同一条直线，所以 $\begin{cases}4a+b=-3,\\1-2(4a+b)=7,\end{cases}$ 化简得 $4a+b=-3$.

到此，少一个条件，问题不可以解决.

剖析：忽视了切点在曲线上这一条件而导致思路受阻.

正解：易知 $y'=2ax+b$，所以 $y'|_{x=2}=4a+b$.

所以直线 $y-1=(4a+b)(x-2)$ 与直线 $y=-3x+7$ 是同一条直线，所以 $\begin{cases}4a+b=-3,\\1-2(4a+b)=7,\end{cases}$ 化简得 $4a+b=-3$. ①

又点(2,1)在曲线上，所以 $4a+2b-5=1$. ②

由①②联立方程组得 $\begin{cases}4a+b=-3,\\4a+2b-5=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-3,\\b=9.\end{cases}$

即学即练 2

1. 已知曲线 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 上一点 $A\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$，用导数的几何意义求：

(1)点 A 处切线的斜率；(2)点 A 处切线的方程.

2. 在曲线 $y=x^2$ 上过哪一点的切线，

(1)平行于直线 $y=4x-5$；

(2)垂直于直线 $2x-6y+5=0$；

(3)与 x 轴成 135° 的倾斜角？

例析用导数求切线方程的误区

对于初学导数的学生来说，由于对导数的定义及几何意义理解不深刻，致使在应用时会犯各种各样的错误. 下面针对求过一点的切线方程易错问题作一些探讨：

例 1 过曲线 $y=x^3$ 上点(1,1)的切线方程是________.

错解：因为 $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^3-1=(\Delta x)^3+3(\Delta x)^2+3\Delta x$，

所以 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(\Delta x)^3+3(\Delta x)^2+3\Delta x}{\Delta x}=(\Delta x)^2+3\Delta x+3$，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3$，即 $f'(1)=3$.

所以所求切线的方程为 $y-1=3(x-1)$，即 $3x-y-2=0$.

剖析：求切线方程时，一定要注意是求过某一点的切线方程还是求在某点处的切线方程. 前者可能会有多个结果，而后者通常只有一个结果. 例如，如图 1-1-9 所示的图象，l_1，l_2，l_3 都是过点 P 的切线，其中 l_3 是在点 P 处的切线. 过曲线上一点的切线和在某一点处的切线是两个不同的概念.

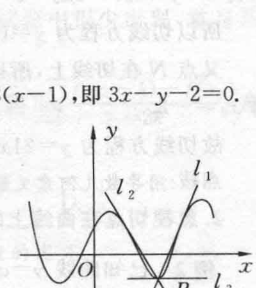


图 1-1-9

正解：设切线与曲线的切点为 (x_0, x_0^3)，

则 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=\dfrac{(\Delta x)^3+3x_0(\Delta x)^2+3x_0^2\Delta x}{\Delta x}$

$=(\Delta x)^2+3x_0\Delta x+3x_0^2$.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2$，即 $f'(x_0)=3x_0^2$.

故切线方程为 $y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$，而该切线过点(1,1)，所以 $1-x_0^3=3x_0^2(1-x_0)$，解得 $x_0=1$ 或 $x_0=-\dfrac{1}{2}$，

所以切线方程为 $y-1=3(x-1)$ 或 $y+\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{4}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$，

即 $3x-y-2=0$ 或 $3x-4y+1=0$.

评注：(1)求某点处的切线，该点就是切点，因此直接求出该点处导数的值(切线斜率)，写出切线方程.

(2)求过某点的切线，要注意该点不一定是切点. 因此，在解题时先设出切点，再求出该点处的导数值(切线斜率)，根据切点与斜率写出切线方程，最后再将该点代入. 在解题过程中不必考虑该点是否为切点.

例 2 已知曲线 $f(x)=\sqrt{x}$ 上一点 $P(0,0)$，求过点 P 的切线方程.

错解：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x}}$，

当 Δx 无限趋近于 0 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x}}$ 无意义，

故 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x=0$ 处导数不存在.

所以过点 P 的切线不存在.

剖析：某点处的导数是否存在是曲线在该点存在切线的充分不必要条件，我们在求曲线上过某点的切线方程时，如果该点导数不存在，就应由切线的定义来求切线方程.

正解：如图 1-1-10，由切线的定义，当 Δx 无限趋近于 0 时，割线 PQ 无限逼近于 y 轴，斜率不存在，故过点 P 的切线方程为 $x=0$.

评注：求过曲线上某点的切线方程的方法主要有：(1)利用切线的定义求解；(2)利用求导的方法求解.

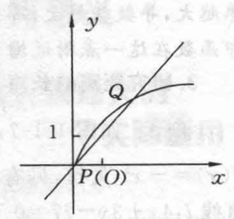


图 1-1-10

切线问题对初学者是一个易错点，我们只要读懂题意，选择恰当的方法，很多问题就可以迎刃而解了.

高效能 解题法

妙用导数几何意义 求解四类常见问题

导数的几何意义是导数重点内容之一，正确地理解、应用导数的几何意义，是解有关导数问题的关键，关于导数几何意义的应用，示例如下：

1. 求参数

例 1 已知直线 $x-y-1=0$ 与抛物线 $y=ax^2$ 相切，则

a 的值为________.

答案：$\frac{1}{4}$

分析：根据导数的几何意义，设出切点坐标，则抛物线在切点处的导数等于直线的斜率，又切点在直线和抛物线上，联立方程即可求出.

解：设切点为 $P(x_0,y_0)$，

则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a(x_0+\Delta x)^2-ax_0^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2ax_0+a\Delta x)=2ax_0$，即 $2ax_0=1$.

又 $y_0=ax_0^2$，$x_0-y_0-1=0$，

联立以上三式得 $\begin{cases}2ax_0=1,\\ y_0=ax_0^2,\\ x_0-y_0-1=0,\end{cases}$ 解得 $a=\frac{1}{4}$.

评注：本题也可以利用直线与抛物线的位置关系，联立方程，利用判别式求解.

2. 求围成的三角形的面积

例 2 求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=x^2$ 在它们交点处的两条切线与 x 轴所围成的三角形的面积.

分析：由题意知，只要求出两曲线的交点坐标及切线方程，再结合三角形的面积公式就能求出.

解：联立两曲线方程得 $\begin{cases}y=\frac{1}{x},\\ y=x^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}$

即交点坐标为 $(1,1)$.

曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线斜率为

$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\Delta x}-\frac{1}{1}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{1+\Delta x}=-1$，

所以曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $(1,1)$ 处的一条切线方程为

$y-1=-1(x-1)$，即 $y=-x+2$.

同理，曲线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线斜率为

$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$，

所以曲线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$.

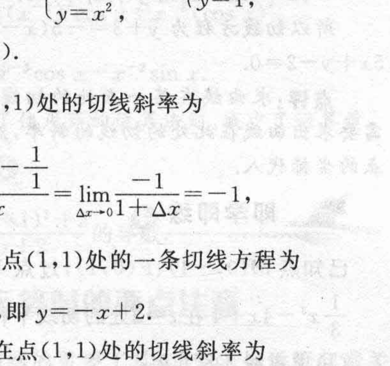


图 1-1-11

两条切线方程 $y=-x+2$ 和 $y=2x-1$ 与 x 轴所围成的图形如图 1-1-11 所示，

所以 $S=\frac{1}{2}\times 1\times\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$，故三角形的面积为 $\frac{3}{4}$.

3. 求切线方程

例 3 过点 $P(-1,0)$ 作抛物线 $y=x^2+x+1$ 的切线，则其中一条切线方程为(　　)

A. $2x+y+2=0$　　B. $3x-y+3=0$

C. $x+y+1=0$　　D. $x-y+1=0$

答案：D

分析：注意点 $P(-1,0)$ 不在抛物线上，因此可在抛物线 $y=x^2+x+1$ 上任取一点 $Q(x_0,x_0^2+x_0+1)$，通过 $k_{PQ}=y'|_{x=x_0}$ 建立等量关系.

解：设切线过抛物线上的点 $Q(x_0,x_0^2+x_0+1)$，

则 $y'|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x+1)=2x_0+1$.

∵ 切线过点 $P(-1,0)$ 和点 $Q(x_0,x_0^2+x_0+1)$，其斜率满足 $\frac{x_0^2+x_0+1}{x_0+1}=2x_0+1$，∴ $x_0^2+2x_0=0$，解得 $x_0=0$ 或 $x_0=-2$.

∴ 点 $(0,1)$，$(-2,3)$ 是抛物线上的点.

因此在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y-1=x$，即 $x-y+1=0$；在点 $(-2,3)$ 处的切线方程为 $y-3=-3(x+2)$，即 $3x+y+3=0$. 故选 D.

评注：此类问题关键是先分析切线所过的点是否在曲线上，如果在曲线上，直接用公式 $y-y_0=k(x-x_0)$ 求得，否则，需先求出曲线上的切点坐标. 求解这类问题如果盲目套用公式容易出现错误.

4. 判定切线条数

例 4 已知曲线 $y=x^3$ 上某点处的切线的斜率为 1，则这样的切线的条数为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 多于 2　　D. 不能确定

答案：B

分析：我们可以根据曲线上点 (x,y) 处的导数为 1，建立方程，解方程即可判断切线条数.

解：设 $y=x^3$ 在 $P(x_0,x_0^3)$ 处的导数值为 1，则有 $y'|_{x=x_0}=1$. 又 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=3x^2$，即 $3x_0^2=1$，所以 $x_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. 则曲线上这两个点处的切线的斜率为 1. 所以这样的直线有两条. 故选 B.

点评：如果知道曲线 $y=f(x)$ 的切线斜率为 m，我们可以根据方程 $f'(x)=m$ 的根的个数来确定曲线的斜率为 m 的切线的条数.

即学即练 3

求曲线 $y=x^3$ 在点 $(3,27)$ 处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积.

例析导数的几何意义及其妙用

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率，这就是导数的几何意义，利用导数的几何意义研究函数的切线问题是高考热点之一，利用导数的几何意义解题，既可加深对导数的理解，又可使问题得到简化.

例 1 设 $f(x)$ 为可导函数，且满足条件 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率.

解:因为 $f(x)$ 为可导函数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,

所以 $\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=-1$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=-2$,即 $f'(1)=-2$.

所以 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 -2.

评注:涉及可导函数的切线的斜率问题,可使用导数的几何意义.求哪一点处的切线的斜率,即求哪一点处的导数(对可导函数而言).

例2 已知曲线 $C:y=x^3-3x^2+2x$,直线 $l:y=kx$,且直线 l 与曲线 C 相切于点 $(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$,求直线 l 的方程及切点坐标.

解:直线 l 过原点,则 $k=\dfrac{y_0}{x_0}(x_0\neq 0)$,由点 (x_0,y_0) 在曲线 C 上,则 $y_0=x_0^3-3x_0^2+2x_0$,所以 $\dfrac{y_0}{x_0}=x_0^2-3x_0+2$.

又 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^3-3(x+\Delta x)^2+2(x+\Delta x)-(x^3-3x^2+2x)}{\Delta x}$
$=3x^2-6x+2$,

所以在 (x_0,y_0) 处,曲线 C 的切线斜率应为 $k=y'|_{x=x_0}$
$=3x_0^2-6x_0+2$,

所以 $x_0^2-3x_0+2=3x_0^2-6x_0+2$,

解得 $x_0=\dfrac{3}{2}$(因为 $x_0\neq 0$).

此时,$y_0=-\dfrac{3}{8}$,$k=-\dfrac{1}{4}$.

因此直线 l 的方程为 $y=-\dfrac{1}{4}x$,切点坐标为 $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{8}\right)$.

点评:导数的几何意义、切线与斜率定义的有机结合是解答本题的关键.

零距离 备考法

聚焦考题看导数的几何意义

对导数几何意义的考查,主要是求切线方程,切线与其他曲线形成的几何图形的面积及以导数的几何意义为背景设置的知识交汇问题等.求切线方程时,要注意"在某点处的切线"与"过某点的切线"不同.

例1 (全国Ⅱ高考)设曲线 $y=ax^2$ 在点 $(1,a)$ 处的切线与直线 $2x-y-6=0$ 平行,则 $a=$( )

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. -1

答案:A

解析:$y'|_{x=1}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a(1+\Delta x)^2-a\times 1^2}{\Delta x}$

$=a\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1+2\Delta x+(\Delta x)^2-1}{\Delta x}=a\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$
$=a\lim(2+\Delta x)=2a$.

由题意知 $2a=2$,所以 $a=1$.

点评:函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数即是函数 $y=f(x)$ 在该点处切线的斜率,依据导数概念和导数的几何意义,求得参数 a 的值.

例2 (全国Ⅱ高考)已知曲线 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 的一条切线的斜率为 $\dfrac{1}{2}$,则切点的横坐标为( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

答案:A

解析:因为 $k=y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{(x+\Delta x)^2}{4}-\dfrac{x^2}{4}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\Delta x}{4}\right)=\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$,所以 $x=1$.

点评:本题主要考查利用导数的几何意义求切线问题.

例3 (浙江高考)曲线 $y=x^3-2x^2-4x+2$ 在点 $(1,-3)$ 处的切线方程是________.

答案:$5x+y-2=0$

解析:$y'=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)+2-(x^3-2x^2-4x+2)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2-4x-2\Delta x-4]$

$=3x^2-4x-4$,则 $y'|_{x=1}=-5$.

所以切线方程为 $y+3=-5(x-1)$,即 $5x+y-2=0$.

点评:求曲线在某一点处的切线方程,需要求出曲线在此处的切线的斜率,然后将点的坐标代入.

一点就通

即学即练4

已知点 $M(0,-1)$、$F(0,1)$,过点 M 的直线 l 与曲线 $y=\dfrac{1}{3}x^3-4x+4$ 在 $x=2$ 处的切线平行.

(1)求直线 l 的方程;

(2)求以点 F 为焦点,l 为准线的抛物线 C 的方程.

1.2 导数的计算

1.2.1 几个常用函数的导数

1.2.2 基本初等函数的导数公式及导数的运算法则

重难点 突破法

循序渐进学习

函数求导运算

熟记常见函数的导数公式和导数的四则运算法则是求导的基础,根据题目的特点选择恰当的求导法则会给运算带来方便.

1. 学习导数运算的基本过程

(1)熟记常见函数的导数公式,并结合导数运算法则,才能准确、有效地求初等函数的导数.

(2)学了导数的运算法则后,对于一些简单函数的求导问题,可直接应用法则和常见函数的导数公式快速地求出导数,而不用定义求.

(3)在求函数的导数时,有些函数虽然表面上为函数的商

或积，但在求导前利用代数或三角恒等变形可将函数先化简，然后进行求导，可避免使用积、商的求导法则，减少运算量.

2. 求导运算法则的运用

例1 求下列函数的导数：

(1)$y=x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$；

(2)$y=\tan\frac{\pi}{4}+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

分析：观察式子的特点，可以先化简再求导.

解：(1)$y=x+2+\frac{2}{x}$，$y'=x'+2'+\left(\frac{2}{x}\right)'=1-\frac{2}{x^2}$.

(2)$y=\tan\frac{\pi}{4}+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=1+\frac{1}{2}\sin x$，$y'=\frac{1}{2}\cos x$.

评注：从形式上看可用积的运算法则求导，但运算比较烦琐，化简后可用加法法则求导，运算相对简便.

例2 求下列函数的导数：

(1)$y=\frac{3x^2-x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}}$；

(2)$y=\frac{x^4+\sqrt{x}+\cos x}{x^2}$.

分析：虽然这两道题是函数的商的形式，但在求导前利用变形可先将函数化简再求导.

解：(1)$y=3x^{\frac{3}{2}}-x+5-9x^{-\frac{1}{2}}$，

$y'=3(x^{\frac{3}{2}})'-x'+5'-9(x^{-\frac{1}{2}})'=\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}-1+\frac{9}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

(2)$y=x^2+x^{-\frac{3}{2}}+x^{-2}\cos x$，

$y'=2x-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}+(x^{-2})'\cos x+x^{-2}(\cos x)'$

$=2x-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}-2x^{-3}\cos x-x^{-2}\sin x$.

评注：化简后避免了使用商的运算法则，减少了运算量.

即学即练 1

求函数 $f(x)=\frac{x(x+1)^2+2}{x+2}$ 的导数.

求导运算时的两点注意

导数是研究函数问题的重要工具，其中求导运算起着关键性的作用，为此在求导运算中要特别注意以下两点.

1. 注意分清函数的构成

例1 下列求导运算正确的是(　　)

A. $f'(x)=(\ln 2+\lg x)'=\frac{1}{2}+\frac{1}{x\ln 10}$

B. $f'(x)=(x^2+2^x)'=2x+x\cdot 2^{x-1}$

C. $f'(x)=(\sin x-\cos 68°)'=\cos x+\sin 68°$

D. $f'(x)=(\ln x-x)'=\frac{1-x}{x}$

答案：D

分析：先分清原函数是由哪些基本初等函数构成，再用相应的公式求导：A选项是一个常数与一个对数函数的和的导数，分别用公式$(c)'=0$，$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$；B选项是一个幂函数与一个指数函数的和的导数，分别用公式$(x^n)'=nx^{n-1}(n\in\mathbf{Q}^*)$，$(a^x)'=a^x\ln a$；C选项是一个三角函数与一个常数的差的导数，分别用公式$(\sin x)'=\cos x$，$(c)'=0$；D选项是一个自然对数函数与一个幂函数的差的导数，分别用公式$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，$(x^n)'=nx^{n-1}(n\in\mathbf{Q}^*)$.

解：A中：$f'(x)=(\ln 2+\lg x)'=(\ln 2)'+(\lg x)'=0+\frac{1}{x\ln 10}=\frac{1}{x\ln 10}$；B中：$f'(x)=(x^2+2^x)'=(x^2)'+(2^x)'=2x+2^x\ln 2$；C中：$f'(x)=(\sin x-\cos 68°)'=(\sin x)'-(\cos 68°)'=\cos x-0=\cos x$；D中：$f'(x)=(\ln x-x)'=(\ln x)'-x'=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$.

综上可知，只有D选项正确.

点拨：从中可以意识到准确选用求导公式是正确求导的前提，而选用公式的关键又在于仔细分析原函数是由哪些基本初等函数构成的.

2. 注意合理选用求导法则

例2 有下列四组函数及其导数：

①$f(x)=x\ln x$ 与 $f'(x)=\frac{1}{x}$；

②$f(x)=(1-2x)^2$ 与 $f'(x)=2(1-2x)$；

③$f(x)=\frac{x^2-1}{2-x}$ 与 $f'(x)=\frac{-x^2+4x-1}{x^2-4x+4}$.

其中，错误的是______(填上所有错误选项的序号).

答案：①②

分析：先辨明两个基本初等函数之间是什么运算，再用相应的导数运算法则求导：①是求积的导数，要用法则$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$，不能错误地认为$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g'(x)$；②是复合函数的求导，要用法则$y'_x=y'_u\cdot u'_x$；③是求商的导数，要用法则$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}(g(x)\neq 0)$，不能错误地认为$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

解：①$f'(x)=(x\ln x)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$；②$f(x)=(1-2x)^2$ 可看做函数 $y=u^2$ 和 $u=1-2x$复合而成，则有 $f'(x)=(u^2)'\cdot(1-2x)'=8x-4$；③$f'(x)=\left(\frac{x^2-1}{2-x}\right)'=\frac{(x^2-1)'(2-x)-(x^2-1)(2-x)'}{(2-x)^2}=\frac{-x^2+4x-1}{x^2-4x+4}$.

综上可知，前两个是错误的.

点拨：从中可以意识到合理选用运算法则是正确求导的保障，而选用法则的关键又在于细心辨明两个基本初等函数之间是什么运算.

例析复合函数求导

对复合函数求导应该就每层的函数分别求导之后再求它们的积. 这就要求同学们首先必须找准各层函数都是什么，其次还应了解、掌握求解中的一些技巧. 本文通过几例为大家做进一步的解释，希望能给同学们一定的启发.

1. 复合函数的判断

判断复合函数的复合关系的一般方法是：从外向里分析，最外层的主体函数结构是以基本函数为主要形式，各层的中间变量结构也都是基本函数关系，这样一层层分析，最里层应是关于自变量的基本函数或关于自变量的基本函数经过有限次四则运算而得到的函数.

例 1 指出下列函数的复合关系:

(1)$y=\dfrac{1}{(2-5x)^3}$;

(2)$y=\ln\sqrt{x^3+2}$.

分析:由复合函数的定义可知,中间变量的选择应是基本函数的结构.

解:(1)由 $y=u^{-3}$,$u=2-5x$ 复合而成;

(2)由 $y=\ln u$,$u=v^{\frac{1}{2}}$,$v=x^3+2$ 复合而成.

评注:只有分清复合函数是由哪些基本函数复合而成的,才能正确地求解复合函数的导数.

2. 直接用复合函数的求导方法求导

复合函数的求导法则:复合函数 $y=f(g(x))$ 的导数和函数 $y=f(u)$,$u=g(x)$ 的导数间的关系为 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.即 y 对 x 的导数等于 y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积.

例 2 设曲线 $y=e^{ax}$ 在点(0,1)处的切线与直线 $x+2y+1=0$ 垂直,则 $a=$________.

答案:2

分析:先求解 $y=e^{ax}$ 的导函数,再求解它在(0,1)处的导数值,利用线线垂直的斜率关系求解即可.

解:$y'=ae^{ax}$,所以切线的斜率 $k=y'|_{x=0}=a$,

所以由 $a\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$,得 $a=2$.

评注:注意 $y=e^{ax}$ 的导数等于 $(ax)'$ 和 e^{ax} 的乘积,原函数的导数是运用了基本初等函数 $(e^x)'=e^x$ 这一结论求解的.

例 3 求函数 $y=\sin^2\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的导数.

分析:选择中间变量是复合函数求导的关键,求导时需要记住中间变量,注意逐层求导,不遗漏,其中还应特别注意中间变量的关系,求导后,要把中间变量转换成自变量的函数.

解:$y'=\left[\sin^2\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]'$

$=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left[\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]'$

$=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)'$

$=3\sin\left(6x+\dfrac{\pi}{2}\right)=3\cos 6x$.

评注:对于复合函数的求导,要注意分析问题的具体特征,灵活恰当地选择中间变量,切不可机械地照搬某种固定的模式,否则会使确定的复合关系不准确,不能有效地进行求导运算.

3. 先化简再求导

对于超过二层的复合函数求导,如果能化简,应先化简后再求导.

例 4 求 $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ 的导数.

分析:因为题目所给函数是由三层函数复合而成的,如果直接求导,将会很麻烦,注意到这是一个对数函数,能利用对数的性质先化简.

解:$f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}=\dfrac{1}{2}[\ln(1+x^2)-\ln(1-x^2)]$,

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}-\dfrac{-2x}{1-x^2}\right)$

$=\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{x}{1-x^2}$.

评注:对于解析式复杂的复合函数求导,特别是由二层以上复合而成的函数,若能先对其化简然后再对其求导,则求解过程非常方便、快捷.

名师导学

即学即练 2

1. 求 $y=(1+2x^2)^8$ 的导数.

2. 求 $y=\sin^2\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的导数.

3.(2011·湖北)放射性元素由于不断有原子放射出微粒子而变成其他元素,其含量不断减少,这种现象称为衰变.假设在放射性同位素铯 137 的衰变过程中,其含量 M(单位:太贝克)与时间 t(单位:年)满足函数关系:$M(t)=M_0 2^{-\frac{t}{30}}$,其中 M_0 为 $t=0$ 时铯 137 的含量.已知 $t=30$ 时,铯 137 含量的变化率是 $-10\ln 2$(太贝克/年),则 $M(60)=$( )

A. 5 太贝克　　B. 75ln 2 太贝克

C. 150ln 2 太贝克　　D. 150 太贝克

易错点 辨析法

导数运用中的易错点

导数是研究函数性质的有力工具,但如果对导数的概念、性质和运算等理解不到位,就容易造成会而不对,对而不全的现象.示例如下:

1. 因混淆"曲线过一点的切线"与"曲线在该点处的切线"两个概念而致错

例 1 求曲线 $y=x^3+3x^2-5$ 过点 $M(1,-1)$ 的切线方程.

错解:由 $y=x^3+3x^2-5$,知 $y'=3x^2+6x$,

$\therefore y'|_{x=1}=9$.

故所求切线方程为 $y+1=9(x-1)$,

即 $9x-y-10=0$.

剖析:曲线过点 M 的切线与曲线在点 M 处的切线是不同的.曲线在点 M 处的切线是指切点是点 M 的切线,曲线过点 M 的切线还可能存在切点不是点 M 的另一条切线,两者是有区别的.

正解:由 $y=x^3+3x^2-5$,知 $y'=3x^2+6x$.

设切点为 $P(x_0,y_0)$,则 $y'|_{x=x_0}=3x_0^2+6x_0$,

故曲线在点 P 处的切线方程为

$y-y_0=(3x_0^2+6x_0)(x-x_0)$.

又切线过点 $M(1,-1)$,

则 $-1-y_0=(3x_0^2+6x_0)(1-x_0)$,

整理得 $y_0=3x_0^3+3x_0^2-6x_0-1$.

而点 $P(x_0,y_0)$ 在曲线上,则 $y_0=x_0^3+3x_0^2-5$,

$\therefore x_0^3+3x_0^2-5=3x_0^3+3x_0^2-6x_0-1$,

整理得 $x_0^3-3x_0+2=0$.

即 $(x_0-1)^2(x_0+2)=0$,$\therefore x_0=1$ 或 $x_0=-2$.

则切点为 $P(1,-1)$ 或 $P(-2,-1)$,

故所求的切线方程为 $9x-y-10=0$ 或 $y=-1$.

2. 因对题意理解不清而致错

例 2 已知函数 $f(x)=-x^3+ax^2+b(a、b\in\mathbf{R})$,若 $f(x)$ 图象上任意不同的两点连线的斜率小于 1,求 a 的取值范围.

错解:$f'(x)=-3x^2+2ax$,设 $f(x)$ 图象上任意不同的两点连线的斜率为 k,则 $k=f'(x)<1$,

即 $-3x^2+2ax-1<0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,

$\therefore \Delta=(2a)^2-12<0$,$\therefore -\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$.