高等教育“十二五”规划教材

# 高等数学（上册）

刘仁云　赵　虹　主编

Advanced Mathematics

科学出版社

高等教育“十二五”规划教材

# 高等数学

（上册）

刘仁云　赵　虹　主编
李东平　侯国亮　张晓丽　副主编

科学出版社
北　京

## 内 容 简 介

《高等数学》（上、下册）是为普通高等学校理工科专业学生编写的基础课教材，以微积分学的基本理论和方法为核心内容．本书是上册，主要内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、实验．本书叙述直观、概念清晰，通俗易懂，便于学生理解和掌握．

本书可作为理工科大学、高等师范院校理、工、经管各专业的教材或参考书．

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学（上册）/刘仁云，赵虹主编．—北京：科学出版社，2011
（高等教育“十二五”规划教材）
ISBN 978-7-03-032384-2

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①刘…　②赵…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材
Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 191014 号

策划：李　军
责任编辑：王纯刚　张振华／责任校对：刘玉靖
责任印制：吕春珉／封面设计：科地亚盟

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京鑫丰华彩印有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2011 年 10 月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2011 年 10 月第一次印刷　印张：15 1/4
印数：1—3000　字数：341 000

**定价：56.00 元（上、下册）**

（如有印装质量问题，我社负责调换〈鑫丰华〉）
销售部电话 010-62140850　编辑部电话 010-62148322

# 前　言

“高等数学”是高等院校理工类专业必修的一门基础课. 目前，随着我国高等教育由精英教育向大众教育的转变，以前某些所谓的“经典”教材已渐渐不能适应教育改革和发展的需要，相当一部分普通高等院校由于缺乏适合自己的教材，而出现教与学严重脱节、教学效果事倍功半的现象.

针对当前普通高等学校理工科专业教育的特点，我们依据最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和分层次教学改革的需要，组织了一些长期从事高等数学教学的教师编写了本书.

本书以微积分学的基本理论和方法为核心，内容由浅入深，难易适当，通俗易懂. 具体来说，主要具有以下几个特点：

(1) 在教学内容上的编排上，本着“必须、够用”的原则，适当削减了过于抽象和严格化的内容，删除了繁琐的推理和证明，并尽量结合几何图形进行直观解释，以帮助学生理解和掌握所学内容；

(2) 考虑到计算机在日常生活中的广泛应用，为促进教学手段不断改革和创新，培养学生使用计算机解决数学问题的意识和能力，本书设计了相应的数学实验，通过这些实验来介绍数学软件 Matlab 在高等数学中的应用，有助于激发学生的学习兴趣，增强其实际操作能力，同时加深其对于基础知识的理解和应用；

(3) 每节都精选了一定数量的习题，习题类型广泛，紧扣教材，根据难易程度分为 A、B 两部分，以使本书适合多层次读者的需要，并在书后附有参考答案及提示；

(4) 章节内容可选空间大，其中带 * 内容属于选学，教师可根据专业需要和教学时数做适当安排.

全书共 13 章，分上、下两册，第 1～6 章为上册，第 7～13 章为下册. 第 1 章由刘仁云编写，第 2 章、第 6 章和第 13 章由李东平编写，第 3 章由侯国亮编写，第 4 章、第 5 章由张晓丽编写，第 7 章、第 9 章和第 10 章由赵虹编写，第 8 章由赵红发编写，第 11 章由梁四化编写，第 12 章由罗英语编写，其他参编人员有张忠毅、陈梦泽等. 全书由刘仁云、赵虹统稿，并负责组织协调工作.

全书定价 56 元，上册定价 28 元，下册定价 28 元.

在编写本书过程中，参考了国内外大量有关高等数学的教材，在此谨向各位作者表示由衷的感谢. 由于编者水平所限，加之时间比较仓促，书中疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

# 目　　录

# 第 1 章　函数与极限

数学知识是无穷的，现在我们即将学习的微积分学虽然只是其中的一小部分，但却是非常基础和重要的一部分．在数学发展史上它曾经扮演了一个特别的角色，是近代数学发展的里程碑．微积分与实际应用密切联系，在多个学科分支上有着广泛的应用．微积分不同于中学所学数学知识的最关键之处是：微积分研究更多动态的事物，较少的静态事物．它关注变化，关注运动，并用量化的方式进行处理．本章将介绍函数、极限、连续等基础知识和相关方法，这些都是微积分中最基础的元素，也蕴含着微积分的基本思想之一——极限思想．了解和掌握这些思想和方法将有助于学生学好这门课程．现在我们就以重新认识和学习函数开始．

## 1.1　函　　数

函数是微积分中要学习的重要对象．函数的概念产生于 17 世纪，从模糊的含义到准确的定义经过了 200 多年的时间，众多数学家对这一概念进行了修正和提炼，得到了我们今天所熟悉的样子．这个概念如此重要，几乎在所有科学研究工作中占据了中心位置．下面就来讨论关于函数的基本思想、图像、变化和合成．

### 1.1.1　集合、区间和邻域

1．集合

人们把具有某种特定性质的事物的总体称为集合，用大写字母 $A$，$B$，$C$，…表示．集合中的事物称为该集合的元素，用小写字母 $a$，$b$，$c$，…表示．当 $a$ 是集合 $A$ 中的元素时，表示为 $a\in A$，当 $a$ 不是集合 $A$ 中的元素时，表示为 $a\notin A$．

集合有两种表示方法：列举法和描述法．列举法就是一一列举集合中的所有元素．例如，“小于 5 的正整数”可以表示为 $A=\{1, 2, 3, 4\}$．描述法则是把集合中元素的性质描述出来，如同样的问题，用描述法可以表示为

$$A=\{x \mid x\text{ 是小于 5 的正整数}\}.$$

如果集合的元素都是数，则称它为数集．在本书中，涉及的集合都是数集．常用的数集有自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集，分别用 $\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{C}$ 表示．

如果集合 $A$ 中的元素都是集合 $B$ 中的元素，则称 $A$ 是 $B$ 的**子集**，记作 $A\subseteq B$（读作 $A$ 包含于 $B$）或 $B\supseteq A$．如果存在 $A\subseteq B$ 且 $B\supseteq A$，则称集合 $A$ 与集合 $B$ 相等，记作 $A=B$．

数集 $\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{C}$ 之间的关系为：$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}\subseteq\mathbf{C}$．

2．集合的基本运算

集合的基本运算有三种，即并集、交集和差集．

设 $A$、$B$ 是两个集合，由所有属于 $A$ 或者属于 $B$ 的元素组成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的**并集**（简称并），记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

设 $A$、$B$ 是两个集合，由所有既属于 $A$ 又属于 $B$ 的元素组成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的**交集**（简称交），记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

设 $A$、$B$ 是两个集合，由所有属于 $A$ 而不属于 $B$ 的元素组成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的**差集**（简称差），记作 $A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

如果我们研究的某个问题限定在一个大的集合 $I$ 中进行，所研究的其他集合 $A$ 都是 $I$ 的子集．此时，我们称集合 $I$ 为全集或基本集．称 $I\setminus A$ 为 $A$ 的**补集或余集**，记作 $\complement_I A$.

3．区间和邻域

区间实际是实数的集合，我们已经了解的区间有以下几类（其中，$a<b$，$a$，$b\in\mathbf{R}$）：

闭区间：$[a, b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

开区间：$(a, b)=\{x \mid a<x<b\}$；

半开区间：$[a, b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$、$(a, b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$；

以上三类区间也称为有限区间.

无限区间：$[a, +\infty)=\{x \mid a\leqslant x\}$、$(a, +\infty)=\{x \mid a<x\}$、$(-\infty, b]=\{x \mid x\leqslant b\}$、$(-\infty, b)=\{x \mid x<b\}$、$(-\infty, +\infty)=\mathbf{R}$.

其中，$a$ 和 $b$ 称为区间 $(a, b)$、$[a, b]$、$[a, b)$、$(a, b]$ 的端点，$b-a$ 称为区间的长度.

邻域是另一类数集，具有某种对称性．我们将以点 $a$ 为中心的任何开区间称为**点 $a$ 的邻域**，记作 $U(a)$.

**定义 1** 设 $a$，$\delta$ 是实数，$\delta>0$，则称开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域，记作 $U(a, \delta)$，即

$$U(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\},$$

其中，点 $a$ 称为**邻域的中心**，$\delta$ 称为**邻域的半径**.

把邻域的中心点去掉，所得到的邻域称为 **$a$ 去心 $\delta$ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a, \delta)$，即

$$\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

当不需要特别辨明邻域的半径时，可简记作 $U(a)$.

### 1.1.2 函数的概念

函数是描述变量之间相互依赖关系的一种数学模型.

在自然界和社会生活中有很多变化的量，这些变量之间往往存在相互作用的关系，或者遵循一定的规律．函数具有描述这种规律的功能．例如，圆的面积 $A$ 与该圆的半径 $r$ 有关，$r$ 与 $A$ 之间的关系可以用一个方程 $A=\pi r^2$ 给出．每取定一个正数 $r$，就得到唯一一个面积值 $A$，我们说 $A$ 是 $r$ 的函数.

**定义 2** 设 $x$ 和 $y$ 是两个变量，$D$ 是一个给定的非空数集．如果对于每个数 $x\in D$，变量 $y$ 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 $y$ 是 $x$ 的**函数**，记作

$$y=f(x),\ x\in D.$$

其中，$x$ 称为**自变量**，$y$ 称为**因变量**，$D$ 称为**定义域**，记作 $D_f$，即 $D_f=D$.

对于 $x_0\in D$，按照对应法则 $f$，总有确定的值 $y_0$（记为 $f(x_0)$）与之对应，则称 $f(x_0)$

为函数在点 $x_0$ 函数值．因变量与自变量的这种相依关系通常称为**函数关系**．

当自变量 $x$ 取遍 $D$ 中所有数值时，对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 $f$ 的**值域**，记为 $R_f$ 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}.$$

**注**：函数的定义域 $D_f$ 和对应法则 $f$ 称为函数的**两个要素**．如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则这两个函数是相同的，否则不同．例如，函数 $y=|x|$ 和 $y=\sqrt{x^2}$，虽然函数的表现形式不同，但它们的定义域和对应法则是相同的，所以这两个是相同的函数．

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定；另一种是纯数学问题，其定义域为使得函数表达式有意义的实数所构成的集合，我们称之为函数的**自然定义域**．

### 1．函数的表示方法

通常有四种表示函数的方法，分别如下：

**语言法**：即用语言来描述；

**数表法**：通过一个数值表来描述，也称为表格法；

**可视法**：即用图形来描述，也称为图形法；

**代数法**：即用准确的公式形式描述，也称为公式法、解析法．

如果一个函数可以用四种方法来表示，通常情况下，人们会使用其中的一、两种表示方法，以便从另一个视角来了解它．例如，已知一个函数表达式，然后绘出它的图像．但是某些函数只适合某一种方式来描述．下面给出用这四种方法来表示某个函数的例子．

我们可以用语言这样描述一个函数：$P(t)$ 是 $t$ 时刻的世界人口数．表 1.1 提供了该函数一个方便的表示方法．

**表 1.1**

| 年份 | 人口/百万 |
|---|---|
| 1900 | 1650 |
| 1910 | 1750 |
| 1920 | 1860 |
| 1930 | 2070 |
| 1940 | 2300 |
| 1950 | 2560 |
| 1960 | 3040 |
| 1970 | 3710 |
| 1980 | 4450 |
| 1990 | 5280 |
| 2000 | 6080 |

如果在坐标轴中画出这些数值，就得到一个图像，即散点图，如图 1.1 所示．这个图很有用，它使我们能够马上获得相应的数据．

当然，图 1.1 不可能给出一个准确的人口等式 $P(t)$，但是可以用一个近似的函数来代替 $P(t)$．实际上，可以获得近似表达式

$$P(t)\approx f(t)=(0.008079266)\cdot(1.013731)^t.$$

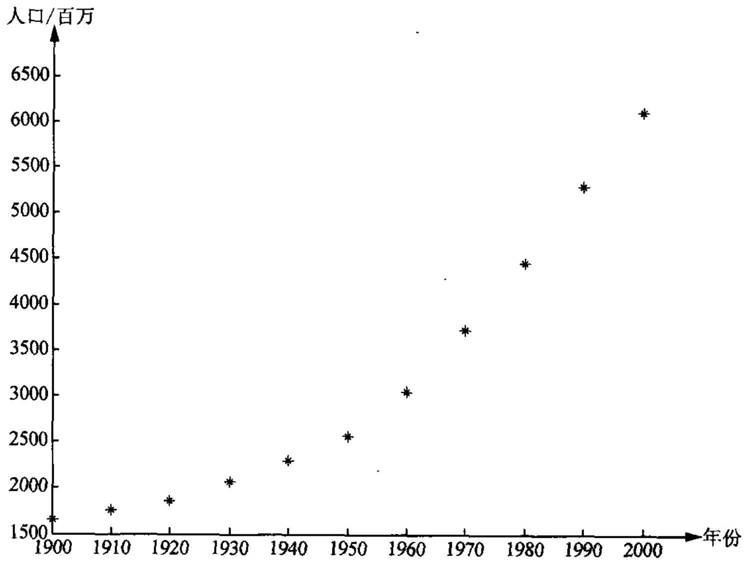


图 1.1

这个近似函数的图形如图 1.2 所示.

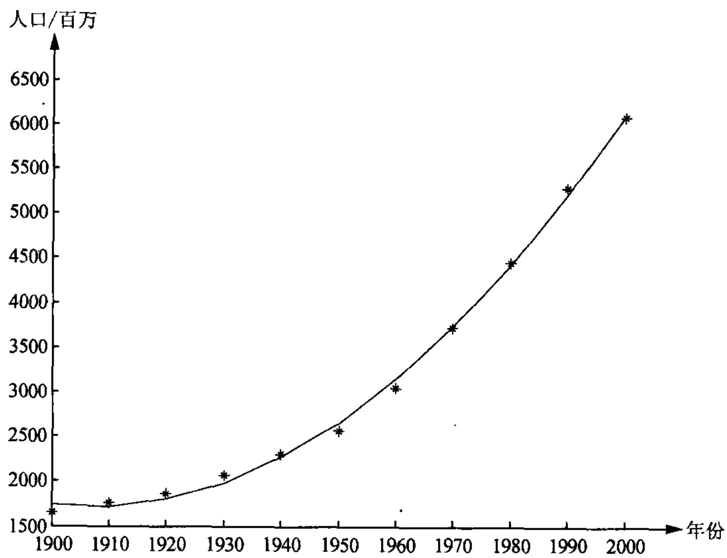


图 1.2

*2. 单值函数与多值函数*

在函数的定义中，对于每个 $x\in D$，对应的函数值 $y$ 总是只有一个，这种函数称为**单值函数**，否则称为**多值函数**. 对于多值函数，通常只要附加一些条件，就可以将它转化为单值函数，这样得到的单值函数称为多值函数的单值分支. 例如，在由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出的对应法则中，附加“$y\geqslant 0$”的条件，即以“$x^2+y^2=r^2$ 且 $y\geqslant 0$”作为对应法则，就可得到一个单值分支 $y=y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$.

根据函数代数形式的不同，函数还可分为**显函数**、**隐函数**和**分段函数**三种.

**显函数**：函数 $y$ 由 $x$ 的代数式表示．如 $y=x^2+1$．

**隐函数**：变量 $y$ 与 $x$ 之间的关系由一个方程 $F(x, y)=0$ 表示，如 $\ln y+e^x+1=0$．

**分段函数**：函数在其定义域的不同范围内，具有不同的代数表达式．

需要明确的是，分段函数并不是几个函数，而只是一个函数．下面列举几个常见的函数．

**例 1**　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}.$$

如 $y=|x|$ 形式的函数称为绝对值函数．其定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$，值域为 $R_f=[0, +\infty)$．其图形如图 1.3 所示．

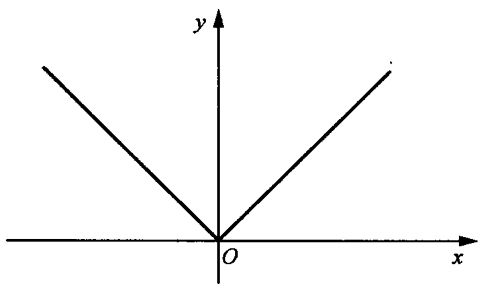


图 1.3

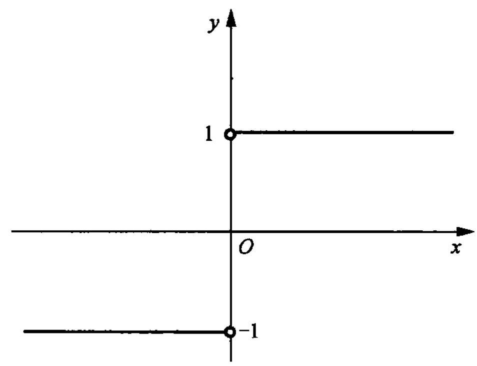


图 1.4

**例 2**　符号函数．

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

其定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$，值域为 $R_f=\{-1, 0, 1\}$，如图 1.4 所示．

**例 3**　取整函数 $y=[x]$，其中，$[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数，如图 1.5 所示．

其定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$，值域为 $R_f=\mathbf{Z}$．例如，$\left[\frac{5}{7}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$．

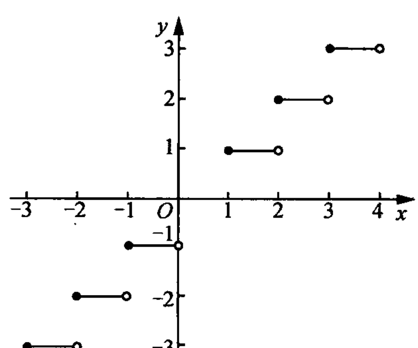


图 1.5

**例 4** 分段函数 $y=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$，其定义域为 $D=[0,1]\cup(1,+\infty)=[0,+\infty)$.

### 1.1.3 函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 $D$，数集 $X\subseteq D$. 如果存在正数 $M$，使对任一 $x\in X$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在 $X$ 上有上界，或称 $f(x)$是 $X$ 上的**有界函数**. 正数 $M$ 是 $f(x)$的界，显然任何大于 $M$ 的正数都是 $f(x)$的界. 其图形特点是 $y=f(x)$的图形在直线 $y=M$的下方. 如果不存在这样的正数 $M$，则称 $f(x)$在 $X$ 上无界. 这时称函数 $f(x)$是**无界函数**，即对任一 $M$，总存在 $x_1\in X$，使 $|f(x)|>M$.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是有界的：$|\sin x|\leqslant 1$. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在开区间$(0,1)$内是无上界的，或者说它在$(0,1)$内有下界，无上界. 这是因为，对于任意的 $M>1$，总有 $x_1$：$0<x_1<\dfrac{1}{M}<1$，使 $f(x_1)=\dfrac{1}{x_1}>M$，所以函数无上界. 调整定义域，可以使一个无界函数成为有界函数，如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(1,2)$内是有界的.

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 $D$，区间 $I\subseteq D$. 如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$ 及 $x_2$，当 $x_1<x_2$时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 $I$ 上是**单调增加的**. 如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$ 及 $x_2$，当$x_1<x_2$时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 $I$ 上是**单调减少的**.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如，函数 $y=x^2$在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的，在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的，但在$(-\infty,+\infty)$上不是单调的. 函数 $y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是单调的，但在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$上是单调函数如图 1.6 和图 1.7 所示.

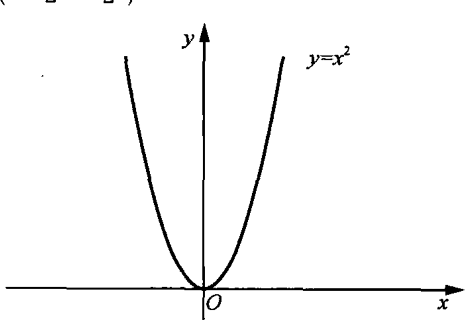


图 1.6

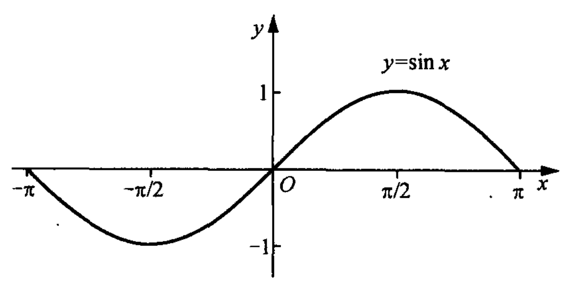


图 1.7

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称（即若 $x\in D$，则 $-x\in D$），如果对于任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 $y$ 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

例如，函数 $y=x^2$ 是偶函数，如图 1.6 所示；函数 $y=\sin x$ 是奇函数，如图 1.7 所示；$y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数，如图 1.8 所示.

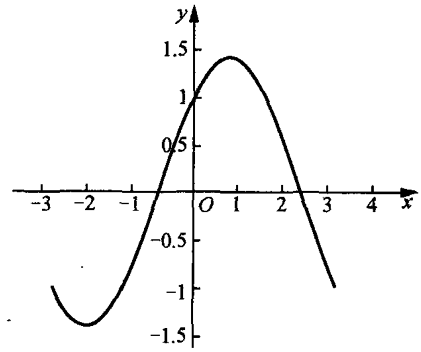


图 1.8

**例 5**　判断函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

**解**　因为函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\\&=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，如果存在一个正数 $T$，使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm T)\in D$，且

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，$T$ 称为 $f(x)$ 的**周期**.

周期函数的图形特点：在函数的定义域内，每个长度为 $T$ 的区间上，函数的图形有相同的形状，即周期为 $T$ 的函数在它周期正整数倍的距离内总是重复出现，如图 1.9 所示. 显然只要是 $T$ 的正整数倍，都是 $f(x)$ 的周期，为了研究方便，通常用最小正周期来描述函数的周期，但并不是每个周期函数都有最小正周期.

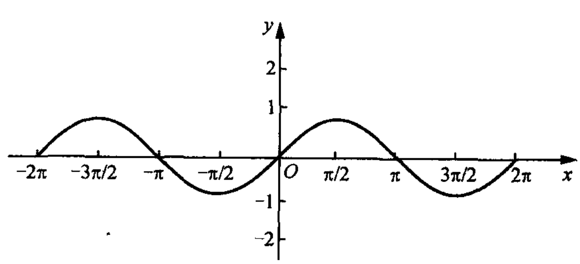


图 1.9

**例 6**　狄利克雷（Dirichlet）函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\0, & x\notin Q\end{cases}.$$

容易验证 $D(x)$是周期函数，任何正有理数 $r$ 都是其周期，因为不存在最小的正有理数，所以它没有最小正周期.

## 习题 1.1

(A)

1. 填空.

(1)“100 以内的所有平方数”所组成的集合可以表示为__________.

(2)“方程 $x^2-x-2=0$”的所有根所组成的集合可以表示为__________.

(3) $\{x \mid x^2-1>0\}$ 所对应的区间为__________.

(4) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0 \\ 2^x, & x>0 \end{cases}$，则 $f(-1)=$____，$f(0)=$____，$f(2)=$____.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{1+x}$；(2) $y=\arcsin \dfrac{x-1}{3}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x^2-2x}$；(4) $y=\lg(1+x)$.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\sin x \cdot \cos x$；(2) $y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$；

(3) $y=x^3+\sin x+1$；(4) $\lg(x^2+1)$.

4. 下列函数是否为周期函数？如果是，指出其最小正周期.

(1) $y=1+\cos(\pi x)$；(2) $y=|\sin x|$；

(3) $y=x\sin \dfrac{1}{x}$.

5. 判断下列函数是否有界.

(1) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$；(2) $y=\sin \dfrac{1}{x}$；

(3) $y=x\cos x$.

6. 飞机从一个机场起飞，经一小时后在另一个相距 400 千米的机场着陆，如果用 $t$ 表示时间，$x(t)$表示水平距离，$y(t)$表示飞机的高度. 试回答下面问题：

(1) 画出一个关于 $x(t)$的可能的图像；

(2) 画出一个关于 $y(t)$的可能的图像；

(3) 画出一个关于水平速度的可能的图像；

(4) 画出一个关于垂直速度的可能的图像.

7. 下面表格给出的是某地区在 2001 年 6 月某天从午夜到 14：00 的每隔 2 小时的气温读数 $T$(华氏摄氏度)：

| $t$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | 73 | 73 | 70 | 69 | 72 | 81 | 88 | 91 |

(1) 利用气温读数画一个函数 $T(t)$的图像；

(2) 利用所画图像估算 11：30 时刻的气温.