

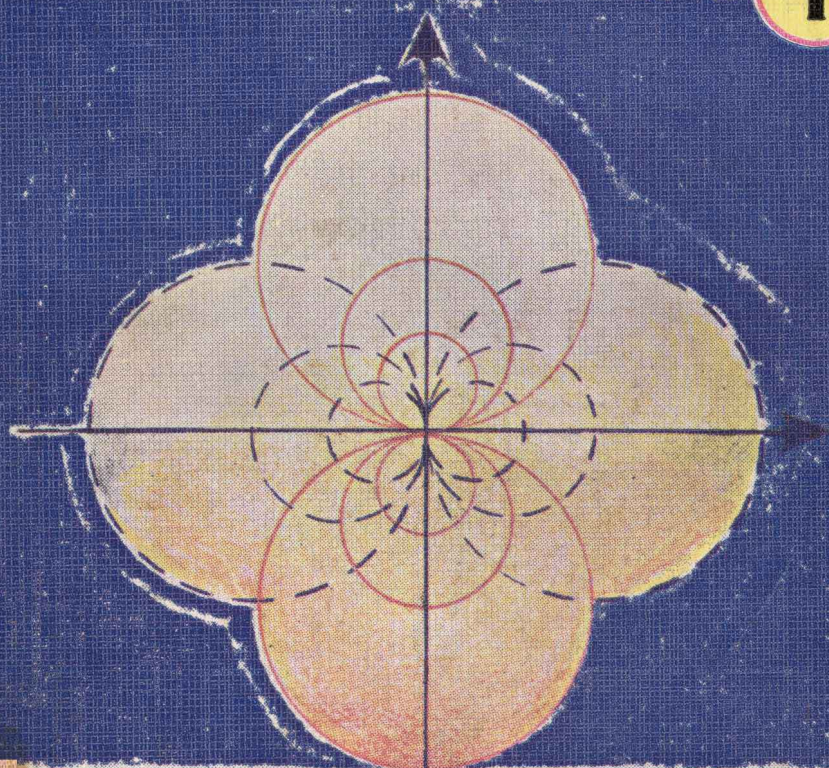
ADVANCED *Erwin Kreyszig* ENGINEERING

Fourth Edition MATHEMATICS

高等工程數學

黃文儀譯

1



$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

高等工程數學

第四版 (1979)

第一冊

原著者

Erwin Kreyszig

PROFESSOR OF MATHEMATICS

OHIO STATE UNIVERSITY

譯者

黃文儀

私立大同工學院教授

東華書局印行



版權所有・翻印必究

中華民國六十八年九月初版

大學
用書

高等工程數學 (全四冊)

第一冊 定價 新台幣壹百元整

(外埠酌加運費滙費)

譯者	黃文儀
發行人	卓鑫森
出版者	臺灣東華書局股份有限公司 臺北市博愛路一〇五號 電話：3819470 郵撥：6481
印刷者	合興印刷廠

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號
(68081)

原 序

本書目的 此書主旨，係對研習工程及物理之讀者，介紹近代數學中，有關實際問題之各種最重要課目。各項主題，依據其在應用方面遭遇之多寡情形，精心加以選擇。近年來，在工程教育專題討論會上，所發表各種有關現代數學之新觀念，均被考慮予以搜集。無論對已在數學訓練方面，早訂有擴展課程計劃之各院校，或正準備適應一般潮流，而加強其數學訓練計劃之學術機構，此書應均適合。

基本微積分，係研讀本書前之惟一先修課程。

本書所搜集之材料，係選自美國，加拿大，及歐洲各學校大學部及研究所內，為研習工程，物理，或數學者所講授之主要課程。

本書第四版之改進要點

此一版本與第一，二及三版主要不同之處如下：

習題 習題均已改變。並包含更多的應用問題。

模型化 (Modeling) 可藉於不同章節之應用而更加深印象。

線性常微分方程式 於第二章中包含微分運算子 (Differential Operators) 新的一節。相平面法 (Phase plane methods)，穩定性 (Stability) 以及著名的范德伯方程式 (Van der Pol equation) 則於新的一章 (第三章) 中加以探討。

微分方程式系統 加上了不用矩陣之基本方法。採用矩陣的方法

則加以擴充而成為新的一節。

拉普拉斯變換運算法 包含褶積 (Convolution)。整章重寫而更為緊湊。在此新版中，兩個移位定理 (Shifting theorems) 包含於同一節，微分方程較早出現，並介紹褶積及其應用，部分分式法 (Partial fractions) 於稍後討論，並且不那麼強調。

偏微分方程式 本章包含新的一節討論拉氏變換運算法對偏微分方程的應用。

矩陣 本章部分加以重組與重寫，以符合近代線性代數之潮流。新的一版也包括較多的應用。

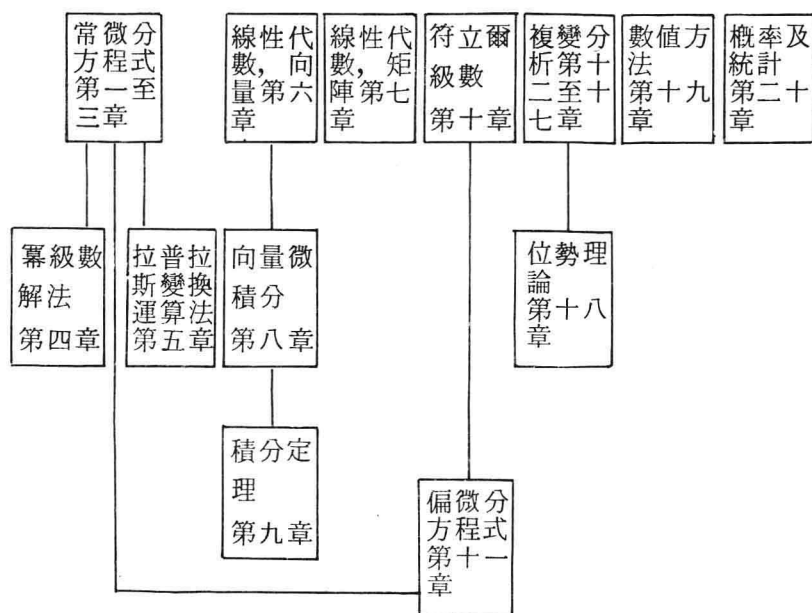
複變分析 改成如下更有利之方式。關於複數有短的三節 (前面版本為長的一節) 對本題作一簡單的介紹。基於相同的理由，保角寫像 (Conformal mapping) 的那一章，於開始時有較多的例題。有關數列 (Sequence) 與級數 (Series) 之一章則加以重寫，以便使在複變分析的班級上，僅需要本章最初兩節，因此可節省許多時間而不致於喪失關聯性。冪級數 (Power series)，泰勒級數 (Taylor seires) 與勞倫級數 (Laurent seires) 出現於同一章，也就是說它們比前面版本彼此更靠近。

數值分析 本版包含關於線規 (Splines) 新的一節，它對於工學專家有日漸增加的重要性。

概率與統計 習題加以擴充而包含較多的應用。

參考資料 於附錄 1 中者，補充了新資料。

本書內容及其安排 本書各重要部分之間，其主題材料之安排，可由下列圖解表示。



本書中對常微分方程式，線性代數和向量分析，以及複變分析，此三種也許是工程師們最感重要之部門，所提供之討論，極具分量。其他如符立爾級數；偏微分方程式，數值方法等各章之長度，亦使能包含足夠之材料，以便於一般的各類課程採作教本之用。

為便利選用本書部分內容起見，各章均儘可能保持其獨立性。

所有各章均分為若干較短之節數，每節均含有闡釋觀念、方法、結果、以及工程應用之例題及習題。

本書包含各種歷史性之註腳，原始參考文獻，以及 400 個以上之挿圖。

參考資料 若干用作參考及進一步研究之書籍，可於本書末尾從 A-1 頁開始查得。部分有關特殊函數之公式，則包含在附錄 3 內，

從A-54 頁開始。

習題和答案 本書備有 3,500 個以上精心選擇之習題，包括簡單之一般練習，以及甚為複雜之實際應用。單號習題答案，列於本書末尾附錄 2 內，從A-6 頁開始。

函數表綜合列入附錄 4，從A-61 頁開始。

課程順序建議 全部材料，可按下列次序研讀，並適宜分作每週 3-5 小時，四個連續學期課程之用：

第一學期：常微分方程式（第一至五章）

第二學期：線性代數及向量分析（第六至九章）

第三學期：符立爾級數，偏微分方程式（第十、十一章），數值方法（第十九章）

第四學期：複變分析（第十二至十八章）

另一有關**工程統計學**（每週 3-5 小時；第二十章）之課程，則可在上列之任一學期中，或以後開授。

單獨一學期課程 此外本書亦適宜於作一學期獨立課程，每週三小時之用，例如：

常微分方程式入門（第一，二章）

拉氏變換運算法（第五章）

向量代數及微積分（第六，八章）

矩陣及線性方程式系統（第九章）

符立爾級數及偏微分方程式（第十，十一章）

複變分析（第十二至第十七章）

數值分析（第十九章）

縮短課程 縮短課程時，可予省略之節數，均在每章前面，加以註明。

選擇主題之準則 本書一類之著作，究應包含那些主題？以及此等主題應如何安排和介紹？

爲尋得上述各基本問題之答案起見，我們可追溯工程數學發展之一段歷史，此項發展顯示出如下兩種有趣事實。

1. 數學在工程科學中日趨重要，且可預測此項情形，將一直繼續下去。此種趨勢之一重要原因，係由於近代工程問題已變成如此複雜，使得我們不可能似以往之純靠物理直覺，或僅憑過去經驗以求得其解答。此種實驗方法，過去對若干問題之解答，相當成功。但當極高速度，極大力量，極高溫度，或其他不正常條件摻入時，則無法予以解決而致失敗。且當各種具有不尋常物理特性之近代新穎材料（如塑膠，合金等）出現後，情況更加嚴重。因此上述之實驗工作，達到費時，費力之驚人複雜程度。此時數學乃可予以協助，以籌劃實驗及其構造，計算出實驗數據，並減少其尋求解答之工作與費用。

2. 過去基於純理論性之原因而發展之數學方法，在工程數學中突然變成十分重要。例如矩陣，保角寫像之理論，以及具有週期性解答之微分方程式之理論等。

以上之發展事實，對工程數學教學方面之反應如何？由於所需求之數學不斷增加，我們應否在課程中，增加更多之主題數目，而致減少每一主題所佔有之時間？或應集中精力，選出若干具有實際重要性之少數重要事物，俾便適於教學訓練，並啓迪學生之數學思想，以發展其本身之創造能力？

六十或八十年以前，無人能預知保角寫影或矩陣，將在工程業務之數學部分，佔據重要之位置。在相似情形下，欲預測何類數學理論，在今後二十或三十年，將對工程應用方面增加其重要性，亦

屬極爲困難。惟無論將發生之事實如何，具有良好數學訓練基礎之學者，將可適合未來之各種需要，而能利用其所學，以熟習新穎數學方法。

因此工程數學教育最重要之目標，在使學生如何熟習運用數學之思考方法，並認識各項指導原理及觀念之幕後背景。此點較僅學習如何正式運用數學方法，更爲重要。學者應認識數學並非搜羅戲法或秘訣，而係建立在較少數基本觀念上的一門具有實際重要性和系統性科學，其中包含有極具效力之各種統一方法。學者尤應深切體會運用數學程序於工程問題之必要，而發覺理論和應用間之相互關係，有如樹木和果實間之彼此密切性一樣。

讀者將可看出應用數學來解答工程問題時，包含三項主要步驟：

1. 將已知物理資料翻譯成數學形式（模型化）（Modeling）
如此我們可得出該物理情況之一種數學翻版模型。此模型可能即爲一微分方程式，一組聯立線性方程式，或其他之數學表示式。

2. 將此模型利用數學方法處理之，此即導致已知問題數學形式之解答。

3. 將此數學解答之結果，以物理條件解釋之。

所有以上三步驟似有相等之重要性，而本書在作各種介紹時，主要在輔助讀者，能充分發揮其完成三項步驟之技術。故有關應用問題之選擇，以具有一般性者爲優先。

在若干之討論情形下，常不免依賴各種已知結果，其證明之手續或方法，常超出類似本書水準之範圍。遇有此等情形時，書中均一一加以明顯之註解。因困難之隱瞞，或事物之過度簡化，對從事職業性工作之讀者均無裨益。

以上即係作者對選擇及介紹本書題材之若干指導原則。各項材

料之選擇，均曾根據過去及目前之教學及研究經驗，在極為審慎之態度下，作成決定。有時寧可對勸使包含工程數學中之“每一重要事物”之誘惑性建議，拒絕加以考慮。

關於如何方能對各項主題，儘可能作簡單明瞭而準確之介紹方面，作者曾加以特別之努力，其中亦包括註解符號之選擇，每章中水準之深度，逐漸增加，並避免各種艱深理論之跳越及累積。

銘謝 作者對其從前許多老師，同事，和同學，在編著本書時所提供之協助和建議，深致謝意。原稿之若干部分，係以油印形式，先分發給各班同學，再由他們細閱後，加註改進建議退還。與許多工程師及數學家口頭或書面之討論，對作者實有極大之幫助，其中本人願特別提到褒格曼 (S. Bergman) (†)，坎培爾 (S.L. Campell)，卡格 (J.T. Cargo)，張伯 (P.L. Chambré)，克郎漢 (A. Cronheim)，弟拉尼 (J. Delany)，德特曼 (J.W. Dettman)，赫爾索 (R.G. Helsel)，胡夫 (W.N. Huff)，克利普 (E.C. Klipple)，可姆科 (V. Komkow)，孔氏 (H. Kuhn)，蘭伯 (G. Lamb)，曼氏 (H.B. Mann)，馬克思 (I. Marx)，孟羅 (W.D. Munroe)，浦氏 (H.W. Pu)，瑞多 (T. Rado) (†)，瑞契多夫 (P.V. Reichelderfer)，雪克 (J.T. Scheick)，史密斯 (H.A. Smith)，史本賽 (J.P. Spencer)，托德 (J. Todd)，懷斯 (H.J. Weiss)，及衛南斯基 (A. Wilansky) 等在美國之各位教授，多倫多 (Toronto) 之柯克斯特 (H.S.M. Coxeter) 教授，以及在歐洲之保羅 (B. Baule) (†)，彭克 (H. Behnke)，費羅原 (H. Florian)，格拉夫 (H. Graf)，何亨伯格 (F. Hohenberg)，克羅特 (K. Klotter)，賓氏 (M. Pinl)，路特 (F. Reutter)，史密登 (C. Schmieden)，恩格 (H. Unger)，華爾特 (A. Walther) (†)，衛南德 (H. Wie-

landt) 教授等。在此作者僅能表示其誠摯之謝意。

最後，本人應向約翰 - 衛律和孫氏公司 (John Wiley and Sons) 對其編印此版本書時之有效合作和審慎精神，表示感謝。

許多讀者所提供之寶貴建議，均在編印此版時，予以採納。其他任何對改進本書之批評和意見，將受本人之衷心歡迎。

愛文 - 克雷斯聚格
(Erwin Kreyszig)

高等工程數學

第一冊 目 錄

第一章 首階常微分方程式

1.1	基本觀念及認識	2
1.2	幾何意義、等斜線	13
1.3	可分離變數方程式	18
1.4	可化成分離變數形式之方程式	38
1.5	恰當微分方程式	42
1.6	積分因子	47
1.7	線性首階微分方程式	50
1.8	參數變化法	60
1.9	電路問題	63
1.10	曲線族，正交軌線	73
1.11	彼卡德疊代法	82
1.12	解答之存在性和惟一性	86

第二章 線性常微分方程式

2.1	二階齊次線性方程式	96
2.2	常係數二階齊次方程式	102
2.3	通解、基本解系，始值問題	106

2.4	特性方程式之實根，複根，二重根	114
2.5	微分運算子	123
2.6	自由振動	127
2.7	高奇方程式	141
2.8	解答之存在性和惟一性	144
2.9	任意階數之齊次線性方程式	154
2.10	常係數任意階齊次線性方程式	160
2.11	非齊次線性方程式	164
2.12	解非齊次線性方程式之一法	167
2.13	強迫振動，諧振	174
2.14	電路問題	184
2.15	藉複數求特解法	192
2.16	非齊次方程式之一般解法	196

第三章 微分方程式系統，相平面，穩定性

3.1	微分方程式系統	200
3.2	相平面	209
3.3	臨界點，穩定性	214

第四章 微分方程式之冪級數解法

4.1	冪級數解法	227
4.2	冪級數解法之理論基礎	233
4.3	雷建德方程式・雷建德多項式	241
4.4	推廣之冪級數解法・指標方程式	248
4.5	貝索方程式・第一類貝索函數	267

4.6	第二類貝索函數	275
4.7	正交函數之集合	282
4.8	斯特姆 - 利奧維爾問題	288
4.9	雷建德多項式及貝索函數之正交性	295
第五章 拉普拉斯變換運算法		
5.1	拉普拉斯變換式，反變換式，線性	305
5.2	微分和積分式之拉氏變換	312
5.3	s 軸上之移位，t 軸上之移位，單位階梯函數	322
5.4	拉氏變換式之微分及積分	335
5.5	褶積	339
5.6	部分分式法	346
5.7	週期性函數，其他應用	360
5.8	部分拉氏變換公式表	375
附錄 1	單號習題答案	379 ~ 403
附錄 2	若干特殊函數之公式	404 ~ 413
附錄 3	數值表	414 ~ 429
中英文名詞對照表		430 ~ 440
若干常數值		441

第一章

首階常微分方程式

Ordinary Differential Equations of The First Order

在工程數學中，微分方程式具有基本重要性。此乃由於甚多之物理現象和關係，均可以微分方程式之數學形態表達之故。我們將研究各種不同之物理及幾何問題，如何導致其微分方程式，以及求解此類方程式最重要之標準方法。在解答中通常用到積分法。

我們將特別重視如何從物理情況來導出其微分方程式。此種由“物理問題”獲得其對應“數學模型”之轉移過程稱為模型化 (Modeling)，這點對工程師及物理學家有很大的重要性，將以典型例題，加以說明。

本書最前面五章，致力於常微分方程式之討論，而本章則係由此等方程式中之最簡單者，即所謂首階方程式者開始。

利用近代計算機來解微分方程式，特別的方便。用來獲得首階微分方程式近似解答之數值方法，包含於 19.7 節內，該節與第 19 章內其他各節無關。對於二階微分方程的數值方法，則於 19.8 節加以探討。

研讀本章前之預修科目：積分學。

短期課程可省略之節數：1.8-1.12 各節。

參考資料：附錄 1，B 部份。

習題答案：附錄 2。

1.1 基本觀念及認識

我們將在本節內解釋有關微分方程式之基本觀念，並舉例加以示範。然後由物理及幾何學中選取兩簡單而實際之問題予以討論。如此可使我們對微分方程式之性質，目的，和應用能有初步之瞭解。

常微分方程式是一種數學等式關係，其中包括一自變數 x 之未知函數 y ，對於 x 之一階或高階微分導數；此類關係也可以包含 y 本身， x 之函數及常數等在內。例如：

$$(1) \quad y' = \cos x,$$

$$(2) \quad y'' + 4y = 0,$$

$$(3) \quad x^2 y''' y' + 2e^x y'' = (x^2 + 2)y^2$$

均為常微分方程式。

常字即表示其對於**偏微分方程式** (Partial differential equation) 之區別，偏微分方程式包含一未定函數 y 之對二個或二個以上獨立變數之偏微分。例如：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

即為偏微分方程式。在本章中我們僅將考慮常微分方程式。

若一常微分方程式中， y 對 x 微分導數之最高階數為 n ，則稱其為 n 階 (Order)。此種微分方程式“階”數之表示法，提供一項有用之分類方法，即區分為一階，二階，或更高階等。故(1)式為一首階微分方程式，(2)式為二階，(3)式為三階。本章中僅討論首階微分方程式，二階以及更高階者，將於二至五章中繼續討論之。

一函數

$$(4) \quad y = g(x)$$

可稱為已知首階微分方程式，在某區間如 $a < x < b$ (亦可能無限) 內之解答 (Solution)。設在此區間內每一處該函數均有定義，並可予以微分，且當 y 及 y' 以 g 及 g' 代替時，原微分方程式之等式恆能成立。

例如，對所有 x 而言，函數

$$y = g(x) = e^{2x}$$

為首階微分方程式 $y' = 2y$ 之解答。

因 $g' = 2e^{2x}$,

又將 g, g' 代入原方程式，原式變為恆等

$$2e^{2x} = 2e^{2x}.$$

有時一微分方程式之解答，將以隱函數形式出現，例如：

$$G(x, y) = 0,$$

此即稱為隱函數解答 (Implicit solution)，以別於顯函數解答 (Explicit solution)，〔如(4)式〕。例如：

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (y > 0)$$

即為 $yy' = -x$

在 $-1 < x < 1$ 區間內之隱函數解答，讀者自可驗證。

微分方程式理論之主要工作，為尋求已知微分方程式之所有解答，並分析其性質。我們將研討各種不同之標準方法，以達到這個目的。

一微分方程式可有許多解答，此可以下例證明之。

例 1

下列每一函數

$$y = \sin x, \quad y = \sin x + 3, \quad y = \sin x - \frac{1}{3}$$