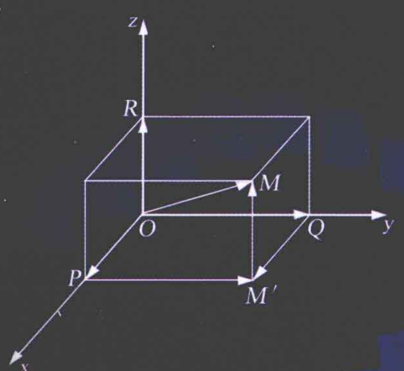
南京邮电大学·大学数学系列教材

线性代数与解析几何

Xianxing Daishu yu Jiexi Jihe

赵礼峰 李 雷 张爱华 王晓平 万彩云 编



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

科学出版社

南京邮电大学·大学数学系列教材

线性代数与解析几何

赵礼峰　李　雷　张爱华　王晓平　万彩云　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书系统介绍了线性代数与解析几何的基本理论和方法，主要内容包括行列式、矩阵、空间解析几何与向量运算、*n* 维向量、线性方程组、矩阵相似对角化、二次型、MATLAB 简述与应用。本书注重代数与几何的有机结合，强调矩阵初等变换的作用，将数学建模思想融入教材，注重应用背景及实例的介绍，并精选了大量的例题和习题，便于学生自学。

本书可作为高等学校理工、经管类本科生教材，也可以作为教师的教学参考书及考研学生的复习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与解析几何/赵礼峰等编. —北京：科学出版社，2012.5
(南京邮电大学・大学数学系列教材)
ISBN 978-7-03-034098-6

I. ①线… II. ①赵… III. ①线性代数-高等学校-教材 ②解析几何-高等学校-教材 IV. ①O151.2 ②O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 075292 号

责任编辑：顾 艳 胡 凯／责任校对：刘亚琦
责任印制：赵德静／封面设计：许 瑞

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
铭浩彩色印装有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 5 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2012 年 5 月第一次印刷 印张：18 1/4
字数：351 000

定价：35.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书根据国家教育部高等学校工科数学教学指导委员会拟定的线性代数课程教学基本要求和南京邮电大学对该课程的教学要求精心编写而成。本书共分 8 章，系统地介绍了线性代数与解析几何的基本理论与方法，内容包括行列式、矩阵、空间解析几何与向量运算、n 维向量、线性方程组、矩阵相似对角化、二次型、MATLAB 简述与应用。本书可作为高等学校理工科 (非数学类专业) 本科生线性代数课程的教材，也可作为经济、管理等相关专业本科生的线性代数课程教材 (第 3 章不作要求)。

本书有以下特点：①由浅入深、层次清晰、说理透彻、叙述详尽；②一些抽象概念从具体模型入手，便于学生接受，淡化抽象的概念与定理，用具体实例说明，便于学生自学；③把数学实验与数学建模思想引入教材，模型的建立与求解既突出了线性代数与解析几何的理论与方法，又提高了学生应用软件的能力，实现了理论和应用的有机结合，有助于提高学生分析问题和建立数学模型的能力；④每一章都给出本章小结，内容包括基本要求、内容提要，为学生自学和考研复习提供思路；⑤除每节附有练习题外，每一章后配有一定数量的总习题，便于学生复习巩固，书末附有参考答案，以便学生检查学习效果。

本书由赵礼峰、李雷、张爱华、王晓平、万彩云共同编写，由赵礼峰统稿。南京邮电大学理学院王友国、包刚、孔告化、丁秀梅等老师都对本书提出许多宝贵意见和建议，南京邮电大学教务处对本书的编写给予了极大的支持，在此一并致谢。

由于编者水平有限，书稿虽经多次认真修改与校对，但仍难免存在一些错误与不足，我们衷心地希望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书能够不断完善。

编　者

2011 年 10 月于南京邮电大学

目　录

第1章　行　列　式

在生产实践与科学研究中，一些变量之间的关系可以直接或近似地表示为线性函数，因此研究线性函数就具有相当重要的意义。线性代数主要研究线性函数，其中线性方程组是最基本的内容，而行列式又是线性方程组的重要工具，它在数学及其他学科分支领域 (如通信、自动化、力学等) 都有着广泛的应用，在工程实践中也有着重要作用。由求解二元和三元线性方程组，引入了二阶和三阶行列式; 在此基础上引入 n 阶行列式的定义，并给出相关性质和计算方法。此外，在后面章节中还要介绍行列式的应用。

1.1　行列式的定义

在讨论 n 阶行列式之前，我们先介绍二阶、三阶行列式以及利用它们求解二元、三元线性方程组的方法。

1.1.1　二阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，用消元法解得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

为了便于记忆，我们引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1}$$

并称它为二阶行列式，也是线性方程组的系数行列式。它含有两行两列，横写的称为行，竖写的称为列。行列式中的数称为行列式的元素，a_{ij} 就是第 i 行第 j 列元素，a_{ij} 的第 1 个下标 i 称为行下标，表示该元素所在的行，第 2 个下标 j 称为列下标，表示该元素所在的列。

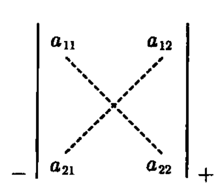


图 1.1

对于上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆，如图 1.1 所示。

从上述定义可知，二阶行列式就是两项的代数和：一项是从左上角到右下角(又称为行列式的主对角线) 两个元素的乘积，取正号；另一项是从右上角到左下角(又称为行列式的次对角线) 两个元素的乘积，取负号。

若记
$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则
$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

像这样用行列式表示的解，形式简单、容易记忆。

例 1.1　求解二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$。

解　由于
$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 - (-2) = 14, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 24 = -21$$

因此
$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3$$

1.1.2　三阶行列式

设三元线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

用消元法解得
$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$
$$x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{31}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$
$$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

其中，分母不为零。此表达式比二元线性方程组的解表达式要复杂得多，为了能够将解简单表达，我们引入三阶行列式的定义。

令
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.2}$$

称之为三阶行列式。三阶行列式的定义可以用对角线法则来记忆，图 1.2 中三条实线看做是平行于主对角线的连线。三条虚线看做是平行于负对角线的连线。实线上三元素乘积带正号，虚线上三元素乘积带负号。

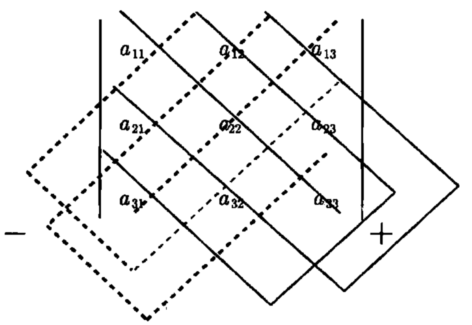


图 1.2

若记
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则
$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

观察三阶行列式 (1.2) 发现，它有以下特点：共有 3!=6 项；每一项均是位于不同行、不同列的 3 个元素的乘积；各项行下标全为 123，而列下标分别为 123，231，312，132，213，321，前三项均为正号，后三项均为负号，这表明每一项前的符号与列下标的排序有关。为了给出 n 阶行列式的定义，下面给出全排列及其逆序数的概念及性质。

1.1.3　全排列及其逆序数

定义 1.1　由 n 个不同数 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 n 阶排列。排列 $1,2,\cdots,(n-1),n$ 称为标准排列或自然排列。

例如 1324，3241，4123 等都是 4 阶排列，15324 是一个 5 阶排列。对于两个 n 阶排列，如果它们的排列次序一样，就称这两个 n 阶排列相等，否则就称它们不相等。易知，n 阶排列共有 $n!$ 个。

定义 1.2　在一个排列中，如果一个较大的数排在了较小的数前面，就称这两个数构成一个**逆序**。一个排列逆序的总数称为该排列的**逆序数**。

我们用 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 表示排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数，例如 $\tau(31542)=5$。计算排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数方法如下：

设排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中 k 前面比 k 大的数码共有 t_k 个，则

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{k=1}^{n}t_k$$

例 1.2　求 5 阶排列 31542 的逆序数。

解　$t_1=1,t_2=3,t_3=0,t_4=1,t_5=0$, 故 $\tau(53412)=\sum\limits_{k=1}^{5}t_k=5$。

例 1.3　求 $\tau(n(n-1)\cdots21)$。

解　$t_1=n-1,t_2=n-2,\cdots,t_{n-1}=1,t_n=0$，所以 $\tau(n(n-1)\cdots21)=\dfrac{n(n-1)}{2}$。

定义 1.3　设 $i_1i_2\cdots i_n$ 是 n 阶排列，如果 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 是奇数，则称 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇排列；如果 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 是偶数，则称 $i_1i_2\cdots i_n$ 是偶排列。

例如 5 阶排列 31542 就是奇排列，而对于排列 $n(n-1)\cdots21$，当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时是偶排列，当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时是奇排列。

为了确定 n 阶排列的中奇、偶排列的个数，我们引入对换的概念，并给出它的性质。

定义 1.4　把一个排列中某两个数字的位置互相调换，其余数字不变，这样一个调换称为一个对换。

定理 1.1　对换改变排列的奇偶性。

证　先讨论相邻对换的情形。设排列 $\overbrace{\cdots}^{A}ij\overbrace{\cdots}^{B}$，经过 i,j 对换变成 $\overbrace{\cdots}^{A}ji\overbrace{\cdots}^{B}$，显然这样的对换不影响 i,j 与其他数的次序关系，改变的仅是 i,j 的次序。若在前一式中 i,j 构成逆序，则后一式的逆序数比前一式的逆序数少 1；若在前一式中 i,j 不构成逆序，则后一式的逆序数比前一式的逆序数多 1，所以在此情况下，排列的奇偶性改变。

再讨论一般情形。设排列为 $\overbrace{\cdots}^{C} i j_1 j_2 \cdots j_s j \overbrace{\cdots}^{D}$，经过 i,j 对换得到排列 $\overbrace{\cdots}^{C} j j_1 j_2 \cdots j_s i \overbrace{\cdots}^{D}$，则后一排列可由前一排列经过 $2s+1$ 次相邻对换来实现，即 j 依次与 $j_s, j_{s-1}, \cdots, j_1, i$ 对换，共 $s+1$ 次，然后 i 再依次与 $j_1, j_2, \cdots, j_s$ 对换，共 s 次。由于 $2s+1$ 是奇数，故由相邻对换改变排列的奇偶性得到，前后两排列的奇偶性相反。

由此可得到以下结论：

推论 1.1　当 $n>1$ 时，在全体 n 阶排列中，奇排列的个数与偶排列的个数相等，各为 $\dfrac{n!}{2}$。

证　设奇排列共 s 个，偶排列共 t 个，把每一个奇排列都进行一次对换，则变成 s 个偶排列，从而 $s \leqslant t$，同理 $t \leqslant s$，故 $s=t=\dfrac{n!}{2}$。

推论 1.2　任一个 n 阶排列都可以经过一系列对换变成自然排列，并且所作的对换的次数与这个排列有相同的奇偶性。

证　首先将 1 与第一个数字对换，接下来将 2 与第二个数字对换，一直下去，就可以将一个排列对换成自然排列。由定理 1.1 知：对换改变排列的奇偶性，如果一个排列是奇排列，它对换成自然排列必经过奇数次对换，而偶排列对换成自然排列必经过偶数次对换，因此结论成立。

1.1.4　n 阶行列式

通过对二阶、三阶行列式进行分析，找出它们的共同规律，然后根据这些规律来定义 n 阶行列式。

我们可以看出式 (1.1) 可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}$$

其中，$j_1 j_2$ 是任意一个二阶排列。

式 (1.2) 可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

其中，$j_1 j_2 j_3$ 是任意一个三阶排列。

现在我们根据上述规律来定义 n 阶行列式。

定义 1.5　将 n^2 个数 $a_{ij}, i,j=1,2,\cdots,n$ 排成 n 行 n 列，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

称之为 **n 阶行列式**，它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.4}$$

的代数和，其中，$j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列。当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，式 (1.4) 前面带正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，式 (1.4) 前面带负号。因此行列式 (1.3) 可以表示成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.5}$$

其中，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和。

注　(1) 有时用 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$ 或 $D=\det(a_{ij})_{n\times n}$ 表示 n 阶行列式 (1.3)，数 a_{ij} 称为行列式 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$ 的第 i 行第 j 列元素。

(2) 当 $n=1$ 时，$D=|a_{11}|=a_{11}$，不要与绝对值记号混淆。

(3) 当 $n=2$ 或 $n=3$ 时，这样定义的二阶、三阶行列式与对角线法则定义的是一致的。

例 1.4　形如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行列式，称为 n 阶下三角形行列式。证明：下三角形行列式 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

证　D 的项的一般形式为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，由于在这个行列式的第一行中，除 a_{11} 外，其他元素都等于 0，所以 $j_1\neq 1$ 时，$a_{1j_1}=0$，因而只要考虑含 a_{11} 的项；第二行除去 a_{21} 及 a_{22} 外，其余元素都等于 0，因此，只要考虑 $j_2=1,2$ 的项，但因 $j_1=1$ 故 $j_2\neq 1$，所以 $j_2=2$，这样逐步递推，知道 D 的展开式