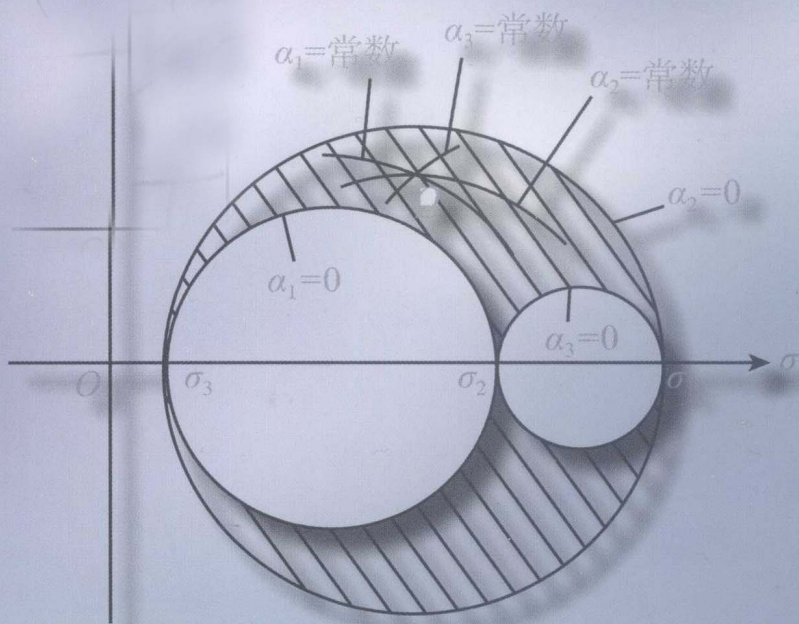


固体力学

尹祥础



地震出版社

固体力学

尹祥 础

地震出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

固体力学/尹祥础. —北京:地震出版社, 2011. 12

ISBN 978-7-5028-3944-4

I. ①固… II. ①尹… III. ①固体力学 IV. O34

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 215147 号

地震版 XM2466

固体力学

尹祥础

责任编辑:王 伟

责任校对:庞亚萍 孔景宽

出版发行:地震出版社

北京民族学院南路9号

邮编:100081

发行部:68423031 68467993

传真:88421706

门市部:68467991

传真:68467991

总编室:68462709 68423029

传真:68455221

专业图书事业部:68721991 68467982

E-mail: 68721991@sina.com

经销:全国各地新华书店

印刷:九洲财鑫印刷有限公司

版(印)次:2011年12月第一版 2011年12月第一次印刷

开本:787×1092 1/16

字数:723千字

印张:28.25

印数:0001~3000

书号:ISBN 978-7-5028-3944-4/O (4613)

定价:80.00元

版权所有 翻印必究

(图书出现印装问题,本社负责调换)

初版序言

现代科学的发展趋势之一是各门学科间的相互渗透。

力学与地学之间的相互渗透，可以追溯到很远的年代。例如，弹性波理论，在很长一段时期里，一直是地震学的主要理论基础；反过来，也正是由于地震学研究的需要，推动了弹性波理论的发展。与此相联系的一个有意义的事实是：历史上不少杰出的力学家，如拉甫（Love A E H）等，曾致力于地球物理问题的研究；另一方面，不少优秀的地球物理学家，如古登堡（Gutenberg B）、杰弗瑞斯（Jeffreys H）等，大都在力学上有很深的造诣，有的还在力学上做出过贡献。

但是在过去，这种情况只限于地球科学领域内的少数分支。随着科学的迅速发展，近年来，大量数理科学的研究方法与成果已应用到地球科学的许多领域。固体力学就是其中一个很重要的方面。面对这种情况，不少从事地球科学的研究人员及高等院校师生都有进一步深入学习固体力学的愿望，并希望见到一本这样的书。本书就是针对这一需要而撰写的。几年来作者在中国科学院研究生院讲授了固体力学，对象主要是地球科学中与力学关系较密切的有关专业（如地震学、地球动力学、岩石力学等）的研究生，另外还有力学、物理学及工程科学等专业的研究生、科研人员及青年教师。本书就是在该院授课讲义的基础上修改补充而成的。

感谢傅承义教授对于写作本书的热情鼓励与支持。感谢王敏同志为本书付出的辛勤劳动。

如何结合地球科学来系统地讲授固体力学，作者深感经验不足。书中不妥之处在所难免，恳切期望有关专家学者及广大读者批评指正。

尹祥础

1984年5月于北京

第二版序

本书第一版出版于1985年，承蒙广大读者的厚爱，于次年即售罄。不少高等院校和科研单位的同行催促再版，因为忙于科研和教学，一直无暇及此。但有些高校（如中国科技大学等）仍一直选用本书为教材，有些单位（如中国地震局地球物理研究所等）则指定为历届考研用书，因此，再版的需求依然。在地震出版社的帮助下，下决心出第二版。

从本书初版到现在已过去20余年，好在固体力学这样成熟的学科，变化不像一些新兴学科那样快。为了满足有些读者的迫切需求，这次再版时，在格局上未做大的改动，主要是改正了初版中的印刷错误，以及初版中有些显然需要修改的地方，竟达数百处之多。

感谢中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室（LNM）刘月等同学、地震出版社王伟同志、中国地震台网中心彭克银同志和中国地震局地球物理研究所马淑田、葛洪魁同志的帮助。

尹祥础

2011年于中国地震局地震预测研究所

中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室（LNM）

主要符号表

$\bar{u}(u_i)$	位移矢量
$u、v、w$ 或 $u_1、u_2、u_3$	位移矢量在直角坐标系中的分量
$u_r、u_\theta、u_z$	位移矢量在柱坐标系中的分量
$u_r、u_\theta、u_\varphi$	位移矢量在球坐标系中的分量
f_i	体积力在 x_i 轴上的投影
T_i	应力矢量在 x_i 轴上的投影
$\tilde{\sigma}$	应力张量
σ_{ij}	应力分量
S_{ij}	应力偏量分量, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \cdot \delta_{ij}$
σ_0	八面体上的正应力或平均应力, $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$
τ_0	八面体上的剪应力
$\sigma_1、\sigma_2、\sigma_3$	主应力
$I_1、I_2、I_3$	应力张量不变量
$J_1、J_2、J_3$	应力偏量不变量
$\bar{\sigma}$	应力强度
σ_y	单轴拉伸屈服强度
ε_{ij}	应变分量, $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,i} + u_{i,i})$
ϵ_{ij}	应变偏量分量, $\epsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \cdot \delta_{ij}$
$\varepsilon_1、\varepsilon_2、\varepsilon_3$	主应变
τ_{\max}	最大剪应力
$I'_1、I'_2、I'_3$	应变张量不变量
$J'_1、J'_2、J'_3$	应变偏量不变量
$\bar{\varepsilon}$	应变强度
θ 或 Δ	体积应变, $\theta = \varepsilon_{ii}$
A	功
Q	热量
U_E	弹性应变能
W	弹性应变能密度
W_f	形状改变应变能密度

W_v	体积改变应变能密度
λ, μ	拉梅弹性常数
E	杨氏弹性模量
K	体积弹性模量
ν	泊桑比
$J(t)$	蠕变柔度
$G(\omega)$	复柔度
K_I, K_{II}, K_{III}	I、II、III型裂纹的应力强度因子
G	能量释放率

译名对照表

Airy	艾雷	Jeffreys	杰弗瑞斯
Andrade	安德烈	Kárman	卡门
Bauschinger	鲍辛格	Kelvin	开尔文
Beltrami	贝尔脱拉密	Kirchhoff	克希霍夫
Betti	贝蒂	Lamé	拉梅
Bingham	宾汉	Levy	利维
Boussinesq	波西涅斯克	Lode	罗地
Bridgman	布里奇曼	Lomnitz	罗姆尼兹
Broberg	布罗贝格	Love	拉甫
Castigliano	卡斯提杨诺	Michell	密迤尔
Cauchy	柯西	Mises	米塞斯
Clapeyron	克拉贝龙	More	莫尔
Davis	戴维斯	Mott	莫特
Drucker	杜拉克	Murrell	米勒
Dugdale	达格德尔	Nadai	纳迪
Erdogan	厄多根	Naghdi	纳迪
Eshelby	埃歇比	Nuismer	纽斯曼
Euler	欧拉	Ohashi	奥哈西
Filon	菲隆	Orowan	奥罗万
Freund	福鲁德	Osgood	奥斯古德
Galiliao	伽利略	Palaniswamy	帕兰尼斯威米
Goodier	古地尔	Paris	帕里斯
Graham	格雷哈姆	Poisson	泊桑
Green	格林	Prandtl	普朗特尔
Griffith	格里菲斯	Price	普赖斯
Gutenberg	古登堡	Quinney	奎乃
Hanks	汉克斯	Ramberg	兰姆伯格
Hencky	汉奇	Reuss	劳埃斯
Hooke	胡克	Rice	赖斯
Hussin	候赛因	Rosengren	罗森兰
Hutchinson	哈特钦森	Saint-Venant	圣维南
Inglis	英格里斯	Steketee	斯蒂克蒂
Irwin	欧文	Tada	塔德

Taylor	泰勒
Tresca	屈瑞斯卡
Volterra	伏特拉
Wells	威尔斯
Westergaard	威斯特噶尔德
Wiliams	威廉斯
Zoback	佐巴克

Баренблатт	巴伦布拉特
Галёркин	伽辽金
Жуков	茹可夫
Илюшин	伊留辛
Колосов	柯洛索夫
Костров	柯斯特洛夫
Мухелишвили	木斯海里斯维里
Новожинов	诺沃日诺夫

目 录

主要符号表	(I)
译名对照表	(III)

第一篇 固体力学基础

第一章 应力分析	(2)
§ 1-1 外力与内力, 体力与面力	(2)
§ 1-2 应力矢量	(3)
§ 1-3 一点的应力状态, 应力张量	(3)
§ 1-4 柯西应力曲面	(8)
§ 1-5 主应力与应力张量不变量	(10)
§ 1-6 最大剪应力	(12)
§ 1-7 应力圆 (莫尔圆)	(14)
§ 1-8 应力张量的分解, 应力球张量与偏 (斜) 张量	(20)
§ 1-9 八面体上的正应力与剪应力	(21)
§ 1-10 平衡方程与运动方程	(22)
第二章 应变分析	(25)
§ 2-1 位移矢量及应变张量	(25)
§ 2-2 应变张量及应变分量	(27)
§ 2-3 转动张量及转动位移	(30)
§ 2-4 转轴时应变分量的变换及其相应的推论	(32)
§ 2-5 变形协调方程	(39)
§ 2-6 有限变形介绍	(44)
§ 2-7 可加应变 (汉奇应变)	(50)

第二篇 弹性力学

第三章 应力-应变关系	(54)
§ 3-1 弹性变形过程热力学	(54)
§ 3-2 广义胡克定律	(58)
§ 3-3 线弹性体的应变能	(60)
§ 3-4 各向同性物体的广义胡克定律	(61)
§ 3-5 弹性常数的测定及其相互关系	(66)

§ 3-6	体积改变定律与形状改变定律	(69)
§ 3-7	考虑温度(膨胀)效应时的广义胡克定律	(73)
第四章	弹性力学问题的建立及其一般原理	(74)
§ 4-1	弹性力学的基本方程	(74)
§ 4-2	边界条件、弹性力学问题的建立及分类	(76)
§ 4-3	弹性力学问题的位移解法, 拉梅方程	(77)
§ 4-4	弹性力学问题的应力解法, 拜尔脱拉密-密达尔方程	(79)
§ 4-5	应变能定理(克拉贝龙定理)	(80)
§ 4-6	唯一性定理(克希霍夫定理及纽曼定理)	(83)
§ 4-7	圣维南原理(局部影响原理)	(85)
§ 4-8	功的互换定理(贝蒂定理及马克斯威尔定理)	(87)
§ 4-9	虚功原理	(89)
§ 4-10	最小势能原理, 最小余能原理、里茨(Ritz)法	(90)
§ 4-11	卡斯提扬诺定理	(94)
第五章	弹性力学的平面问题	(96)
§ 5-1	平面应变问题	(96)
§ 5-2	平面应力问题	(101)
§ 5-3	平面问题的边界条件	(106)
§ 5-4	用多项式应力函数解平面问题	(106)
§ 5-5	平面问题的傅立叶级数解法	(114)
§ 5-6	平面问题的变分近似解法	(118)
§ 5-7	极坐标系中平面问题的基本方程	(121)
§ 5-8	应力与幅角无关的问题(拉梅问题、曲梁问题)	(128)
§ 5-9	应力函数的复变函数表示	(136)
§ 5-10	应力与位移的复变函数表示(柯洛索夫公式)	(138)
§ 5-11	用复变函数方法解弹性力学平面问题的实例	(141)
§ 5-12	带圆孔无限大平板的拉伸问题	(144)
§ 5-13	应力解除法及水压致裂法测量地应力的原理	(147)
§ 5-14	无限介质中的包体	(150)
§ 5-15	复变函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 的确定程度	(154)
§ 5-16	边界条件的复变函数表示	(155)
§ 5-17	多连通有限域中应力与位移的单值条件	(158)
§ 5-18	多连通无限域中应力与位移的单值条件	(161)
§ 5-19	无限介质中圆孔问题的傅立叶级数解法	(164)
§ 5-20	集中力与集中力偶	(170)
§ 5-21	保角变换方法的应用	(175)
§ 5-22	含椭圆孔的无限平板的解	(181)
§ 5-23	多值位移, 位错	(185)

第六章 弹性力学的空间问题	(189)
§ 6-1 弹性半无限体中自重引起的应力	(189)
§ 6-2 球体问题的基本方程, 球对称问题	(192)
§ 6-3 球壳在万有引力作用下的解, 地壳内应力的讨论	(198)
§ 6-4 无限弹性介质中集中力作用时的解及其应用	(200)
§ 6-5 轴对称问题, 拉夫应变函数与伽辽金方法	(206)
§ 6-6 半无限体边界面上作用一垂直集中力的问题——波西涅斯克问题	(210)
§ 6-7 弹性力学常用公式集锦	(213)

第三篇 塑性力学

引 言	(220)
第七章 塑性力学的基本概念	(221)
§ 7-1 基本实验资料	(221)
§ 7-2 应力-应变关系的简化模型	(227)
§ 7-3 应力状态与应变状态的进一步研究	(229)
§ 7-4 应力空间, 屈服曲面与屈服条件	(233)
§ 7-5 屈瑞斯卡屈服条件与米塞斯屈服条件	(237)
§ 7-6 屈瑞斯卡条件与米塞斯条件的实验验证与比较	(241)
§ 7-7 加载与卸载、加载方式与加载曲面	(245)
第八章 塑性状态下的本构关系及其应用	(250)
§ 8-1 全量理论	(250)
§ 8-2 全量理论的实验验证	(260)
§ 8-3 全量理论的适用范围, 简单加载定理	(260)
§ 8-4 增量理论	(263)
§ 8-5 杜拉克公设及其推论	(266)
§ 8-6 几种塑性理论的比较	(270)
§ 8-7 岩土类介质考虑静水压影响的塑性理论	(270)
§ 8-8 厚壁筒问题的弹塑性分析	(273)

第四篇 流 变 学

引 言	(283)
第九章 流变模型及其本构关系	(286)
§ 9-1 几种理想介质 (基本元件)	(286)
§ 9-2 马克斯威尔体	(288)
§ 9-3 开尔文体	(294)
§ 9-4 拉普拉斯变换在流变学中的应用	(296)
§ 9-5 标准线性固体	(302)

§ 9-6	其他模型	(306)
§ 9-7	更普遍的线性粘弹性模型的组成及其性质	(307)
§ 9-8	力学系统(机械系统)与电系统间的比拟	(314)
第十章	记忆积分,蠕变柔度与复柔度	(316)
§ 10-1	蠕变柔度与松弛模量	(316)
§ 10-2	记忆积分	(322)
§ 10-3	复柔度与复模量	(327)
第十一章	三维本构关系、对应原理及某些粘弹性问题的解	(338)
§ 11-1	流变介质的三维本构关系	(338)
§ 11-2	粘弹性理论的基本方程组	(341)
§ 11-3	对应原理	(342)
§ 11-4	厚壁筒问题的粘弹性解	(346)
§ 11-5	柱体单向拉伸	(350)
§ 11-6	万有引力引起的地壳应力的进一步讨论	(351)

第五篇 断裂力学基础

第十二章	线弹性断裂力学	(356)
§ 12-1	历史概况及格里菲斯理论	(356)
§ 12-2	裂纹端部的应力场与位移场	(360)
§ 12-3	应力强度因子与断裂韧度	(373)
§ 12-4	能量释放率及其与应力强度因子间的关系	(380)
第十三章	复合型裂纹的脆性断裂理论	(388)
§ 13-1	最大周向应力理论	(388)
§ 13-2	应变能密度因子理论	(391)
§ 13-3	最大能量释放率理论	(398)
第十四章	弹塑性断裂力学及流变介质中裂纹的扩展	(402)
§ 14-1	裂纹端部塑性区大小的估算及欧文修正	(402)
§ 14-2	达格德尔(D-M)模型	(405)
§ 14-3	巴伦布拉特内聚力模型	(406)
§ 14-4	裂纹扩展阻力 R	(409)
§ 14-5	裂纹端部张开位移 δ (CTOD)	(411)
§ 14-6	J 积分	(413)
§ 14-7	关于断裂力学在地震学中的应用问题的探讨	(417)
§ 14-8	滑动弱化模型	(418)
§ 14-9	流变介质中裂纹的扩展与地震孕育过程的流变断裂模式	(422)
习 题	(427)
参考文献	(435)

第一篇 固体力学基础

固体力学属于连续介质力学范畴，它是从宏观观点研究固体受力后的变形、运动及强度等问题的一门科学。

固体力学的基本假设是连续性假设，即假设固体是连续介质。在固体力学发展的早期阶段，在建立这一假设时，并不认为这是一个假说，当时认为连续性是固体的当然本质。但是随着近代科学的发展，人们对微观世界的认识日益深化。现在大家都知道固体是一种晶体（非晶体的“固体”实质上是固溶体）。实际上，大多数固体材料是多晶体，它由许多晶粒组成。晶粒由分子或原子组成，原子又由原子核及外层电子组成……这样，连续性假设似乎与物质的原子理论相矛盾，但是这个矛盾可以用统计平均的概念把它们统一起来。

在固体力学中，我们所研究的体积微元（有时简称为“点”）的尺度自然应该远比所研究固体的尺度小，但也绝不是数学上的无限小（即几何学中的“点”），而应该远大于固体的微观尺度。今后我们所谓的某点的某一物理量（如应力、变形、密度等）都是指这样的体积微元中的统计平均值。

本篇共分两章，分别研究固体力学中的两个基本物理量——应力与应变，固体力学中的两组基本方程——运动方程（在静力学问题中则简化为平衡方程）与变形协调方程。这两个基本物理量及两组基本方程对于任何固体力学分支都是适用的。它们在整个固体力学范围内起着十分重要的作用，是固体力学的基础。

第一章 应力分析

本章中我们将研究固体受力后体内一点的应力状态，由此引出应力张量的概念，并且介绍固体力学中的基本方程组之一，即运动方程（在平衡条件下，则简化为平衡方程）。

§1-1 外力与内力，体力与面力

作用在固体上的力可以分为外力与内力。外力是指所取的研究对象（通常称之为隔离体）以外的物体作用于隔离体上的力，而内力则是隔离体内部各部分之间相互作用的力。外力与内力在一定的条件下是可以互相转化的。例如，为了研究物体中的内力，常常用假想的截面将物体截开，从而把物体分成几部分（例如在图 1-1a 中，截面 S 将物体截成 A 、 B 两部分），弃去一部分（例如 B ），而考虑留下的部分（ A ）。 B 部分作用于 A 部分上的力 F_{BA} ，对于整个物体来讲属于内力。但是对于 A 部分来讲，则可看作是外力。

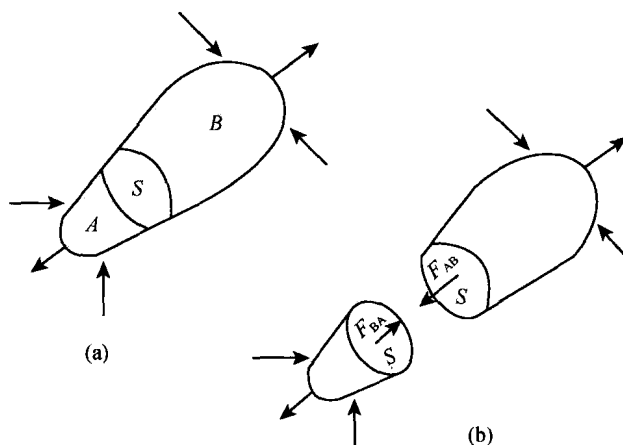


图 1-1 外力与内力

需要强调说明的是，刚体力学中关于力系简化的有些结论（我国通常在理论力学课程及相应的书籍中讨论这些内容），在固体力学中常常不能普遍应用。例如，在刚体力学中，关于力可以沿其作用线滑动，力系可以用其合力代替等结论就不能在固体力学中随便使用。

此外，按力的作用方式，力又可分为体（积）力与面（积）力两种，连续作用在物体每一个体积微元上的力称为体（积）力，如重力、惯性力等都是体力。在本书中以后用

$$\mathbf{f} = f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 + f_3 \mathbf{e}_3 \quad (1-1)$$

表示体力（其量纲为 [力 × 长度⁻³]）。式 (1-1) 中， \mathbf{e}_1 、 \mathbf{e}_2 、 \mathbf{e}_3 分别表示直角坐标轴 x_1 、 x_2 、 x_3 方向的单位矢量； f_1 、 f_2 、 f_3 分别表示体力在三个坐标上的投影。

作用在物体表面上的力称为面力，如水压力、接触力等，其量纲为 [力 × 长度⁻²]。

§ 1-2 应力矢量

用假想截面将物体截开后，截面上各点的力一般是不同的。在截面上一点 P 的周围取一微面元 ΔS ，设 ΔS 的外法线为 n ， P 恒在 ΔS 内， ΔS 上的力为 ΔT ，如极限 $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta S} = T^{(n)}$ 存在，则 $T^{(n)}$ 称为 P 点在该截面上的应力矢量。

一般情况下， $T^{(n)}$ 与截面的法线 n 不相重合，通常将 $T^{(n)}$ 分解为沿 n 方向与垂直于 n 方向（即在 ΔS 面内）两个分量。前者称为正应力，后者称为剪应力。

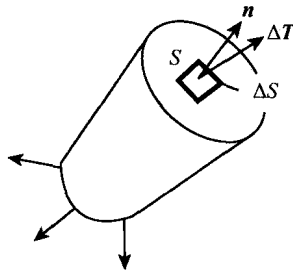


图 1-2 应力矢量

应力的单位与压强的单位相同。在厘米-克-秒制中，应力的单位为达因/厘米²。但这个单位太小，使用起来不方便，实际上采用巴 (bar)，1 巴 = 10⁶ 达因/厘米²。今后，全世界都趋向国际单位制 (SI)，在国际单位制中，应力的单位是帕斯卡 (Pascal)，简称帕 (Pa)。1 帕 = 1 牛顿/米²。但帕的单位很小，所以有时用兆帕 (MPa)。各种应力单位的换算关系见表 1-1。在换算中取重力加速度 $g = 980.7$ 厘米/秒²。

表 1-1 各种应力单位换算表

	帕 (Pa)	工程大气压 (kg/cm ²)	标准大气压 (atm)	磅/英寸 ² (psi)
1 帕	1	1.0197×10^{-5}	0.9869×10^{-5}	1.4504×10^{-4}
1 工程大气压	0.98067×10^5	1	0.9678	14.218
1 标准大气压	1.0133×10^5	1.0332	1	14.696
1 磅/英寸 ²	6.895×10^3	0.07031	0.06805	1

§ 1-3 一点的应力状态，应力张量

如上节所述，过 P 点作一截面 S （通常以此面的法线方向 n 表示此面的方向），得应力

矢量 $T^{(n)}$ 。过同一点 P ，作不同的截面，则得到不同的应力矢量 $T^{(n)}$ 。所谓一点的应力状态，就是指过此点所作各个截面上应力情况的总和。

我们先来研究与三个坐标面平行的截面（即以 x_1 、 x_2 、 x_3 三个坐标轴为法线的三个截面）上的应力矢量 $T^{(1)}$ 、 $T^{(2)}$ 、 $T^{(3)}$ *。每一个应力矢量又分解为沿三个坐标轴方向的应力分量，如图 1-3 所示。

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= \sigma_{11}e_1 + \sigma_{12}e_2 + \sigma_{13}e_3 \\ T^{(2)} &= \sigma_{21}e_1 + \sigma_{22}e_2 + \sigma_{23}e_3 \\ T^{(3)} &= \sigma_{31}e_1 + \sigma_{32}e_2 + \sigma_{33}e_3 \end{aligned} \quad (1-2)$$

于是可得到 9 个应力分量如下：

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (1-3)$$

这些应力分量的标号规则如下：下标的第一个字母表示截面的法线方向；下标的第二个字母表示与该应力分量平行的坐标轴方向。例如，应力分量 σ_{12} 表示以 x_1 轴为法线的截面上，平行于 x_2 轴的应力分量。

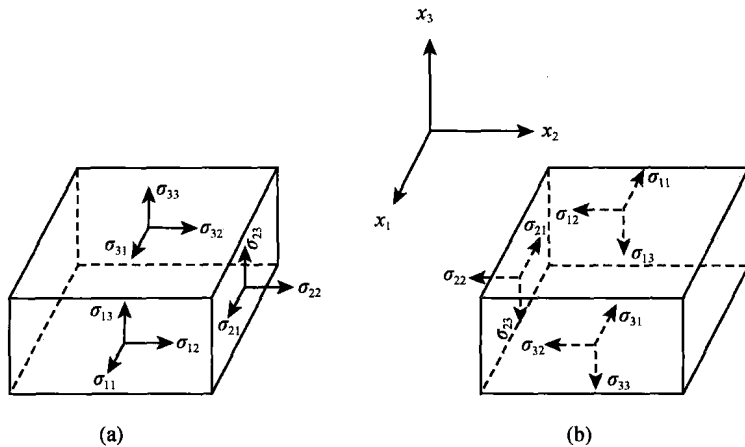


图 1-3 应力分量

- (a) 以坐标轴正方向为外法线方向的三个截面上的应力分量；
- (b) 以坐标轴负方向为外法线方向的三个截面上的应力分量

很容易看出：凡是两个附标字母相同的应力分量均为正应力，而两个附标字母不同的应力分量则为剪应力。

注： $T^{(1)}$ 、 $T^{(2)}$ 、 $T^{(3)}$ 分别表示以 x_1 、 x_2 、 x_3 轴为外法线的三个截面上的应力矢量，而不是应力矢量 T 在 x_1 、 x_2 、 x_3 方向的投影。