



高等教育“十二五”规划教材

高等数学 (上册)

刘仁云 赵虹 主编

Advanced
Mathematics



科学出版社

高等教育“十二五”规划教材

高等数学

(上册)

刘仁云 赵虹 主编

李东平 侯国亮 张晓丽 副主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

《高等数学》(上、下册)是为普通高等学校理工科专业学生编写的基础课教材,以微积分学的基本理论和方法为核心内容。本书是上册,主要内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、实验。本书叙述直观、概念清晰,通俗易懂,便于学生理解和掌握。

本书可作为理工科大学、高等师范院校理、工、经管各专业的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)/刘仁云,赵虹主编. —北京:科学出版社,2011

(高等教育“十二五”规划教材)

ISBN 978-7-03-032384-2

I. ①高… II. ①刘… ②赵… III. ①高等数学-高等学校-教材

IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第191014号

策划:李 军

责任编辑:王纯刚 张振华/ 责任校对:刘玉靖

责任印制:吕春珉/ 封面设计:科地亚盟

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京鑫丰华彩印有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年10月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2011年10月第一次印刷 印张:15 1/4

印数:1—3000 字数:341 000

定价:56.00元(上、下册)

(如有印装质量问题,我社负责调换(鑫丰华))

销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62148322

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229; 010-64034315; 13501151303

前 言

“高等数学”是高等院校理工类专业必修的一门基础课。目前，随着我国高等教育由精英教育向大众教育的转变，以前某些所谓的“经典”教材已渐渐不能适应教育改革和发展的需要，相当一部分普通高等院校由于缺乏适合自己的教材，而出现教与学严重脱节、教学效果事倍功半的现象。

针对当前普通高等学校理工类专业教育的特点，我们依据最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和分层次教学改革的需要，组织了一些长期从事高等数学教学的教师编写了本书。

本书以微积分学的基本理论和方法为核心，内容由浅入深，难易适当，通俗易懂。具体来说，主要具有以下几个特点：

(1) 在教学内容上的编排上，本着“必须、够用”的原则，适当削减了过于抽象和严格化的内容，删除了繁琐的推理和证明，并尽量结合几何图形进行直观解释，以帮助学生理解和掌握所学内容；

(2) 考虑到计算机在日常生活中的广泛应用，为促进教学手段不断改革和创新，培养学生使用计算机解决数学问题的意识和能力，本书设计了相应的数学实验，通过这些实验来介绍数学软件 Matlab 在高等数学中的应用，有助于激发学生的学习兴趣，增强其实际操作能力，同时加深其对于基础知识的理解和应用；

(3) 每节都精选了一定数量的习题，习题类型广泛，紧扣教材，根据难易程度分为 A、B 两部分，以使本书适合多层次读者的需要，并在书后附有参考答案及提示；

(4) 章节内容可选空间大，其中带 * 内容属于选学，教师可根据专业需要和教学时数做适当安排。

全书共 13 章，分上、下两册，第 1~6 章为上册，第 7~13 章为下册。第 1 章由刘仁云编写，第 2 章、第 6 章和第 13 章由李东平编写，第 3 章由侯国亮编写，第 4 章、第 5 章由张晓丽编写，第 7 章、第 9 章和第 10 章由赵虹编写，第 8 章由赵红发编写，第 11 章由梁四化编写，第 12 章由罗英语编写，其他参编人员有张忠毅、陈梦泽等。全书由刘仁云、赵虹统稿，并负责组织协调工作。

全书定价 56 元，上册定价 28 元，下册定价 28 元。

在编写本书过程中，参考了国内外大量有关高等数学的教材，在此谨向各位作者表示由衷的感谢。由于编者水平所限，加之时间比较仓促，书中疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

目 录

第 1 章 函数与极限	1
1.1 函数	1
1.1.1 集合、区间和邻域	1
1.1.2 函数的概念	2
1.1.3 函数的几种特性	6
习题 1.1	8
1.2 反函数与复合函数	9
1.2.1 反函数	9
1.2.2 复合函数	10
习题 1.2	11
1.3 初等函数及常用函数	11
1.3.1 基本初等函数和初等函数	11
* 1.3.2 双曲函数和反双曲函数	13
1.3.3 常用经济函数	14
1.3.4 常用物理函数	17
习题 1.3	18
1.4 数列的极限	19
1.4.1 数列极限的概念	19
1.4.2 收敛数列的性质	22
习题 1.4	23
1.5 函数的极限	24
1.5.1 自变量趋于有限值时函数的极限	24
1.5.2 自变量趋于无穷大时函数的极限	26
1.5.3 左、右极限	27
1.5.4 函数极限的性质	28
* 1.5.5 子序列的收敛性	28
习题 1.5	29
1.6 无穷小与无穷大	30
1.6.1 无穷小	31
1.6.2 无穷小的运算性质	31
1.6.3 无穷大	33
1.6.4 无穷小与无穷大的关系	33
习题 1.6	34
1.7 极限运算法则	35
习题 1.7	39
1.8 极限存在准则两个重要极限	40
1.8.1 夹逼准则	40

1.8.2 单调有界准则	41
1.8.3 两个重要极限	42
习题 1.8	46
1.9 无穷小的比较	48
1.9.1 无穷小比较的概念	48
1.9.2 等价无穷小	49
习题 1.9	51
1.10 函数的连续与间断	51
1.10.1 函数的连续性	52
1.10.2 连续函数与连续区间	54
1.10.3 函数的间断点	55
习题 1.10	57
1.11 连续函数的运算与性质	58
1.11.1 连续函数的运算	58
1.11.2 复合函数的连续性	59
1.11.3 初等函数的连续性	60
1.11.4 闭区间上连续函数的性质	61
习题 1.11	62
复习题 1	63
第 2 章 导数与微分	66
2.1 导数的概念	66
2.1.1 引例	66
2.1.2 导数的定义	67
2.1.3 可导性与连续性	70
习题 2.1	70
2.2 函数的求导法则	72
2.2.1 求导的四则运算法则	72
2.2.2 反函数的求导法则	74
2.2.3 复合函数的求导法则	75
习题 2.2	77
2.3 隐函数及参数方程的求导	78
2.3.1 隐函数的求导法	78
2.3.2 由参数方程确定的函数的求导法	81
习题 2.3	82
2.4 高阶导数	83
2.4.1 高阶导数的定义	83
2.4.2 一些常用函数任意阶导数的表达式	84
习题 2.4	86
2.5 函数的微分	87
2.5.1 微分的定义	87

2.5.2 微分的几何意义	88
2.5.3 微分的近似计算	89
2.5.4 基本初等函数的微分公式与微分运算法则	90
习题 2.5	92
复习题 2	93
第 3 章 微分中值定理与导数的应用	96
3.1 微分中值定理	96
3.1.1 罗尔定理	96
3.1.2 拉格朗日中值定理	97
3.1.3 柯西中值定理	99
习题 3.1	100
3.2 洛必达法则	101
3.2.1 “ $\frac{0}{0}$ ”型与“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式	101
3.2.2 其他类型的未定式	104
习题 3.2	105
3.3 泰勒公式	106
习题 3.3	109
3.4 函数的单调性、曲线的凹凸性与极值	110
3.4.1 函数单调性的判定法	110
3.4.2 曲线的凹凸性与拐点	112
3.4.3 函数的极值	115
习题 3.4	118
3.5 函数的最值及其应用	120
3.5.1 函数的最大值与最小值	120
3.5.2 最值在经济学中的应用	121
习题 3.5	123
3.6 函数图像的描绘	124
习题 3.6	127
3.7 曲率	128
3.7.1 弧微分	128
3.7.2 曲率及其计算公式	129
3.7.3 曲率圆与曲率半径	131
习题 3.7	132
复习题 3	133
第 4 章 不定积分	135
4.1 不定积分的概念与性质	135
4.1.1 原函数与不定积分的概念	135
4.1.2 不定积分的几何意义	136
4.1.3 积分运算与微分运算的关系	136

4.1.4 基本积分表	137
4.1.5 不定积分的性质	137
习题 4.1	139
4.2 换元积分法	140
4.2.1 第一类换元法	140
4.2.2 第二类换元法	142
习题 4.2	144
4.3 分部积分法	145
习题 4.3	147
4.4 几种特殊类型函数的积分	148
4.4.1 有理函数的积分	148
4.4.2 三角函数有理式的积分	149
4.4.3 某些无理函数的积分	150
习题 4.4	151
复习题 4	152
第 5 章 定积分及其应用	154
5.1 定积分的概念与性质	154
5.1.1 引例	154
5.1.2 定积分的定义	156
5.1.3 定积分的几何意义	157
5.1.4 定积分的近似计算	158
5.1.5 定积分的性质	158
习题 5.1	160
5.2 微积分基本公式	161
5.2.1 变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系	161
5.2.2 积分上限的函数及其导数	161
5.2.3 微积分基本公式	163
习题 5.2	164
5.3 定积分的换元积分法和分部积分法	165
5.3.1 定积分的换元积分法	165
5.3.2 定积分的分部积分法	167
习题 5.3	168
5.4 广义积分	169
5.4.1 无穷区间上的广义积分——无穷积分	169
5.4.2 无界函数的广义积分——瑕积分	171
习题 5.4	173
5.5 定积分的应用	173
5.5.1 定积分的微元法	174
5.5.2 定积分求平面图形的面积	175
5.5.3 定积分求体积	177

习题 5.5	179
复习题 5	179
第 6 章 实验	181
6.1 一元函数的作图和求极限	181
6.1.1 基本命令	181
6.1.2 实验内容	181
6.1.3 实验作业	185
6.2 一元函数的求导	186
6.2.1 基本命令	186
6.2.2 实验内容	186
6.2.3 实验作业	188
6.3 导数的应用	189
6.3.1 基本命令	189
6.3.2 实验内容	189
6.3.3 实验作业	193
6.4 一元函数积分的计算	193
6.4.1 基本命令	193
6.4.2 实验内容	194
6.4.3 实验作业	196
参考文献	198
参考答案	199
附录 常用积分公式	224

第 1 章 函数与极限

数学知识是无穷的，现在我们即将学习的微积分学虽然只是其中的一小部分，但却是非常基础和重要的一部分。在数学发展史上它曾经扮演了一个特别的角色，是近代数学发展的里程碑。微积分与实际应用密切联系，在多个学科分支上有着广泛的应用。微积分不同于中学所学数学知识的最关键之处是：微积分研究更多动态的事物，较少的静态事物。它关注变化，关注运动，并用量化的方式进行处理。本章将介绍函数、极限、连续等基础知识和相关方法，这些都是微积分中最基础的元素，也蕴含着微积分的基本思想之一——极限思想。了解和掌握这些思想和方法将有助于学生学好这门课程。现在我们就以重新认识和学习函数开始。

1.1 函 数

函数是微积分中要学习的重要对象。函数的概念产生于 17 世纪，从模糊的含义到准确的定义经过了 200 多年的时间，众多数学家对这一概念进行了修正和提炼，得到了我们今天所熟悉的样子。这个概念如此重要，几乎在所有科学研究工作中占据了中心位置。下面就来讨论关于函数的基本思想、图像、变化和合成。

1.1.1 集合、区间和邻域

1. 集合

人们把具有某种特定性质的事物的总体称为集合，用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示。集合中的事物称为该集合的元素，用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示。当 a 是集合 A 中的元素时，表示为 $a \in A$ ，当 a 不是集合 A 中的元素时，表示为 $a \notin A$ 。

集合有两种表示方法：列举法和描述法。列举法就是一一列举集合中的所有元素。例如，“小于 5 的正整数”可以表示为 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 。描述法则是把集合中元素的性质描述出来，如同样的问题，用描述法可以表示为

$$A = \{x \mid x \text{ 是小于 5 的正整数}\}.$$

如果集合的元素都是数，则称它为数集。在本书中，涉及的集合都是数集。常用的数集有自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集，分别用 N, Z, Q, R, C 表示。

如果集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A \subseteq B$ （读作 A 包含于 B ）或 $B \supseteq A$ 。如果存在 $A \subseteq B$ 且 $B \supseteq A$ ，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A = B$ 。

数集 N, Z, Q, R, C 之间的关系为： $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$ 。

2. 集合的基本运算

集合的基本运算有三种，即并集、交集和差集。

设 A, B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集（简称并），记作 $A \cup B$ ，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

设 A, B 是两个集合, 由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集 (简称交), 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

设 A, B 是两个集合, 由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集 (简称差), 记作 $A \setminus B$, 即

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

如果我们研究的某个问题限定在一个大的集合 I 中进行, 所研究的其他集合 A 都是 I 的子集. 此时, 我们称集合 I 为全集或基本集. 称 $I \setminus A$ 为 A 的补集或余集, 记作 $\complement_I A$.

3. 区间和邻域

区间实际是实数的集合, 我们已经了解的区间有以下几类 (其中, $a < b, a, b \in \mathbf{R}$):

闭区间: $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$;

开区间: $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$;

半开区间: $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ 、 $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$;

以上三类区间也称为有限区间.

无限区间: $[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\}$ 、 $(a, +\infty) = \{x \mid a < x\}$ 、 $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$ 、 $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$ 、 $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$.

其中, a 和 b 称为区间 (a, b) 、 $[a, b]$ 、 $[a, b)$ 、 $(a, b]$ 的端点, $b - a$ 称为区间的长度.

邻域是另一类数集, 具有某种对称性. 我们将以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域, 记作 $U(a)$.

定义 1 设 a, δ 是实数, $\delta > 0$, 则称开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\} = \{x \mid |x - a| < \delta\},$$

其中, 点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径.

把邻域的中心点去掉, 所得到的邻域称为 a 去心 δ 邻域, 记作 $\mathring{U}(a, \delta)$, 即

$$\mathring{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\},$$

当不需要特别辨明邻域的半径时, 可简记作 $U(a)$.

1.1.2 函数的概念

函数是描述变量之间相互依赖关系的一种数学模型.

在自然界和社会生活中有很多变化的量, 这些变量之间往往存在相互作用的关系, 或者遵循一定的规律. 函数具有描述这种规律的功能. 例如, 圆的面积 A 与该圆的半径 r 有关, r 与 A 之间的关系可以用一个方程 $A = \pi r^2$ 给出. 每取定一个正数 r , 就得到唯一的一个面积值 A , 我们说 A 是 r 的函数.

定义 2 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x), x \in D.$$

其中, x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记作 D_f , 即 $D_f = D$.

对于 $x_0 \in D$, 按照对应法则 f , 总有确定的值 y_0 (记为 $f(x_0)$) 与之对应, 则称 $f(x_0)$

为函数在点 x_0 函数值. 因变量与自变量的这种相依关系通常称为**函数关系**.

当自变量 x 取遍 D 中所有数值时, 对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的**值域**, 记为 R_f 或 $f(D)$, 即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

注: 函数的定义域 D_f 和对应法则 f 称为函数的**两个要素**. 如果两个函数的定义域相同, 对应法则也相同, 则这两个函数是相同的, 否则不同. 例如, 函数 $y = |x|$ 和 $y = \sqrt{x^2}$, 虽然函数的表现形式不同, 但它们的定义域和对应法则是相同的, 所以这两个是相同的函数.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定: 一种是对有实际背景的函数, 根据实际背景中变量的实际意义确定; 另一种是纯数学问题, 其定义域为使得函数表达式有意义的实数所构成的集合, 我们称之为函数的**自然定义域**.

1. 函数的表示方法

通常有四种表示函数的方法, 分别如下:

语言法: 即用语言来描述;

数表法: 通过一个数值表来描述, 也称为表格法;

可视法: 即用图形来描述, 也称为图形法;

代数法: 即用准确的公式形式描述, 也称为公式法、解析法.

如果一个函数可以用四种方法来表示, 通常情况下, 人们会使用其中的一、两种表示方法, 以便从另一个视角来了解它. 例如, 已知一个函数表达式, 然后绘出它的图像. 但是某些函数只适合某一种方式来描述. 下面给出用这四种方法来表示某个函数的例子.

我们可以用语言这样描述一个函数: $P(t)$ 是 t 时刻的世界人口数. 表 1.1 提供了该函数一个方便的表示方法.

表 1.1

年份	人口/百万
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080

如果在坐标轴中画出这些数值, 就得到一个图像, 即散点图, 如图 1.1 所示. 这个图很有用, 它使我们能够马上获得相应的数据.

当然, 图 1.1 不可能给出一个准确的人口等式 $P(t)$, 但是可以用一个近似的函数来代替 $P(t)$. 实际上, 可以获得近似表达式

$$P(t) \approx f(t) = (0.008079266) \cdot (1.013731)^t.$$

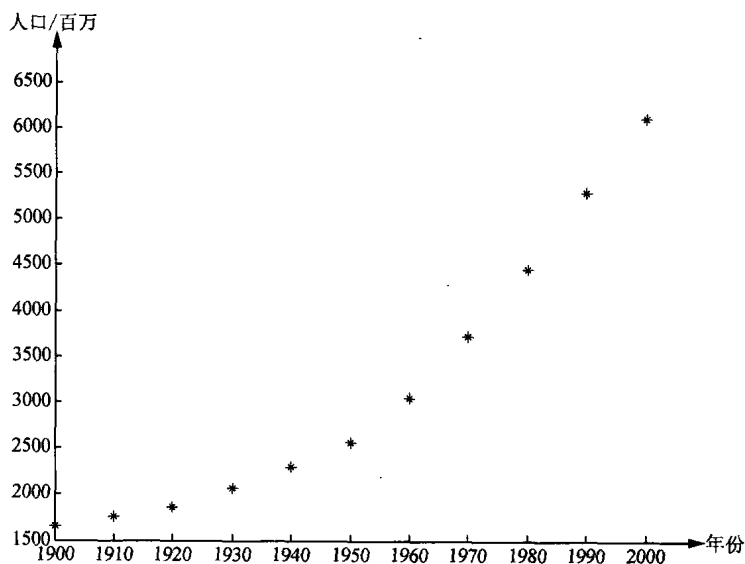


图 1.1

这个近似函数的图形如图 1.2 所示.

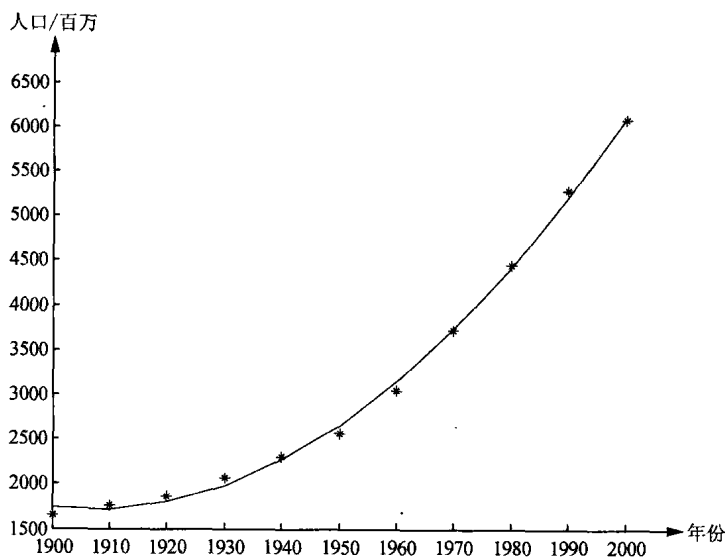


图 1.2

2. 单值函数与多值函数

在函数的定义中, 对于每个 $x \in D$, 对应的函数值 y 总是只有一个, 这种函数称为**单值函数**, 否则称为**多值函数**. 对于多值函数, 通常只要附加一些条件, 就可以将它转化为单值函数, 这样得到的单值函数称为多值函数的单值分支. 例如, 在由方程 $x^2 + y^2 = r^2$ 给出的对应法则中, 附加 “ $y \geq 0$ ” 的条件, 即以 “ $x^2 + y^2 = r^2$ 且 $y \geq 0$ ” 作为对应法则, 就可得到一个单值分支 $y = y_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

根据函数代数形式的不同, 函数还可分为**显函数**、**隐函数**和**分段函数**三种.

显函数：函数 y 由 x 的代数式表示. 如 $y=x^2+1$.

隐函数：变量 y 与 x 之间的关系由一个方程 $F(x, y)=0$ 表示, 如 $\ln y + e^x + 1 = 0$.

分段函数：函数在其定义域的不同范围内, 具有不同的代数表达式.

需要明确的是, 分段函数并不是几个函数, 而只是一个函数. 下面列举几个常见的函数.

例 1 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

如 $y=|x|$ 形式的函数称为绝对值函数. 其定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f=[0, +\infty)$. 其图形如图 1.3 所示.

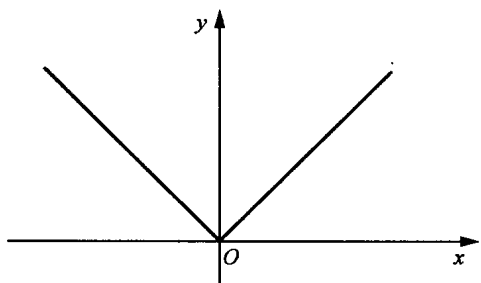


图 1.3

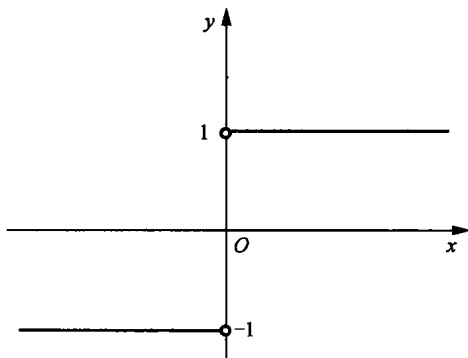


图 1.4

例 2 符号函数.

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

其定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f=\{-1, 0, 1\}$, 如图 1.4 所示.

例 3 取整函数 $y=[x]$, 其中, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如图 1.5 所示.

其定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f=\mathbb{Z}$. 例如, $[\frac{5}{7}]=0$, $[\sqrt{2}]=1$, $[\pi]=3$, $[-1]=-1$, $[-3.5]=-4$.

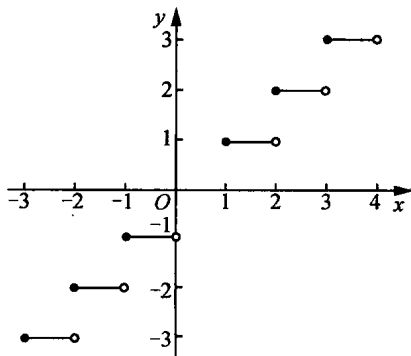


图 1.5

例 4 分段函数 $y = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x, & x > 1 \end{cases}$, 其定义域为 $D = [0, 1] \cup (1, +\infty) = [0, +\infty)$.

1.1.3 函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subseteq D$. 如果存在正数 M , 使对任一 $x \in X$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界, 或称 $f(x)$ 是 X 上的有界函数. 正数 M 是 $f(x)$ 的界, 显然任何大于 M 的正数都是 $f(x)$ 的界. 其图形特点是 $y = f(x)$ 的图形在直线 $y = M$ 的下方. 如果不存在这样的正数 M , 则称 $f(x)$ 在 X 上无界. 这时称函数 $f(x)$ 是无界函数, 即对任一 M , 总存在 $x_1 \in X$, 使 $|f(x_1)| > M$.

例如, 函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的: $|\sin x| \leq 1$. 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无上界的, 或者说它在 $(0, 1)$ 内有下界, 无上界. 这是因为, 对于任意的 $M > 1$, 总有 $x_1: 0 < x_1 < \frac{1}{M} < 1$, 使 $f(x_1) = \frac{1}{x_1} > M$, 所以函数无上界. 调整定义域, 可以使一个无界函数成为有界函数, 如函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(1, 2)$ 内是有界的.

2. 函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subseteq D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例如, 函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的, 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的, 但在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调的. 函数 $y = \sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是单调的, 但在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上是单调函数如图 1.6 和图 1.7 所示.

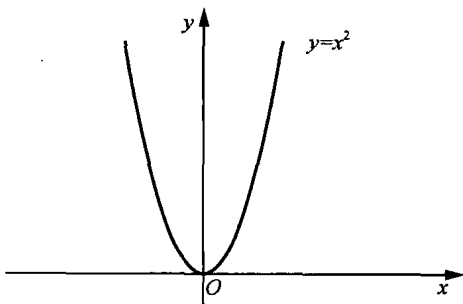


图 1.6

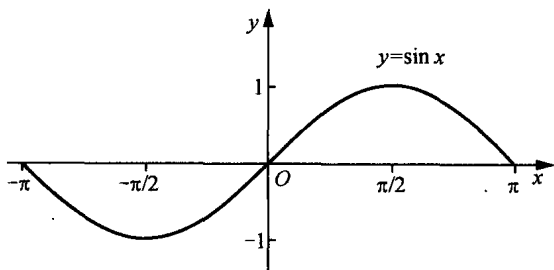


图 1.7

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$), 如果对于任意 $x \in D$, 有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

如果对于任一 $x \in D$, 有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

例如, 函数 $y = x^2$ 是偶函数, 如图 1.6 所示; 函数 $y = \sin x$ 是奇函数, 如图 1.7 所示; $y = \sin x + \cos x$ 是非奇非偶函数, 如图 1.8 所示.

例 5 判断函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解 因为函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) \\ &= \ln \frac{(-x + \sqrt{1+x^2})(x + \sqrt{1+x^2})}{x + \sqrt{1+x^2}} = \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个正数 T , 使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm T) \in D$, 且

$$f(x \pm T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期.

周期函数的图形特点: 在函数的定义域内, 每个长度为 T 的区间上, 函数的图形有相同的形状, 即周期为 T 的函数在它周期正整数倍的距离内总是重复出现, 如图 1.9 所示. 显然只要是 T 的正整数倍, 都是 $f(x)$ 的周期, 为了研究方便, 通常用最小正周期来描述函数的周期, 但并不是每个周期函数都有最小正周期.

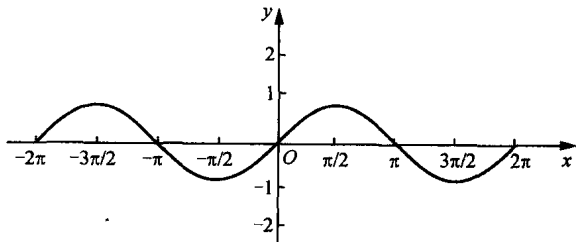


图 1.9

例 6 狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

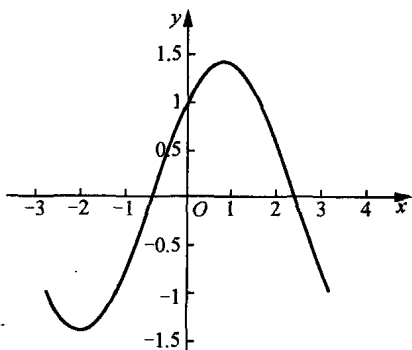


图 1.8

容易验证 $D(x)$ 是周期函数, 任何正有理数 r 都是其周期, 因为不存在最小的正有理数, 所以它没有最小正周期.

习题 1.1

(A)

1. 填空.

- (1) “100 以内的所有平方数” 所组成的集合可以表示为 _____.
- (2) “方程 $x^2 - x - 2 = 0$ ” 的所有根所组成的集合可以表示为 _____.
- (3) $\{x \mid x^2 - 1 > 0\}$ 所对应的区间为 _____.
- (4) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 2^x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(-1) = \underline{\hspace{1cm}}$, $f(0) = \underline{\hspace{1cm}}$, $f(2) = \underline{\hspace{1cm}}$.

2. 求下列函数的定义域.

- (1) $y = \sqrt{1+x}$;
- (2) $y = \arcsin \frac{x-1}{3}$;
- (3) $y = \frac{1}{x^2 - 2x}$;
- (4) $y = \lg(1+x)$.

3. 判断下列函数的奇偶性.

- (1) $y = \sin x \cdot \cos x$;
- (2) $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$;
- (3) $y = x^3 + \sin x + 1$;
- (4) $y = \lg(x^2 + 1)$.

4. 下列函数是否为周期函数? 如果是, 指出其最小正周期.

- (1) $y = 1 + \cos(\pi x)$;
- (2) $y = |\sin x|$;
- (3) $y = x \sin \frac{1}{x}$.

5. 判断下列函数是否有界.

- (1) $y = \frac{x}{1+x^2}$;
- (2) $y = \sin \frac{1}{x}$;
- (3) $y = x \cos x$.

6. 飞机从一个机场起飞, 经一小时后在另一个相距 400 千米的机场着陆, 如果用 t 表示时间, $x(t)$ 表示水平距离, $y(t)$ 表示飞机的高度. 试回答下面问题:

- (1) 画出一个关于 $x(t)$ 的可能的图像;
- (2) 画出一个关于 $y(t)$ 的可能的图像;
- (3) 画出一个关于水平速度的可能的图像;
- (4) 画出一个关于垂直速度的可能的图像.

7. 下面表格给出的是某地区在 2001 年 6 月某天从午夜到 14:00 的每隔 2 小时的气温读数 T (华氏摄氏度):

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	73	73	70	69	72	81	88	91

- (1) 利用气温读数画一个函数 $T(t)$ 的图像;
- (2) 利用所画图像估算 11:30 时刻的气温.