高等学校本科数学规划教材

# 线性代数

# Linear Algebra

张德全 耿秀荣 主编

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

東北大學出版社
Northeastern University Press

**图书在版编目（CIP）数据**

线性代数／张德全，耿秀荣主编. — 沈阳：东北大学出版社，2012.6
ISBN 978-7-5517-0162-4

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①张…　②耿…　Ⅲ.①线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料
Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 121995 号

**内容提要**

全书共 6 章和 2 个附录．涵盖了行列式、矩阵、线性方程组、二次型、向量空间与线性变换等线性代数的基本知识　每章都给出了用数学软件 Matlab 求解线性代数问题的内容．附录中给出了 2002—2009 年间全国硕士研究生入学考试数学试题中的线性代数试题和 2010 年、2011 年、2012 年全国硕士研究生入学考试数学试题与参考答案

本书叙述通俗易懂、深入浅出，着重介绍基本概念、基本理论和基本方法．在例题和习题选取上注意难易适中，附有习题参考答案．该书条理清楚，便于教学；说理透彻，利于理解；步骤详细，容易阅读；每节都有详尽注释，有助于学生掌握要点和方法．

本书可作为高等院校工科、经济、管理等本科专业的线性代数课程教材

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress. com
http：//www neupress. com
印 刷 者：沈阳市池陆广告印刷有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：185mm×260mm
印　　张：16
字　　数：410 千字
出版时间：2012 年 6 月第 1 版
印刷时间：2012 年 6 月第 1 次印刷
责任编辑：刘宗玉　刘乃义
责任校对：文　浩
封面设计：刘江旸
责任出版：唐敏志

ISBN 978-7-5517-0162-4　　　　定　价：28.00 元

# 《线性代数》编委会成员

主　编　张德全　耿秀荣

副主编　吴果林　刘静静　王彦辉

　　　　陈　凯　周立新　张超权

# 前　言

作为一门重要的基础课，线性代数在自然科学、工程技术和管理科学等诸多领域都有较大的应用；作为高等学校本科数学基础课程中的一门重要的必修课，线性代数是进一步学习许多相关的重要应用数学分支(如运筹学、数理统计、应用微分方程、矩阵论等)的必备基础. 为满足21世纪我国大力发展高等教育的需要，编者结合多年从事线性代数课程教学的经验和体会，编写了本书.

在编写过程中，我们坚持“以易读性为基点，以创新性为导向，以适用性为准绳，以应用性为目的”的编写原则，遵循高等教育的教学规律，力求叙述详明、推理严谨. 借鉴国内外诸多优秀教材的编写模式，并结合应用型高等院校本科生的实际情况，采取先易后难、层层递进的方式叙述. 在叙述和论证过程中，注重直观性、通俗性和实用性. 注意用实例引出概念，着重讲解基本概念、基本理论和基本方法. 叙述通俗易懂、深入浅出，在例题和习题选取上注意难易适中，并附有习题参考答案. 本书条理清楚，便于教学；说理透彻，利于理解；步骤详细，容易阅读；每节都有详尽注释，有助于学生掌握要点和方法. 本书的主要特色如下：

(1) 定位准确. 体现了应用型本科院校的特点，符合培养应用型人才的实际教学要求. 这不仅体现在内容的取舍上，还体现在例题和习题的选配上.

(2) 重视方法. 如把问题归结为矩阵，用矩阵的运算(线性运算、乘法、初等变换)解决问题.

(3) 主次分明. 本书尽量体现以学生为本、以学生为中心的教育思想，不为教而教. 注重培养学生的自学能力和扩展、发展知识能力，为学生今后的可持续性发展打好基础.

全书共分6章，主要内容有行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵与二次型、向量空间与线性变换. 内容既联系紧密又相对独立. 教师可根据不同专业和不同教学时数选择有关的章节进行教学.

另外，为了提高学生的学习兴趣，强化学生的计算机应用能力，本书每章后面都增添了用数学软件 Matlab 解决线性代数问题的内容，详细介绍了如何运用简单的计算机命令解决复杂的线性代数问题.

本书由桂林航天工业学院张德全、耿秀荣任主编，由郑州轻工业学院刘静静博士和桂林航天工业学院的吴果林、王彦辉、陈凯、周立新、张超权任副主编. 全书由张德全教授负责统一审核.

本书可作为高等院校工科、经济、管理等本科专业的线性代数课程教材.

由于编者水平有限，书中内容、体系、结构不当甚至错误之处，敬请广大读者批评指正.

编 者

2012 年 4 月

# 目 录

# 绪　论

## 一、线性代数研究的内容、对象和任务

线性代数(Linear Algebra)是数学的一个分支，它的研究对象是向量、向量空间(或称线性空间)、线性变换和有限维的线性方程组. 向量空间是现代数学的一个重要课题，因而，线性代数被广泛地应用于抽象代数和泛函分析中；通过解析几何，线性代数得以被具体表示. 线性代数的理论已被泛化为算子理论. 由于科学研究中的非线性模型通常可以被近似为线性模型，因此线性代数被广泛地应用于自然科学和社会科学中.

线性代数有3个基本计算单元：向量(组)，矩阵，行列式. 研究它们的性质和相关定理，能够求解线性方程组，实现行列式与矩阵的计算和线性变换，构建向量空间和欧式空间.

线性代数的两个基本方法是构造(分解)和代数法，基本思想是化简(降解)和同构变换.

线性代数课程是高等学校理工科各专业学生的一门必修的重要基础理论课，它广泛应用于科学技术的各个领域. 尤其是计算机日益发展和普及的今天，线性代数已成为工科学生所必备的基础理论知识和重要的数学工具. 线性代数是为培养我国社会主义现代化建设所需要的高质量专门人才服务的. 通过本课程的学习，要使学生获得行列式、矩阵、向量组的相关性、矩阵的秩、线性方程组、特征值与特征向量、相似矩阵与二次型等方面的基本概念、基本理论和基本运算技能，为学习后继课程和进一步获得数学知识奠定必要的数学基础.

## 二、线性代数发展简史

研究关联着多个因素的量所引起的问题，需要考察多元函数. 如果所研究的关联性是线性的，那么称这个问题为线性问题. 历史上线性代数的第一个问题是关于解线性方程组的问题，而线性方程组理论的发展又促成了作为工具的矩阵论和行列式理论的创立与发展，这些内容已成为线性代数教材的主要部分. 最初的线性方程组问题大都来源于生活实践，正是实际问题刺激了线性代数这一学科的诞生与发展. 另外，近现代数学分析与几何学等数学分支的要求也促使了线性代数的进一步发展.

1. 矩阵和行列式

行列式出现于线性方程组的求解，它最早是一种速记的表达式，现在已经是数学中一种非常有用的工具. 行列式是由莱布尼茨和日本数学家关孝和发明的. 1693 年4 月，莱布尼茨在写给洛比达的一封信中使用并给出了行列式，并给出方程组的系数行列式为零的条件. 同时代的日本数学家关孝和在其著作《解伏题元法》中也提出了行列式的概念与算法.

1750 年，瑞士数学家克莱姆（G. Cramer，1704—1752）在其著作《线性代数分析导引》中，对行列式的定义和展开法则给出了比较完整、明确的阐述，并给出了现在我们所称的解线性方程组的克莱姆法则. 稍后，数学家贝祖（E. Bezout，1730—1783）将确定行列式每一

项符号的方法进行了系统化，利用系数行列式的概念指出了如何判断一个齐次线性方程组有非零解.

总之，在很长一段时间内，行列式只是作为解线性方程组的一种工具使用，并没有人意识到它可以独立于线性方程组之外，单独形成一门理论加以研究.

在行列式的发展史上，第一个对行列式理论作出连贯的逻辑的阐述，即把行列式理论与线性方程组求解相分离的人，是法国数学家范德蒙（A-T. Vandermonde，1735—1796）. 范德蒙自幼在父亲的指导下学习音乐，但对数学有着浓厚的兴趣，后来终于成为法兰西科学院院士. 特别地，他给出了用二阶子式和它们的余子式来展开行列式的法则. 就对行列式本身这一点来说，他是这门理论的奠基人. 1772 年，拉普拉斯在一篇论文中证明了范德蒙提出的一些规则，推广了他的展开行列式的方法.

继范德蒙之后，在行列式的理论方面，又一位作出突出贡献的就是另一位法国大数学家柯西. 1815 年，柯西在一篇论文中给出了行列式的第一个系统的、几乎是近代的处理. 其中主要结果之一是行列式的乘法定理. 另外，他第一个把行列式的元素排成方阵，采用双足标记法；引进了行列式特征方程的术语；给出了相似行列式的概念；改进了拉普拉斯的行列式展开定理并给出了一个证明等.

19 世纪的半个多世纪中，对行列式理论研究始终不渝的数学家之一是詹姆士·西尔维斯特（J. Sylvester，1814—1894）. 他是一个活泼、敏感、兴奋、热情甚至容易激动的人，然而由于是犹太人的缘故，他受到剑桥大学的不平等对待. 西尔维斯特用火一般的热情介绍他的学术思想，他的重要成就之一是改进了从一个 $n$ 次和一个 $m$ 次的多项式中消去 $x$ 的方法，他称之为配析法，并给出形成的行列式为零时这两个多项式方程有公共根的充分必要条件这一结果，但没有给出证明.

继柯西之后，在行列式理论方面最多产的人就是德国数学家雅可比（J. Jacobi，1804—1851），他引进了函数行列式，即“雅可比行列式”，指出函数行列式在多重积分的变量替换中的作用，给出了函数行列式的导数公式. 雅可比的著名论文《论行列式的形成和性质》标志着行列式系统理论的建成. 行列式在数学分析、几何学、线性方程组理论、二次型理论等多方面的应用，促使行列式理论自身在 19 世纪也得到了很大发展. 整个 19 世纪都有行列式的新结果，除了一般行列式的大量定理之外，还有许多有关特殊行列式的其他定理都相继问世.

2. 矩　阵

矩阵是数学中一个重要的基本概念，是代数学的一个主要研究对象，也是数学研究和应用的一个重要工具. “矩阵”这个词是由西尔维斯特首先使用的，他是为了将数字的矩形阵列区别于行列式而发明了这个术语. 而实际上，矩阵这个课题在诞生之前就已经发展得很好了. 从行列式的大量工作中可以明显地表现出来，为了很多目的，不管行列式的值是否与问题有关，方阵本身都可以研究和使用，矩阵的许多基本性质也是在行列式的发展中建立起来的. 在逻辑上，矩阵的概念应先于行列式的概念，然而在历史上次序正好相反.

英国数学家凯莱（A. Cayley，1821—1895）一般被公认为矩阵论的创立者，因为他首先把矩阵作为一个独立的数学概念提出来，并首先发表了关于这个题目的一系列文章. 凯莱将矩阵与研究线性变换下的不变量相结合，首先引进矩阵以简化记号. 1858 年，他发表了关于这一课题的第一篇论文《矩阵论的研究报告》，系统地阐述了关于矩阵的理论. 他在文中

定义了矩阵的相等、矩阵的运算法则、矩阵的转置以及矩阵的逆等一系列基本概念，指出了矩阵加法的可交换性与可结合性. 另外，凯莱还给出了方阵的特征方程和特征根(特征值)以及有关矩阵的一些基本结果. 凯莱出生于一个古老而有才能的英国家庭，在剑桥大学三一学院毕业后留校讲授数学，三年后转从律师职业，工作卓有成效，并利用业余时间研究数学，发表了大量数学论文.

1855 年，埃米特（C. Hermite，1822—1901）证明了别的数学家发现的一些矩阵类的特征根的特殊性质，如现在被称为埃米特矩阵的特征根性质等. 后来，克莱伯施（A. Clebsch，1831—1872）、布克海姆（A. Buchheim）等证明了对称矩阵的特征根性质. 泰伯（H. Taber）引入了矩阵的迹的概念并给出了一些有关结论.

在矩阵论的发展史上，弗罗伯纽斯（G. Frobenius，1849—1917）的贡献是不可磨灭的. 他讨论了最小多项式问题，引进了矩阵的秩、不变因子和初等因子、正交矩阵、矩阵的相似变换、合同矩阵等概念，以合乎逻辑的形式整理了不变因子和初等因子的理论，并讨论了正交矩阵与合同矩阵的一些重要性质. 1854 年，约当研究了矩阵化为标准形的问题. 1892 年，梅茨勒（H. Metzler）引进了矩阵的超越函数概念并将其写成矩阵的幂级数的形式. 傅立叶、西尔和庞加莱的著作中还讨论了无限阶矩阵问题，这主要是适用方程发展的需要而开始的.

矩阵本身所具有的性质依赖于元素的性质，矩阵由最初作为一种工具经过两个多世纪的发展，现在已成为独立的一门数学分支——矩阵论. 而矩阵论又可分为矩阵方程论、矩阵分解论和广义逆矩阵论等矩阵的现代理论. 矩阵及其理论现已广泛地应用于现代科技的各个领域.

3. 线性方程组

线性方程组的解法，早在中国古代的数学著作《九章算术 方程》中已作了比较完整的论述（根据《九章算术》中可供判定年代的官名、地名等来推断，现传本《九章算术》的成书年代大约是公元 1 世纪的下半叶）. 其中所述方法实质上相当于现代的对方程组的增广矩阵施行行初等变换从而消去未知量的方法，即高斯消元法. 在西方，线性方程组的研究是在 17 世纪后期由莱布尼茨开创的. 他曾研究含两个未知量的三个线性方程组成的方程组. 麦克劳林在 18 世纪上半叶研究了具有二、三、四个未知量的线性方程组，得到了现在称为克莱姆法则的结果. 克莱姆不久也发表了这个法则. 18 世纪下半叶，法国数学家贝祖对线性方程组理论进行了一系列研究，证明了 $n$ 元齐次线性方程组有非零解的条件是系数行列式等于零.

19 世纪，英国数学家史密斯（H. Smith）和道奇森（C-L. Dodgson）继续研究线性方程组理论，前者引进了方程组的增广矩阵和非增广矩阵的概念，后者证明了 $n$ 个未知数 $n$ 个方程的方程组相容的充要条件是系数矩阵和增广矩阵的秩相同. 这正是现代方程组理论中的重要结果之一.

大量的科学技术问题最终往往归结为解线性方程组. 因此，在线性方程组的数值解法得到发展的同时，线性方程组解的结构等理论性工作也取得了令人满意的进展. 现在，线性方程组的数值解法在计算数学中占有重要地位.

4. 二次型

二次型也称为“二次形式”，数域 $P$ 上的 $n$ 元二次齐次多项式称为数域 $P$ 上的 $n$ 元二次型. 二次型是线性代数教材的后继内容，为了后面的学习，这里对于二次型的发展历史作简

单介绍．二次型的系统研究是从 18 世纪开始的，它起源于对二次曲线和二次曲面的分类问题的讨论．将二次曲线和二次曲面的方程变形，选有主轴方向的轴作为坐标轴以简化方程的形状，这个问题是在 18 世纪引进的．柯西在其著作中给出结论：当方程是标准形时，二次曲面用二次项的符号来进行分类．然而，那时并不太清楚，在化简成标准形时，为何总是得到同样数目的正项和负项．西尔维斯特回答了这个问题，他给出了 $n$ 个变数的二次型的惯性定律，但没有证明．这个定律后被雅可比重新发现和证明．1801 年，高斯在《算术研究》中引进了二次型的正定、负定、半正定和半负定等术语．

二次型化简的进一步研究涉及二次型或行列式的特征方程的概念．特征方程的概念隐含地出现在欧拉的著作中，拉格朗日在其关于线性微分方程组的著作中首先明确地给出了这个概念．而三个变数的二次型的特征值的实性则是由阿歇特(J-N. P. Hachette)、蒙日和泊松(S. D. Poisson，1781—1840）建立的．

柯西在别人著作的基础上，着手研究化简变数的二次型问题，并证明了特征方程在直角坐标系的任何变换下不变性．后来，他又证明了 $n$ 个变数的两个二次型能用同一个线性变换同时化成平方和．

1851 年，西尔维斯特在研究二次曲线和二次曲面的切触和相交时考虑了这种二次曲线和二次曲面束的分类．在他的分类方法中，引进了初等因子和不变因子的概念，但他没有证明“不变因子组成两个二次型的不变量的完全集”这一结论．

1858 年，魏尔斯特拉斯对同时化两个二次型成平方和给出了一个一般的方法，并证明了“如果二次型之一是正定的，那么即使某些特征根相等，这个化简也是可能的”．魏尔斯特拉斯比较系统地完成了二次型的理论并将其推广到双线性型．

5. 从解方程到群论

求根问题是方程理论的一个中心课题．16 世纪，数学家们解决了三次、四次方程的求根公式，对于更高次方程的求根公式是否存在，成为当时的数学家们探讨的又一个问题．这个问题花费了不少数学家大量的时间和精力．经历了屡次失败，但总是摆脱不了困境．

到了 18 世纪下半叶，拉格朗日认真总结分析了前人失败的经验，深入研究了高次方程的根与置换之间的关系，提出了预解式概念，并预见到预解式与各根在排列置换下的形式不变性有关．但他最终没能解决高次方程问题．拉格朗日的弟子鲁菲尼（Ruffini，1765—1862）也作了许多努力，但都以失败告终．高次方程的根式解的讨论，在挪威杰出数学家阿贝尔那里取得了很大进展．阿贝尔（N. K. Abel，1802—1829）只活了 27 岁，他一生贫病交加，但却留下了许多创造性工作成果．1824 年，阿贝尔证明了次数大于四次的一般代数方程不可能有根式解．但问题仍没有彻底解决，因为有些特殊方程可以用根式求解．因此，高于四次的代数方程何时没有根式解，是需要进一步解决的问题．这一问题由法国数学家伽罗华全面透彻地给予了解决．

伽罗华(E. Galois，1811—1832）仔细研究了拉格朗日和阿贝尔的著作，建立了方程的根的“容许”置换，提出了置换群的概念，得到了代数方程用根式解的充分必要条件是置换群的自同构群可解．从这种意义上，可以说伽罗华是群论的创立者．伽罗华出身于巴黎附近一个富裕的家庭，幼时受到良好的家庭教育，只可惜，这位天才的数学家英年早逝，1832 年 5 月，由于政治和爱情的纠葛，他在一次决斗中被打死，年仅 21 岁．

置换群的概念和结论是最终产生抽象群的第一个主要来源．抽象群产生的第二个主要来

源则是戴德金(R. Dedekind，1831—1916）和克罗内克（L. Kronecker，1823—1891）的有限群及有限交换群的抽象定义以及凯莱（A. Kayley，1821—1895）关于有限抽象群的研究工作. 另外，克莱因（F. Clein，1849—1925）和庞加莱（J-H. Poincare，1854—1912）给出了无限变换群和其他类型的无限群. 19 世纪 70 年代，李（M. S. Lie，1842—1899）开始研究连续变换群，并建立了连续群的一般理论，这些工作构成抽象群论的第三个主要来源.

1882—1883 年，迪克（W. Vondyck，1856—1934）的论文把上述三个主要来源的工作纳入抽象群的概念之中，建立了(抽象)群的定义. 到 19 世纪 80 年代，数学家们终于成功地概括出抽象群论的公理体系.

20 世纪 80 年代，群的概念已经普遍地被认为是数学及其许多应用中最基本的概念之一. 它不但渗透到诸如几何学、代数拓扑学、函数论、泛函分析及其他许多数学分支中从而起着重要的作用，还形成了一些新学科，如拓扑群、李群、代数群等. 另外，它还具有与群结构相联系的其他结构，如拓扑、解析流形、代数簇等，并在结晶学、理论物理、量子化学以及编码学、自动机理论等方面都有重要作用.

## 三、线性代数的特点与学习方法

与高等数学、概率论与数理统计等基础数学课相比，线性代数的特点在于内容抽象，定义、定理多，尤其向量部分最为典型，需要较强的抽象思维与逻辑推理能力.

因此，在学习过程中，对所涉及的概念、性质及定理要理解，同时很多东西还要靠记忆，尤其要注意基本概念、基本方法之间的相互关系，有些问题是相互交错、相互渗透的，似螺旋式上升，比如矩阵的秩与向量组的秩、线性方程组与向量组的线性组合、线性相关之间的关系. 弄清这些关系，一方面可对所涉及的概念通过不断重复而达到加深印象的目的，另一方面也能对问题有进一步的深入理解.

总而言之，同所有的数学课程一样，要学好线性代数，加强平时的解题训练必不可少. 通过做题，可以发现问题、思考问题，从而加深对内容的理解，增加计算的熟练程度.

# 第一章　$n$ 阶行列式

生产实际和科学研究中有许多问题可以归结为线性方程组，行列式正是在对线性方程组的研究中建立起来的. 本章主要介绍 $n$ 阶行列式的定义、性质及其计算方法. 此外还介绍用 $n$ 阶行列式求解 $n$ 元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

## 第一节　排列及对换

### 一、排列及其逆序数

1. 排　列

**定义 1**　$n$ 个不同的元素按照一定的次序排成一列，叫做这 $n$ 个元素的一个全排列，简称 $n$ 阶排列.

$n$ 个不同元素的所有排列的个数用 $P_n$ 表示，容易验证，$P_n=n!$，即 $n$ 个元素共有 $n!$ 个全排列.

为讨论方便，以下不妨设排列的 $n$ 个元素为 1，2，…，$n$ 这 $n$ 个自然数，并将任意一个 $n$ 阶排列记成 $i_1i_2\cdots i_n$.

例如，自然数 1，2，3，4 构成的 4 阶排列有 $4!=24$ 种：

1234，1243，1324，1342，1423，1432，2134，2143，2314，2341，2413，2431，
3124，3142，3214，3241，3412，3421，4123，4132，4213，4231，4312，4321.

2. 逆序数

对于 1，2，…，$n$ 这 $n$ 个自然数的任一 $n$ 阶排列，要考虑其各元素之间的次序. 规定自然数从小到大构成的排列 $12\cdots n$ 为标准次序，称为标准排列(或自然排列).

**定义 2**　对任一 $n$ 阶排列，如果两个元素中较大元素排在较小元素的前面，那么就称这两个元素构成一个逆序(反序). 一个排列中所有逆序的总数，叫做这个排列的逆序数. 用 $\pi(i_1i_2\cdots i_n)$ 表示 $n$ 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数.

范德蒙(Alexandre-Theophile Vandermonde，1735—1796)：法国数学家. 1735 年生于巴黎. 1771 年成为巴黎科学院院士. 1796 年 1 月 1 日逝世. 范德蒙在高等代数方面有重要贡献. 他在 1771 年发表的论文中证明了多项式方程根的任何对称式都能用方程的系数表示出来. 他不仅把行列式应用于解线性方程组，而且对行列式理论本身进行了开创性研究，是行列式的奠基者. 他给出了用二阶子式和它的余子式来展开行列式的法则，还提出了专门的行列式符号. 他具有拉格朗日的预解式、置换理论等思想，为群的概念的产生做了一些准备工作.

在牛顿幂和公式的影响下，对称函数开始引起人们的普遍关注. 1771 年，范德蒙在他的文章中提出重要的定理：根的任何有理对称函数都可以用方程的系数表示出来. 他还首次构造了对称函数表. 至此，人们对对称函数的兴趣就更加浓厚了. 许多著名数学家，如华林（E. Waring，1734—1798）、欧拉、克莱姆（G. Cramer，1704—1752）、拉格朗日（J. L. Lagrange，1736—1813）、柯西（A. L. Cauchy，1789—1857）、希尔奇（M. Hirsch，1765—1851）等，都在对称函数的研究中取得了重要结果.

显然，标准排列的逆序数等于0.

逆序数的计算方法如下：

设 $i_1i_2\cdots i_n$ 是自然数1到 $n$ 的一个排列，若排在1前面的元素有 $t_1$ 个，排在2前面比2大的元素有 $t_2$ 个，排在3前面比3大的元素有 $t_3$ 个，…，排在 $k$ 前面比 $k$ 大的元素有 $t_k$ 个，则

$$\pi(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}+t_n \quad (\text{其中 } t_n=0).$$

**例题**　求排列43152的逆序数.

**解**　$\pi(43152)=2+3+1+0=6.$

3. 排列的奇偶性

**定义3**　逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如，排列43152是偶排列，排列321是奇排列.

## 二、对　换

**定义4**　在一个排列中，把任意两个元素 $i$，$j$ 的位置对调，而其他元素不动，就得到一个新的排列. 对于排列所施行的这样一个变换叫做一个对换，记为 $(i,j)$. 将相邻的两个元素对换叫做相邻对换.

在对换下，排列的奇偶性将发生变化.

例如，对于排列53124，$\pi(53124)=6$，将元素3和2对换，则 $\pi(52134)=5$，为奇排列.

**定理1**　对换改变排列的奇偶性. 这就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

**证明**　(1) 先看相邻对换的情形.

设有排列 $p_1p_2\cdots p_tpqq_1q_2\cdots q_m$，对调 $p$，$q$ 得到 $p_1p_2\cdots p_tqpq_1q_2\cdots q_m$. 可以看出，经对换后，元素 $p_1$，$p_2$，…，$p_t$ 和 $q_1$，$q_2$，…，$q_m$ 的逆序数没有改变，而元素 $p$，$q$ 的逆序数可能改变. 当 $p<q$ 时，$p$ 的逆序数增加1，$q$ 的逆序数不变；当 $p>q$ 时，$p$ 的逆序数不变，$q$ 的逆序数减少1.

总之，相邻对换后的新排列与原来排列的逆序数相差1，它们的奇偶性相反.

(2) 一般对换的情形.

设有排列 $p_1p_2\cdots p_tpq_1q_2\cdots q_mqr_1r_2\cdots r_s$，对换 $p$，$q$，将排列变成 $p_1p_2\cdots p_tqq_1q_2\cdots q_mpr_1r_2\cdots r_s$. 这一对换可以看成是经若干次相邻对换得到的. 先将元素 $p$ 与 $q_1$，$q_2$，…，$q_m$ 依次作相邻对换，经 $m$ 次以后，变成 $p_1p_2\cdots p_tq_1q_2\cdots q_mpqr_1r_2\cdots r_s$；然后再将元素 $q$ 与 $p$，$q_m$，$q_{m-1}$，…，$q_1$ 依次作相邻对换，经 $m+1$ 次以后，变成 $p_1p_2\cdots p_tqq_1q_2\cdots q_mpr_1r_2\cdots r_s$，即为上述的新排列. 这就是说，经过 $2m+1$ 次相邻对换，把原来的排列变成了新排列.

由(1)知，经 $2m+1$ 次相邻对换后，排列的奇偶性改变. 所以原排列与新排列的奇偶性不相同.

根据定理1，经过奇数次对换后，排列改变其奇偶性；经过偶数次对换后，排列不改变其奇偶性. 而标准排列是偶排列，于是有下面的结论.

**推论**　奇排列对换成标准排列 $12\cdots n$ 的对换次数是奇数，偶排列对换成标准排列 $12\cdots n$ 的对换次数是偶数.

**定理 2**　$n(n\geqslant 2)$个元素的所有排列中，奇排列和偶排列的个数相等，各为$\frac{n!}{2}$个.

**证明**　$n$ 个元素的所有 $n$ 阶排列共有 $n!$ 个，设其中有 $k$ 个奇排列、$m$ 个偶排列，作同一个对换，例如对换 1，2，则可得到 $k$ 个偶排列、$m$ 个奇排列，从而 $k\leqslant m$，$m\leqslant t$. 所以 $k=m$. 即 $k=m=\frac{n!}{2}$.

# 第二节　$n$ 阶行列式的定义

## 一、二阶与三阶行列式

1. 二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1}$$

为消去未知数 $x_2$，以 $a_{22}$与 $a_{12}$分别乘方程组(1)两方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

类似地，消去 $x_1$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，求得方程组(1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

式(2)中的分子、分母都是 4 个数分两对相乘再相减而得到的. 其中，分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$是由方程组(1)的 4 个系数确定的，把这 4 个数按它们在方程组(1)中的位置排成二行二列(横排称为行、竖排称为列)为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

表达式(3)称为二阶行列式. 它表示数值 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

数 $a_{ij}(i=1,2;\ j=1,2)$称为行列式(3)的元素或元，元素 $a_{ij}$的第一个下标 $i$ 称为行标，表明该元素位于第 $i$ 行；第二个下标 $j$ 称为列标，表明该元素位于第 $j$ 列. 位于第 $i$ 行第 $j$ 列的元素称为行列式(3)的$(i,j)$元.

上述二阶行列式的定义可以用对角线法则来记忆. 如图 1.1 所示，把 $a_{11}$到 $a_{22}$的实连线称为主对角线，$a_{12}$到 $a_{21}$的虚连线称为副对角线，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

**图 1.1**

利用二阶行列式的概念，式(2)中 $x_1$，$x_2$ 的分子也可以写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则式(2)可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

注意：这里的分母 $D$ 是由方程组(1)的系数所确定的二阶行列式(称为系数行列式)，$x_1$ 的分子 $D_1$ 是用常数项 $b_1$，$b_2$ 替换 $D$ 中 $x_1$ 的系数 $a_{11}$，$a_{21}$所得的二阶行列式，$x_2$ 的分子 $D_2$ 是用常数项 $b_1$、$b_2$ 替换 $D$ 中 $x_2$ 的系数 $a_{12}$，$a_{22}$所得的二阶行列式.

**例 1**　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12, \\ 2x_1+x_2=1. \end{cases}$$

**解**　由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-24=-21,$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

2. 三阶行列式

**定义 1**　9 个数排成的 3 行 3 列的三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{4}$$

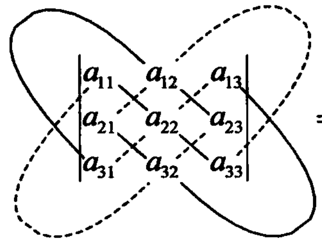
表示的是一个数，它等于

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{5}$$

定义 1 表明三阶行列式含有 6 项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其规律遵循如图 1.2 所示的对角形法则. 图 1.2 中，三条实线看做平行于主对角线的连线，三条虚线看做平行于副对角线的连线，实线三元素的乘积冠以正号，虚线上三元素的乘积冠以负号.



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

图 1.2

**例 2**　计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

**解**　按对角线法则，有

$$\begin{aligned} D &= 1\times2\times(-2) + (-2)\times4\times(-4) + (-3)\times1\times2 - (-4)\times2\times(-3) - \\ &\quad 2\times(-2)\times(-2) - 1\times4\times1 \\ &= -14. \end{aligned}$$

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式，为研究四阶或更高阶行列式，下面通过排列的知识，引出 $n$ 阶行列式的概念.

## 二、$n$ 阶行列式的定义

1. 行列式的定义

观察二阶行列式和三阶行列式，它们的展开式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

以上两式是用对角线法则来定义的. 下面分析三阶行列式的表达式(5)的结构，希望把行列式概念推广到 $n$ 阶情形. 可以看出有如下 3 个规律.

(1)是 3! 项的代数和.

(2)每一项都是取自不同行、不同列的三个元素的乘积：$a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$，其中，第一个下标排列都是 123，第二个下标排列 $i_1i_2i_3$ 是 1，2，3 的某个排列，这样的排列共有 3! 个.

(3)每一项的符号：三阶行列式右端前三项取正号，它们的列标排列依次是 123，231，312，这些都是偶排列；后三项取负号，它们的列标排列依次是 321，213，132，这些都是奇排列. 因此，项 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$所取的符号可以写成$(-1)^{\pi(i_1i_2i_3)}$.

于是，三阶行列式可写成