



联合批量问题的 建模与优化方法

王海英 丁 华◎著



科学出版社

联合批量问题的建模与优化方法

王海英 丁华 著

本书为国家自然科学基金青年项目“具有能力约束的供应链系统联合批量问题研究”(71001021)及东北大学工商管理学院“985 工程”建设项目成果

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要针对供应链系统批量决策问题中的两大类问题进行了建模与优化：一是研究了时变运输周期影响下的供应链系统批量决策问题的建模和优化方法，在对时变运输周期进行描述和建立模型函数的基础上，分别对周期性补货和 JIT 补货模式下的供应链系统进行了研究；二是针对具有能力约束的供应链系统批量决策问题进行了研究，在对具有能力约束问题结构属性进行分析的基础上，主要针对中间级具有能力约束的批量决策问题进行了求解。

本书可供高等学校管理科学与工程、物流管理等相关专业的高年级本科生和研究生学习参考，也可供从事供应链管理、生产管理等相关工作的读者参阅。

图书在版编目 (CIP) 数据

联合批量问题的建模与优化方法 / 王海英, 丁华著. —北京：
科学出版社, 2012. 4
ISBN 978-7-03-033900-3
I. ①联… II. ①王… ②丁… III. ①供应链管理 IV. ①F252
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 051852 号

责任编辑：马 跃 / 责任校对：黄江霞
责任印制：张克忠 / 责任设计：蓝正设计

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮 政 编 码：100717

<http://www.sciencep.com>

骏 主 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 4 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2012 年 4 月第一次印刷 印张：9

字数：180 000

定 价：50.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)



前 言

在很多情况下，产品从原材料采购至送达最终消费者手中这一供应链系统是由一系列紧密相关、相互影响的多个环节组成的。在企业的经营实践中，同一个供应链系统中不同环节的成员通常都是从自身的运作成本和效率出发，独立进行决策的。这不仅使得供应链系统总体运作效率不高，而且每个企业本身的运作成本也很高。供应链系统联合批量决策问题就是从供应链的角度出发，对系统中的生产、库存和运输等问题进行统一决策，以实现供应链系统的整体最优。

针对供应链系统联合批量决策的研究有很多，本书在相关文献研究的基础上，主要研究了两类问题：一类是研究了在时变运输周期影响下，供应链系统批量决策问题的建模和优化方法；另一类是针对具有能力约束的供应链系统批量决策问题进行了研究。

运输周期呈现时变特征是我国特有的一种现象，其表现最为显著的就是“春运”。受此影响的企业在生产经营实践中，由于缺少相应的科学方法，只能采用简单备货或提前运输等策略，导致常常出现产品大量积压或者客户需求不能得到正常保证的现象。基于此，本书通过对时变运输周期的描述和其对系统批量决策问题的影响机制分析，采用数学优化方法对受时变运输周期影响显著的供应链系统的联合批量问题进行建模分析和求解，为企业的实际决策提供决策支持和依据。在供应链系统中，每个环节都有可能面临能力约束的问题。在具有能力约束的情况下，供应链系统成员之间的联合决策就显得更加重要，求解方法也更加复杂。本书从具有能力约束问题的一般结构属性分析入手，在改进现有求解方法的基础上，针对供应链系统的中间级成员具有能力约束的系统批量决策问题建立了新的求解方法。

本书是对国家自然科学基金委员会资助项目的总结和应用。本书的第3~5章由丁华撰写，其余章节由王海英撰写。需要指出的是，本书反映了研究的阶段性成果，由于作为研究对象的批量系统十分复杂，且处于不断的变化之中，所以本书不足之处在所难免，敬请各位专家学者不吝赐教。

感谢国家自然科学基金委员会（基金项目编号：71001021）以及东北大学工商管理学院“985工程”建设项目的资助。

王海英
东北大学
2011年11月

目 录

前言

第一篇 供应链系统批量决策问题概述

第1章

	引言	3
1.1	批量概述	3
1.2	批量问题的研究现状	4
1.3	影响批量决策的因素	6
1.4	生产批量问题的分类	9
1.5	批量问题的研究方法	12
1.6	批量问题的时间复杂度	15
1.7	本章小结	16

第2章

	批量问题的基本模型	18
2.1	经济批量模型	18
2.2	动态批量模型	23
2.3	供应链环境下的联合批量模型	28
2.4	本章小结	31

第二篇 时变运输周期影响下的供应链系统批量模型

第3章

	供应链环境下的时间管理	35
3.1	供应链系统中时间因素的分类	35
3.2	时间因素对供应链系统决策的影响	36
3.3	包含时间因素的动态批量问题研究现状	38
3.4	本章小结	39

第4章	供应链环境下的运输问题	41
4.1	运输的概念	41
4.2	供应链系统中运输的功能	42
4.3	运输问题的相关文献研究	42
4.4	实际运作中时变运输周期问题	45
4.5	本章小结	47
第5章	时变运输周期对联合批量问题的影响分析	49
5.1	时变运输周期的特征及模型建立	49
5.2	受时变运输周期影响显著的供应链系统的特征	55
5.3	时变运输周期对系统批量决策的影响机制	57
5.4	本章小结	62
第6章	时变运输周期对周期性补货系统批量决策的影响	64
6.1	本章引言	64
6.2	问题描述和基本假设	65
6.3	总成本函数模型建立	66
6.4	极值解性质分析	67
6.5	问题求解	68
6.6	算例及敏感性分析	69
6.7	本章小结	70
第7章	时变运输周期对 JIT 供货系统批量决策的影响分析	71
7.1	JIT 补货研究综述	71
7.2	问题描述和基本假设	73
7.3	总成本函数模型建立	73
7.4	运输周期呈线性趋势变化的求解	76
7.5	运输周期呈非线性趋势变化的求解	77
7.6	算例及敏感性分析	80
7.7	本章小结	82

第三篇 具有能力约束的供应链系统批量问题

第 8 章

	具有能力约束的批量问题的研究概述	87
8.1	具有能力约束的批量问题研究综述	87
8.2	基本概念介绍	88
8.3	常用的重要理论	91
8.4	具有常数能力约束的批量问题的一般求解规则	93
8.5	本章小结	94

第 9 章

	具有能力约束批量问题的模型建立及求解	95
9.1	具有能力约束批量问题的模型建立	95
9.2	具有能力约束的批量模型的结构分析	97
9.3	具有能力约束的供应链系统批量问题的求解	99
9.4	本章小结	106

第四篇 决策支持系统的开发

第 10 章

	企业批量决策支持系统的开发	111
10.1	系统设计	111
10.2	系统功能介绍	113
10.3	本章小结	120

第五篇 结论

第 11 章

	总结与展望	123
11.1	全书总结	123
11.2	主要创新点	125
11.3	研究展望	126
	参考文献	127

第一篇

供应链系统批量决策 问题概述

本篇将对批量问题进行概述，包括第1章和第2章。其中第1章是引言部分，主要介绍什么是批量问题、批量问题的研究现状、批量问题决策中需考虑的因素以及批量问题求解的基本研究方法。第2章针对批量问题发展进程中的三个基本的批量模型进行了描述，包括经济批量模型、动态批量模型和联合批量模型。

第1章

引言

1.1 批量概述

生产批量是企业生产和管理中的重要问题，利用生产批量优化模型来有效组织企业的生产、采购及配送活动，是企业降低生产成本、提高利润率的关键环节。经济全球化以及企业之间竞争的加剧使得对这一问题的研究越来越重要。企业的竞争力是企业生存和发展的关键因素之一，为保证在激烈的市场竞争中生存并获胜，企业需要不断地提升其竞争力。企业竞争力的提升涉及多方面因素，包括有效的组织生产、采购以及合理的运输配送等，力争企业的生产、采购及运输成本降到最低，促使企业利润最大化以及使顾客的满意度达到最高。由于不管是生产计划、采购计划还是运输配送计划，都需要确定每个时间周期内的产品的数量，因此生产、采购和配送计划的研究实际上可以归于同一类问题，三者的目标都是在满足产品需求的同时减少产品库存量，以使得获取这些产品的总成本最小。

生产批量就是在一个给定的生产周期 T 内，决定在哪些生产时间段 $t(1 \leq t \leq T)$ 生产以及生产多少，以满足每个时间周期的产品需求。由于在每个生产批量之间都存在生产准备成本，若在每个时间段 t 内都安排生产，则会导致生产准备成本的增加；另一方面，若为了减少生产准备成本，而在某个时间段 t 内生产大量产品，则会带来库存成本的增加。因此，生产批量问题的决策目标就是在满足需求的情况下使所有的成本之和达到最小^[1]。

下面通过建立简单的模型对生产批量问题进行描述。其符号定义如下：

- (1) T : 表示决策周期。
- (2) t : 表示时间点($t=1, 2, \dots, T+1$)；同时表示决策时期($t=1, 2, \dots, T$)；从时间点 t 至 $t+1$ 表示 t 时期。
- (3) d_t : 表示 t 时期的需求量。

(4) I_t : 表示 t 时期的期初库存量。

(5) S_t : 表示 t 时期的生产/采购/运输启动成本。

(6) H_t : 表示 t 时期的库存成本, 是 t 时期库存水平 I_t 的函数。

(7) x_t : 表示 t 时期的决策量(生产/采购/运输量)。

用 I_0 表示系统的初始库存量, 那么第 t 个时期的库存量可表示为

$$I_t = I_0 + \sum_{j=1}^{t-1} x_j - \sum_{j=1}^{t-1} d_j \geqslant 0 \quad (1-1)$$

在不考虑缺货的情况下, 系统的总成本函数为

$$TC = \sum_{t=1}^T [\delta(x_t)S_t + H_t(I_t)] \quad (1-2)$$

其中,

$$\delta(x_t) = \begin{cases} 0, & \text{if } x_t = 0 \\ 1, & \text{if } x_t > 0 \end{cases} \quad (1-3)$$

批量问题就是求得每个时期 x_t 的最优值, 使得总成本函数(1-2)的值最小。

1.2 批量问题的研究现状

生产批量问题是成批生产计划的重要问题之一, 其早期研究一般以库存问题的形式出现。库存是指企业组织中存储的各种物品与资源的总和, 是生产系统运行管理中一个不容回避的现象。一般来说库存涉及企业系统所有输入要素和输出要素。输入要素如人力、资金、设备、原材料、能源等, 输出要素如制成品(产品、零部件)、转换过程中各环节之间的半成品或在制品等。总之, 凡是企业内部暂时存放起来用于将来使用的资源都可以认为是库存。从理论上讲, 库存本身是一种浪费, 正如其定义所揭示的那样, 库存属于闲置的资源, 这意味着它不但不会创造价值, 反而会因占用资源而增加企业的成本。相反, 如果物料连续转化, 就会使资源得到充分的利用, 创造更多的价值。而从现实的情况来看, 库存又是不可避免的。要实现物料的连续转化, 彻底消除库存的前提条件是所有相关因素必须处于管理者的完全控制和掌握之中。企业内外部的各个环节之间必须绝对平衡和协调, 这显然是不可能的。因此在实际操作中要求保持合理水平的库存, 以发挥其缓冲和调节作用。企业或公司通常出于以下具体原因而保持一定的库存: 平衡生产运作过程上、下道工序或环节的生产率差异; 隔离生产和销售过程, 满足市场需求的变化; 克服供应商交货时间的波动; 增强生产计划的柔性; 利用数量折扣防止通货膨胀和价格波动。因此库存管理必须树立以下指导思想: 一方面牢记库存本质上属于浪费, 应不断改善企业的生产经营管理, 尽可能实现

零库存；另一方面，要立足现实，认真分析企业的实际情况，设计和维持合理的库存水平，在尽力消除浪费的基础上确保生产经营过程的正常进行。

1913年，针对库存管理存在的问题，Harris^[2]提出了经济订购批量(economic order quantity, EOQ)模型，EOQ模型是连续计划周期、单产品、单层无能力约束、静态需求、计划周期均为无限的生产批量模型。由于EOQ模型涉及的假定过于严格，随后被拓展为经济批量问题(economic lot scheduling problem, ELSP)模型^[3,4]，ELSP模型是连续计划周期、多产品、单层能力约束、静态需求、计划周期均为无限的生产批量模型。EOQ模型的最优解容易获取，而ELSP模型是NP-hard问题(non-deterministic polynomial problem)^[5]。

直到20世纪50年代中期，主要研究还是集中在需求恒定条件下无能力约束的生产批量问题。20世纪50年代后期，动态经济批量问题(需求随离散的时间段 t 的变化而变化的批量问题)和能力约束批量问题开始受到重视。1958年，Wagner和Whitin^[6]提出了动态经济批量问题模型，给出一个时间复杂度为 $O(T^2)$ 的动态规划(dynamic programming)算法(简称WW算法)；Manne^[7]提出了整体生产计划(aggregate production planning, APP)问题的混合整数规划(mixed integer programming, MIP)模型和启发式算法。他们将整个生产周期 T 划分为离散的时间段 t ($1 \leq t \leq T$)，并且每个时间段 t 上的需求事先已知。但这些研究仍限于讨论单层批量问题，1968年，Schussel^[8]首次讨论了串联生产系统的批量问题，同时，物料需求计划(material requirements planning, MRP)系统在生产企业中被广泛接受，大大促进了多层次批量问题的研究。随后，对批量问题的研究不断深入，从不同的角度出发，建立了不同的批量模型。

一方面，目前有许多生产企业只是简单的、单一品种的组装型或者加工型企业，并且其生产能力可以无限大；另一方面由于在研究无能力约束生产批量问题的各种扩展能力约束、延迟交货等之前，有必要首先考虑相对简单的无能力约束生产批量问题，因此单产品批量问题是研究多产品以及其他更加复杂批量问题的前提和基础。此外对于许多复杂的生产批量问题，诸如能力约束的单产品批量问题、能力约束的多产品、多层次批量问题，其解决方法是通过问题分解得到无能力约束的单产品批量问题的子问题。

有关无能力约束的单产品生产批量问题的扩展研究目前主要集中在延迟交货、多供应商、易变质产品、产品再制造与时间窗口等方面。1969年，Zangwill^[9]提出了一种强多项式动态规划算法来解决交货延迟时间有周期数限制和凹的库存成本及延期交货成本函数条件下的批量问题。Wagelmans等^[10]指出具有线性生产、库存和延期交货成本函数的批量问题可以在 $O(T \log T)$ 时间内求解。通过引入一个新的变量 W_{jkt} ，表示周期 t 内从 j 工厂转移到 K 工厂的产品数量。关于产品再制造的无能力约束批量问题是指在某个时间周期内的部分需求可以通过

过前一个周期所生产产品的重新加工获取。时间窗口问题最近也被引入到批量问题的研究中。除此之外还有滚动周期问题、损失销售问题以及库存受限问题等。

就大部分生产企业来说，由于生产能力、生产原料、机器、人力等无限制的假定是不现实的，由此产生了能力约束生产批量问题。实际上，每一时间周期内的能力约束是可以计算或估计的，或者可以通过统计方法来得到一个平均值。能力约束生产批量问题的复杂度取决于能力约束参数的结构，它们通常都是 NP-hard 问题，但并非是强 NP-hard 问题。对于一些特殊的能力约束批量问题应用拟多项式 (pseudo-polynomial) 算法是可以解决的。1996 年，van Hoesel 和 Wagelmans^[11] 运用时间复杂度为 $O(T^3)$ 的算法解决了生产成本是凹函数、库存成本是线性函数的能力约束批量问题。1998 年，Vanderbeck^[12] 考虑启动时间并假设能力约束独立于时间周期，运用时间复杂度为 $O(T^6)$ 的算法解决了能力约束批量问题。2006 年，Brahimi 等^[13] 总结了迄今为止多项式时间内可解的能力约束批量问题。

Kirca 和 Kokten^[14] 认为， N 种单级、多产品无能力受限批量问题可以分解为 N 种单级、单产品无能力受限批量问题。因此单级、多产品无能力受限批量问题的研究主要集中在转换为单级、单产品无能力受限批量问题上。

1.3 影响批量决策的因素

批量问题建模与求解的复杂性取决于优化模型中所考虑的因素多少以及相应的结构。Karimi 等^[15] 认为影响生产批量问题的分类、建模以及求解复杂性的因素主要有以下几种。

1) 计划周期

计划周期 (planning horizon) 是指生产计划执行的时间跨度，计划周期可以是有限或无限的 (finite or infinite)。在有限生产周期内通常满足的是动态需求 (dynamic demand)，而在无限的计划周期内则满足的是静态需求 (stationary demand)。另外，从观测点考虑，可以将生产批量问题分为连续型 (continuously) 或者离散型 (discrete) 生产批量问题。根据时间段 t 内生产的产品种类数，可以将生产批量问题分为大桶 (big bucket) 和小桶 (small bucket) 问题。大桶问题是指在某一时间段 t 内可以生产多种产品 (多产品情况)，而小桶问题是指在某一时间段 t 内只能生产一种产品 (单产品情况)。另外一个关于生产周期 T 的变量是滚动周期 (rolling horizon)，在初始数据不确定的情况下，制订生产周期 T 内的“最优”生产计划只能看做是一种启发式 (近似) 生产计划，而不能保证是最优生产计划，通过滚动周期的研究可以不断调整生产计划的最优性。

2) 系统层级数目 (number of levels)

生产系统可以是单层的 (single level) 或者多层的 (multilevel)。在单层系统中，原材料(半成品)经过简单加工(组装)就成为最终产品，如铸造业，也就是说，最终产品直接来自于原材料或半成品的加工或组装，而没有中间加工过程。产品需求是直接来自于顾客订单或者市场预测，这种需求称之为独立性需求 (independent demand)。而在多层系统中，原材料经过一系列加工后成为最终产品，某加工层的输出是下一层的输入，因此在某一层的需求依赖于其上一层的输出，这种需求称之为相关性需求 (dependent demand)。根据多层生产结构之间的关系可以将多层系统批量问题分为串联型 (serial)、组装型 (assembly) 和一般型 (general)，如图 1-1 所示。

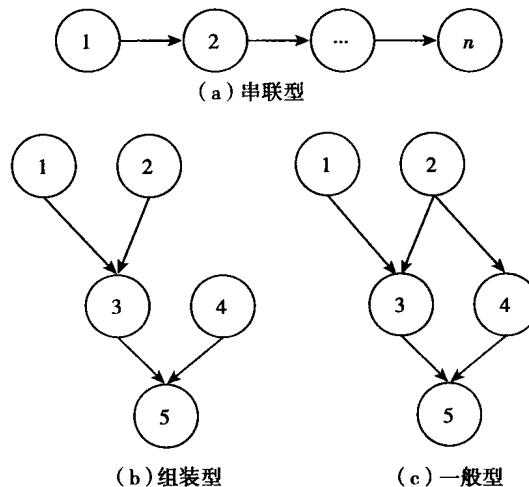


图 1-1 多层系统批量问题的生产结构关系

3) 价格

按在计划期内是否随时间的变化而变化，价格 (price) 可分为固定定价和动态定价。固定定价是指价格决策一旦确定，价格在计划期内保持不变，是常数，甚至需求是动态的时候，价格仍然可以是固定的。动态定价是指价格在计划期内随时间的变化而变化，可能是需求量、库存水平或其他参数的函数。

4) 产品的种类数量

生产系统里的最终产品的种类数量 (number of products) 是影响系统模型复杂性的另一个重要因素。生产系统主要包括单产品生产系统和多产品生产系统。多产品的批量问题要比单产品的批量问题的求解更为复杂。

5) 能力约束

生产系统里的资源或者能力约束 (capacity) 体现在人力、机器设备、财政预

算等方面。当系统没有资源限制的情况下，称之为无能力限制的生产批量问题；当这些资源有限制时，称之为有能力约束的生产批量问题。能力约束是生产批量问题研究的一个重要方面，同时也是影响生产批量问题求解复杂性的重要因素之一。

(1) 无能力约束的问题：在无能力约束的问题中，各个节点不同时期的最大批量值是无限的。无能力约束的问题解法比较简单，可采用一般的动态规划方法求得^[16,17]。

(2) 有能力约束的问题(capacitated lot-sizing problem, CLSP)：能力约束多见于生产能力约束或者运输能力约束。对于多级供应链(supply chain)系统的动态批量决策，在一定条件下，对于一个节点具有常数能力约束的问题能够通过多项式算法获得最优解；而对于多个节点的具有能力约束的问题或者能力约束不是常数的情况，一般是NP-hard问题，只能采用启发式算法求得可行解^[18~20]。

6) 产品是否变质

由于某些产品存在变质(deterioration)的可能性，库存产品的持有时间也是批量问题面临的一种约束。因此产品是否变质也是影响批量问题求解复杂性的重要因素。产品的变质性是指有些产品具有一定的保质期，如水果、蔬菜、牛奶、药品等，有些产品具有挥发性，如酒精、汽油等，有些产品具有较高的无形损耗，如高科技电子产品等，这些产品都具有变质性。

7) 需求

需求(demand)是影响生产批量问题建模和求解复杂性的重要因素之一。按在计划期内是否随时间的变化而变化，需求分为静态需求和动态需求。显然，静态需求是指需求在计划期内不随时间的变化而变化；动态需求是指需求在计划期内随时间的变化而变化。按是否预先可知，需求可以分为确定性需求(deterministic)和随机性需求(probabilistic)。确定性需求是指需求预先已知；随机性需求是指需求服从某种概率分布。按某种产品的需求与其他产品是否关联，需求分为独立性需求和相关性需求。独立性需求是指该产品的需求不取决于其他产品的批量决策，单阶段批量问题中的需求就是独立性需求；在多阶段批量模型中，物料间存在母子关系，当前阶段的需求由上一阶段(母阶段)的需求决定时，当前阶段的需求就是相关性需求。动态的相关性需求批量问题比静态的(或独立性)需求批量问题复杂得多，随机性需求批量问题比确定性需求批量问题复杂得多。本书主要研究动态的独立性需求批量模型。

8) 生产准备成本的结构(setup structure)

生产准备成本(setup cost)或者生产准备时间(setup time)在数学建模时通常引入0-1变量，它也是影响生产批量问题求解复杂性的主要因素之一。根据不同

的生产准备成本结构形式，系统的目标函数主要包括线性及固定成本(fixed charge)形式、一般的凹函数形式和跃阶(stepwise)函数形式等。不同的函数形式具有不同的性质和解法。

(1) 线性及固定成本形式：在动态批量问题的早期文献中，大部分文献中的函数都采用线性或只有固定成本的形式。

(2) 一般的凹函数形式：这种函数形式能够更真实地反映企业的实际情况，并被越来越多的文献所采用，其解法却更复杂。约束条件为凸集的凹函数的最小值取在极值点上。

(3) 跃阶函数形式：这类函数多用于运输问题中，其含义是无论每次的批量(装载量)是多少，每批都会产生一个固定的启动成本，每增加一个批次(step)，都会增加一个额外的固定成本。此类函数结构的难点在于虽然其是递增函数，但既非凸函数也非凹函数，解法也比较特殊。

9) 缺货

是否允许缺货(inventory shortage)是影响建模和算法时间复杂度的一个重要因素。批量问题可以分为允许缺货的批量问题和不允许缺货的批量问题。允许缺货批量模型包含未被满足的需求只允许延迟而不允许放弃批量模型、未被满足的需求只允许放弃而不允许延迟批量模型、未被满足的需求既允许延迟又允许放弃批量模型。

1.4 生产批量问题的分类

影响生产批量问题的分类、建模以及求解复杂性的因素有很多，但是对批量问题的研究主要分为三种类型，即无能力受限单产品生产批量问题、能力受限单产品生产批量问题以及多产品、单(多)级生产批量问题。

1.4.1 无能力受限单产品生产批量问题

单产品批量问题是研究多产品以及其他更加复杂的批量问题的前提和基础，因此，研究文献多集中在单产品批量问题研究。单产品生产批量问题获得如此多的关注是由于它相对简单，并且它可以作为许多相对复杂的生产批量问题的子问题。研究无能力受限单产品生产批量问题主要是基于以下几个原因：

(1) 目前有许多生产企业只是简单的、单一品种的组装型(或者是加工型)企业，并且其生产能力可以无限大；

(2) 在研究无能力受限生产批量问题的各种扩展(能力约束、延迟交货等)之

前，有必要首先考虑此基本问题；

(3)对于许多复杂的生产批量问题，诸如能力受限的单产品批量问题、能力受限的多产品、多层次批量问题，其解决方法是通过问题分解得到涉及无能力受限单产品批量问题的子问题，因此研究无能力受限单产品批量问题具有重要意义。

Wagner 和 Whitin^[6]首先研究了无能力受限单产品生产批量问题，在其模型中生产能力是非受限的且无延期交货，启动成本是常数，生产和库存成本函数是线性函数，并提出了一个时间复杂度为 $O(T^2)$ 的动态规划算法。动态规划算法通过枚举可行解空间从而获取最优解，利用最优解属性可以将搜索空间减少到至多 $T(T+1)/2$ 。目前，有关无能力受限单产品生产批量问题的研究主要集中在扩展研究方面，诸如延迟交货、多供应商(工厂)(multiple-facilities)、变质商品、产品再造(remanufacturing)与时间窗口(time windows)等。

针对涉及延期交货的无能力受限批量问题，Zangwill^[9]提出了一种强多项式动态规划算法来解决具有以下特征的批量问题：允许延迟交货，但交货的延迟时间周期数有限制，库存成本和延期交货成本函数为凹函数。Wagelmans 等^[10]指出，具有线性生产、库存和延期交货成本函数的批量问题可以在 $O(T \log T)$ 时间内求解。

针对涉及多供应商(工厂)的无能力受限批量问题，Zangwill^[9]考虑两种多供应商情形：并行(parallel)供应商和串行(series)供应商。在并行供应商情况下，供应商之间没有联系而相互独立，各自满足用户对自身的需求；在串行供应商环境中，一个供应商的输出是另外一个供应商的输入，最后一个供应商满足用户的需求。

涉及产品变质的无能力受限批量问题，需要考虑库存产品的变质率，同时库存成本依赖于库存产品的时间长短。这种产品可能是食品、蔬菜、化学产品以及食物等。除了连续时间下库存产品变质的生产批量问题，对于离散时间下的考虑产品变质的批量问题，Hsu^[5]基于图描述提出一个时间复杂度为 $O(T^4)$ 的动态规划算法。

涉及产品再造的无能力受限批量问题是指出在某个时间周期内的部分(全部)需求可以通过之前周期的所生产产品的重新加工获取。时间窗口问题是最近才被引入到批量问题中的。除此之外还有滚动周期问题、损失销售问题以及库存受限问题等。

1.4.2 能力受限单产品生产批量问题

就大部分生产企业来说，其生产能力(生产原料、机器、人力等)无限制的假定是不现实的，由此产生了能力受限生产批量问题。实际上，每一时间周期内的