GAODENGDAISHUQUANCHENGXUEXIZHIDAOYUXITIJINGJIE

智文天下 ZHIWENTIANXIA

高等代数

全程学习指导与习题精解

刘希强 滕兴虎 吴欧 寇冰煜 张燕 颜超 编著

（高教第二版） 上册

>> 基础知识归纳 >> 重点难点提示

>> 疑难问题解答 >> 课后习题精解

东南大学出版社
Southeast University Press

高 等 代 数

全程学习指导与习题精解（上）

（高教第二版）

刘希强　滕兴虎　吴　欧
寇冰煜　张　燕　颜　超　编著

东南大学出版社
·南京·

图书在版编目(CIP)数据

高等代数全程学习指导与习题精解(上)/刘希强等编著. —南京:东南大学出版社,2012.2
ISBN 978-7-5641-3014-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①高等代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 192563 号

高等代数全程学习指导与习题精解(上)(高教第二版)

编　　著	刘希强等	**责任编辑**	刘　坚　戴季东
电　　话	(025)83793329/83362442(传真)	**电子邮件**	liu-jian@seu.edu.cn
特约编辑	卢　月		
出版发行	东南大学出版社	**出 版 人**	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号	**邮　　编**	210096
销售电话	(025)83793191/83792174/83792214/83794121/83794174/57711295(传真)		
网　　址	www.seupress.com	**电子邮件**	press@seupress.com
经　　销	全国各地新华书店	**印　　刷**	南京新洲印刷有限公司
开　　本	718mm×1005mm　1/16	**印　　张**	11.5　**字　数**　300 千
版　　次	2012 年 2 月第 1 版第 1 次印刷		
书　　号	ISBN 978-7-5641-3014-5		
定　　价	20.00 元		

前　言

高等代数是数学学科中一门重要基础课，也是数学专业硕士研究生入学考试必考科目。高等代数具有理论上的抽象性、逻辑推理的严密性和广泛的应用性。大多数学生在学习过程中感到高等代数抽象难懂，对基本概念以及定理结论在理解上感到困难，具体解题时，缺乏思路、难以下手。为了帮助读者掌握高等代数的基本理论和基本方法，掌握综合运用各种解题的技巧和方法、提高分析问题和解决问题的能力，我们根据丘维声教授编写的《高等代数》（上、下册）编写了本辅导教材（上、下册）。

本辅导教材由以下几部分组成：

1. 基本要求、重点与难点：给出了各章的基本要求及重点和难点内容。

2. 主要概念与公式：列出各章的基本概念、定理与公式，突出必须掌握和理解的核心内容。

3. 重、难点解答：列出各章的重点、难点内容，并对重点、难点内容给出相应的解释说明，以帮助读者对相应的内容理解得更加透彻。

4. 课后习题全解：教材中课后习题数量大、层次多，许多基础性问题从多个角度帮助读者理解基本概念和基本理论，许多层次较高的问题有助于读者进一步的提高和应用，不少问题具有独特的解题思路和方法。针对以上两点，我们对教材课后全部习题给出了详细的解答。由于高等代数解题方法千变万化，大多数习题我们只给出了一种参考解答，其他方法留给读者自己去思考。

本书由刘希强、滕兴虎、吴欧、寇冰煜、张燕、颜超等同志编写，陆小庆、张纯、张晓蓉、杨传兵、胡俊等同志也参加了本书的编写工作，全书由滕加俊、滕兴虎统稿。在本书的策划、编写、审稿等方面得到了东南大学出版社的大力支持和热情帮助，在此表示感谢。由于作者的水平有限，加之时间仓促，书中不足之处敬请广大同行和读者批评指正。

编　者

目　录

第一章　线性方程组的解法

基本要求、重点与难点

基本要求

1. 了解高斯(Gauss)消去法的理论根据，掌握解线性方程组的消元法.

2. 会用矩阵行初等变换求线性方程组的一般解.

3. 理解数域的基本概念.

重点

高斯(Gauss)消去法求线性方程组的一般解.

难点

解线性方程组的消元法.

主要概念与公式

1. 矩阵

(1) 由 sn 个数排成 s 行 n 列的表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $s\times n$ 矩阵. 记为 $A_{s\times n}$. 其中 A 的 (i,j) 元记为 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,n)$，有时记 $A=(a_{ij})$.

(2) 数域 $\boldsymbol{K}$ 上一切 $s\times n$ 矩阵组成的集合，记为 $M_{s\times n}(\boldsymbol{K})$. 当 $s=n$ 时，$M_n(\boldsymbol{K})$ 称为 n 级方阵组成的集合.

(3) 对角线元素都是 1，其余元素都是 0 的方阵称为单位阵，记为 I_n. 有时简记为 I.

(4) $M_{n\times 1}(\boldsymbol{K})$ 或 $M_{1\times n}(\boldsymbol{K})$ 中元素都称为 n 维向量.

(5) 元素全为 0 的 $s\times n$ 矩阵，称为零矩阵，记为 $O_{s\times n}$，有时简记为 O.

(6) 阶梯形矩阵. 它们的任一行从第一个元素起至该行的第一个非零元素所在下方及左下方全为零；如果某一行全为零，则它的下面各行全为零，这样的 $s\times n$ 矩阵称为阶梯形矩阵.

(7) A 的转置矩阵记为 A'(或 A^{T}). 若 A 是 $s\times n$ 矩阵，则 A' 为 $n\times s$ 矩阵.

2. 高斯(Gauss)消元法

(1) 设线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases} \qquad ①$$

则矩阵 $$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix};\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{bmatrix}$$

分别为方程组的系数矩阵和增广矩阵，当 $b_i=0(i=1,2,\cdots,s)$ 时，即齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\end{cases} \quad ②$$

称为方程组①的导出组(或称为①对应的齐次方程组).

(2) 矩阵行(列)初等变换是指下列三型之一：

1°型：把一行(列)的倍数加到另一行(列)上；

2°型：互换两行(列)的位置；

3°型：用一非零的数乘一行(列).

(3) 结论：

(i) 一个线性方程组经过若干次初等变换所得到的新的线性方程组与原方程组同解.

(ii) 对一个方程组进行初等变换，实际上就是对它的增广矩阵进行矩阵的行初等变换.

(iii) 对增广矩阵$\overline{A}$作行初等变换，可转化为阶梯矩阵

$$\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1r}&\cdots&c_{1n}&d_1\\0&c_{22}&\cdots&c_{2r}&\cdots&c_{2n}&d_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&c_{rr}&\cdots&c_{rn}&d_r\\0&0&\cdots&\cdots&\cdots&0&d_{r+1}\\\vdots&\vdots&&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&\cdots&0&0\end{bmatrix} \quad ③$$

则方程组①与由阶梯形矩阵③为增广矩阵的方程组为同解方程组.

3. 线性方程组的解的情况

(1) 由阶梯形矩阵③知方程组①有解的条件是：

(i) 若 $d_{r+1}\neq 0$，则方程组无解，因为此时第 $r+1$ 个方程 $0=d_{r+1}\neq 0$ 产生矛盾；

(ii) 若 $d_{r+1}=0$，且 $r=n$，则方程组有唯一解，此时独立的方程个数与未知量个数相等；

(iii) 若 $d_{r+1}=0$ 且 $r<n$，则方程组有无穷多个解，此时独立的方程个数小于未知量个数. 任给 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 的一组值，就唯一地定出 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 的值. 一般地，可以把 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 通过 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 表示出来，这样一组表达式称为方程组①的一般解，而 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 称为一组自由未知量.

(2) 方程组①的导出组②必有解，当 $r=n$ 时，只有零解；当 $r<n$ 时，有非零解，且有无穷多个解.

(3) 解线性方程组 $AX=B$ 的步骤：

① 分离出增广矩阵$\widetilde{A}=(A,B)$；

② 将$\widetilde{A}=(A,B)$通过行初等变换化为阶梯形矩阵；

③ 原方程组与阶梯形矩阵表示的线性方程组同解；

④ 判断有无解，并在有解的情况下，得出一般解.

4. 数域

(1) 定义 复数集的子集 $\boldsymbol{K}$ 称为一个数域，如果它满足：

(i) $0,1\in\boldsymbol{K}$；

(ii) $\forall a,b\in\boldsymbol{K}$，都有 $a\pm b,ab\in\boldsymbol{K}$，并且当 $b\neq 0$ 时，有$\frac{a}{b}\in\boldsymbol{K}$.

性质(ii)称为 $\boldsymbol{K}$ 对于加、减、乘、除四种运算封闭.

(2) 设 $\boldsymbol{K}$ 是至少包含两个数的数集，如果 $\boldsymbol{K}$ 中任两数的和、差、积、商(除数不等于零)均仍属于 $\boldsymbol{K}$，则称 $\boldsymbol{K}$ 是一个数域.

(3) 任何数域都包含有理数域.

重、难点解答

1. 对于具体地解线性方程组，消元法是最有效且最基本的方法，用消元法解线性方程组的具体步骤分三步：

① 对方程组的增广矩阵作行初等变换，化为阶梯形.

② 由阶梯形矩阵判断方程组解的情况.

③ 在有解的情形下，由阶梯形矩阵写出同解方程组，求出方程组的解.

2. 初等变换分两大类：行初等变换和列初等变换，每一类分三型，不同问题可允许使用的初等变换是有所不同的，如解线性方程组只能进行行初等变换等. 另外注意初等变换是变换，不是运算，所以联系符号不能用等号，只能用箭头或"～".

3. 数域 $\boldsymbol{K}$ 是我们讨论问题的前提，取定数域 $\boldsymbol{K}$ 后，解线性方程组时其全部系数和常数项都属于 $\boldsymbol{K}$，讨论矩阵时其全部元素都属于 $\boldsymbol{K}$，进行行初等变换时，"倍数""非零数"都属于 $\boldsymbol{K}$ 等. 常用的数域有：有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$、复数集 $\mathbf{C}$. 它们都是数域. 但整数集 $\mathbf{Z}$ 不是数域. 除了 $\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$ 外，还有许多数域.

课后习题全解

习题 1.1

1. 解下列线性方程组

(1) $\begin{cases} x_1-3x_2-2x_3=3 \\ -2x_1+x_2-4x_3=-9 \\ -x_1+4x_2-x_3=-7 \end{cases}$

解：
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -4 & -9 \\ -1 & 4 & -1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+①]{②+2①} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(②,③)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③+5②} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -23 & -23 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left(-\frac{1}{23}\right)③} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[①+2③]{②+3③} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{①+3②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

∴ 方程组的解为：$\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1. \\ x_3=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=1 \\ 2x_1+5x_2+5x_3=7 \\ 3x_1+7x_2+x_3=-8 \\ -x_1-4x_2+x_3=10 \end{cases}$

解：$\begin{bmatrix}1&3&2&1\\2&5&5&7\\3&7&1&-8\\-1&-4&1&10\end{bmatrix}\xrightarrow[④+①]{②-2①\ ③-3①}\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&-1&1&5\\0&-2&-5&-11\\0&-1&3&11\end{bmatrix}\xrightarrow{(-1)②}\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&-1&-5\\0&-2&-5&-11\\0&-1&3&11\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[④+②]{③+2②}\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&-1&-5\\0&0&-7&-21\\0&0&2&6\end{bmatrix}\xrightarrow{\left(-\frac{1}{7}\right)③}\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&-1&-5\\0&0&1&3\\0&0&2&6\end{bmatrix}\xrightarrow{④-2③}\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&-1&-5\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

同解方程组为$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=1\\x_2-x_3=-5\\x_3=3\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x_1=1\\x_2=-2.\\x_3=3\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x_1-3x_2-2x_3-x_4=6\\3x_1-8x_2+x_3+5x_4=0\\-2x_1+x_2-4x_3+x_4=-12\\-x_1+4x_2-x_3-3x_4=2\end{cases}$

解：$\begin{bmatrix}1&-3&-2&-1&6\\3&-8&1&5&0\\-2&1&-4&1&-12\\-1&4&-1&-3&2\end{bmatrix}\xrightarrow[③+2①\ ④+①]{②+(-3)①}\begin{bmatrix}1&-3&-2&-1&6\\0&1&7&8&-18\\0&-5&-8&-1&0\\0&1&-3&-4&8\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[④+(-1)②]{③+5②}\begin{bmatrix}1&-3&-2&-1&6\\0&1&7&8&-18\\0&0&27&39&-90\\0&0&-10&-12&26\end{bmatrix}\xrightarrow[\left(-\frac{1}{2}\right)④]{\frac{1}{3}③}\begin{bmatrix}1&-3&-2&-1&6\\0&1&7&8&-18\\0&0&9&13&-30\\0&0&5&6&-13\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[④-\frac{5}{9}③]{}\begin{bmatrix}1&-3&-2&-1&6\\0&1&7&8&-18\\0&0&9&13&-30\\0&0&0&-\frac{11}{9}&\frac{11}{3}\end{bmatrix}$

同解方程组为$\begin{cases}x_1-3x_2-2x_3-x_4=6\\x_2+7x_3+8x_4=-18\\9x_3+13x_4=-30\\-\frac{11}{9}x_4=\frac{11}{3}\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x_1=2\\x_2=-1\\x_3=1\\x_4=-3\end{cases}$.

(4) $\begin{cases} x_1+3x_2-7x_3=-8 \\ 2x_1+5x_2+4x_3=4 \\ -3x_1-7x_2-2x_3=-3 \\ x_1+4x_2-12x_3=-15 \end{cases}$

解: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ -3 & -7 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & -12 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{④}+(-1)\text{①}]{\text{②}+(-2)\text{①} \atop \text{③}+3\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 0 & -1 & 18 & 20 \\ 0 & 2 & -23 & -27 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{(\text{②},\text{④})} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 2 & -23 & -27 \\ 0 & -1 & 18 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{④}+\text{②}]{\text{③}-2\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \\ 0 & 0 & 13 & 13 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\text{④}+\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left(-\frac{1}{13}\right)\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1+3x_2-7x_3=-8 \\ x_2-5x_3=-7 \\ x_3=1 \end{cases}$

解得: $\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-2. \\ x_3=1 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ x_1+x_2-x_3+x_4=-11 \\ x_1+3x_2+x_4=1 \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3 \end{cases}$

解: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -11 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}-\text{①}]{\text{②}-\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & -15 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\text{④}+2\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 5 & -15 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & -5 & 11 & -33 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{②}+3\text{④} \atop \text{③}+5\text{④}]{(\text{②},\text{④})} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 11 & -33 \\ 0 & 0 & -28 & 60 & -168 \\ 0 & 0 & -19 & 38 & -114 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[-\frac{1}{4}\text{③} \atop \frac{1}{19}\text{④}]{(\text{③},\text{④})} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 11 & -33 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & -15 & 42 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{④}+7\text{③}]{-\text{③}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -11 & 33 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

同解方程组为$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 33 \\ x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

解得：$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 6 \\ x_4 = 0 \end{cases}$.

2. 一个投资者想把 1 万元钱投入给 3 个企业 A_1，A_2，A_3，所得的利润率分别是 12%，15%，22%．他想得到 2 000 元的利润．

(1) 如果投入给 A_2 的钱是投给 A_1 的 2 倍，那么应当分别给 A_1，A_2，A_3 投资多少?

(2) 可不可以投给 A_3 的钱等于投给 A_1 和 A_2 的钱的和?

解：设这个投资者投入给三个企业 A_1，A_2，A_3 的钱分别为 x_1，x_2，x_3(万元)，根据题意，可得：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0.12x_1 + 0.15x_2 + 0.22x_3 = 0.2 \end{cases} \qquad ①$$

(1) 如果投入给 A_2 的钱是投给 A_1 的 2 倍，则在①的基础上增加 1 个方程：

$$x_2 = 2x_1$$

得：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0.12x_1 + 0.15x_2 + 0.22x_3 = 0.2 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases} \qquad ②$$

下面求解方程组②

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.12 & 0.15 & 0.22 & 0.2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.03 & 0.1 & 0.08 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_2 + 10x_3 = 8 \\ 8x_3 = 6 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{12} \\ x_2 = \dfrac{1}{6} \\ x_3 = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

所以，投资者应当分别给 A_1，A_2，A_3 投资$\dfrac{1}{12}$，$\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{3}{4}$万元.

(2) 如果投给 A_3 的钱等于投给 A_1 与 A_2 的钱的和，则在①的基础上增加 1 个方程：

$$x_3 = x_1 + x_2$$

得方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0.12x_1 + 0.15x_2 + 0.22x_3 = 0.2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \tag{③}$$

求解方程组③

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.12 & 0.15 & 0.22 & 0.2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.03 & 0.1 & 0.08 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0.03x_2 + 0.1x_3 = 0.08 \\ 2x_3 = 1 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} x_1 = -0.5 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0.5 \end{cases}$$

所以，投给 A_1 的钱为 -0.5 万元，这与实际情况不符，因此，投给 A_3 的钱不能等于投给 A_1 与 A_2 的钱的和.

3. 解线性方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_1 = -2 \end{cases}$

解： $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & -7 & 11 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$

阶梯方程出现 $0 = 13$，因此此方程组无解.

(2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_1 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_1 = 11 \end{cases}$

解： $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & 11 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & -11 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & -11 \\ 0 & -7 & 7 & 7 & 28 \\ 0 & 7 & -7 & -7 & -28 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

由最后简化的阶梯矩阵可见，原方程组有无穷多个解，且一般解为：$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 - 3 \\ x_2 = x_3 + x_4 - 4 \end{cases}$ 其中 x_3，x_4 为自由变量.

(3) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ -x_2 + 12x_2 + 7x_3 = -5, \\ x_1 + 16x_2 + 13x_3 = -1; \end{cases}$

解：$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 7 \\ -1 & 12 & 7 & -5 \\ 1 & 16 & 13 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 21 & 15 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

阶梯方程中出现 $0 = -2$，因此该方程组无解.

(4) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7, \\ -x_1 + 12x_2 + 7x_3 = -5, \\ x_1 + 16x_2 + 13x_3 = 1. \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 7 \\ -1 & 12 & 7 & -5 \\ 1 & 16 & 13 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 21 & 15 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{7} & \frac{23}{7} \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以，原方程组有无穷多解，且一般解是：

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{11}{7}x_3 + \frac{23}{7} \\ x_2 = -\frac{5}{7}x_3 - \frac{1}{7} \end{cases}$$

其中，x_3 是自由未知量.

习题 1.2

1. a 为何值时，下述线性方程组有解？当有解时，求出它的所有解.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a. \end{cases}$$

解：$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & a+3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{bmatrix}$

当 $a+1=0$，即 $a=-1$ 时，方程组有解，此时，

$$\text{增广矩阵}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -4 & 2 & -1\\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{18}{7} & \frac{1}{7}\\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

方程组的一般解为

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{18}{7}x_3+\dfrac{1}{7}\\ x_2=-\dfrac{1}{7}x_3+\dfrac{2}{7}\end{cases},$$

其中，x_3 是自由未知量.

2. a 为何值时，下述线性方程组有唯一解？a 为何值时，此方程组无组？

$$\begin{cases}x_1+x_3+x_3=3,\\ x_1+2x_2-ax_3=9,\\ 2x_1-x_2+3x_3=6.\end{cases}$$

解： $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -a & 9\\ 2 & -1 & 3 & 6\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -a-1 & 6\\ 0 & -3 & 1 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -a-1 & 6\\ 0 & 0 & -3a-2 & 18\end{bmatrix}$

所以，当 $a=-\dfrac{2}{3}$ 时，原线性方程组无解，当 $a\neq-\dfrac{2}{3}$ 时，原线性方程组有唯一解.

3. (1) 下述线性方程组有解？有多少个解？

$$\begin{cases}x+y=1,\\ x-3y=-1,\\ 10x-4y=3;\end{cases}$$

(2) 改变第(1)小题的方程组的一个方程的某一个系数，使得新的方程组没有解；

(3) 在平面直角坐标系 xOy 里，画出第(1)小题各个方程表示的图形.

解：(1) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & -1\\ 10 & -4 & 3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\\ 0 & -14 & -7\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

所以原方程组有唯一解，解为 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

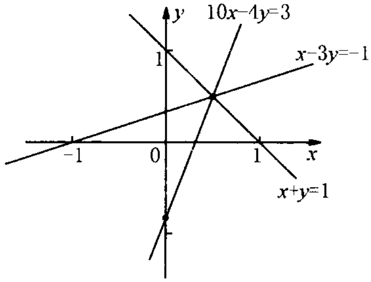
(2) 把第 3 个方程改为 $10x+10y=3$，则方程组变为

$$\begin{cases}x+y=1\\ x-3y=-1\\ 10x+10y=3\end{cases}$$

由于 $$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & -1\\ 10 & 10 & 3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\\ 0 & 0 & -7\end{bmatrix},$$

所以,方程组无解.

(3)



4. a 为何值时,下述线性方程组有解?当有解时,求它的所有解.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-7 \\ x_1+3x_3-x_4=8 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=2a+2 \\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=-11 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+x_4=2a \end{cases}$$

解: $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2a+2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & -11 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2a+9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2a+14 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2a+24 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $2a+4\neq 0$ 时,即 $a\neq -2$ 方程组无解.

当 $2a+4=0$ 时,即 $a=-2$ 方程组有解.

$$\text{增广矩阵} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

同解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ -x_2+2x_3=-5, \\ x_4=-10 \end{cases}$$

取自由变量为 $x_3=k$,则

$$\begin{cases} x_1=-3k-2 \\ x_2=2k+5 \\ x_3=k \\ x_4=-10 \end{cases} \quad (k\text{ 为任意常数}).$$

5. 当 c 与 d 取何值时，下述线性方程组有解，求它的所有解.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=c, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=d. \end{cases}$$

解: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & c \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & d \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & c-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & d-5 \end{bmatrix}$

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d-2 \end{bmatrix}$

由此可见，只有当 $c=0$ 且 $d=2$ 时，原方程组才有解.

当 $c=0, d=2$ 时，原方程组与方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \end{cases}$$

同解.

所以

$$\begin{cases} x_1=x_3+x_4+5x_5-2 \\ x_2=-2x_3-2x_4-6x_5+3 \end{cases}$$

其中，x_3, x_4, x_5 是自由未知量.

6. 是否存在二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 其图象经过下述 4 个点：

$$P(1,2), Q(-1,3), M(-4,5), N(0,2).$$

解: 若二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象经过 P,Q,M,N 四点，则必存在 a,b,c 满足如下线性方程组：

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ a-b+c=3 \\ 16a-4b+c=5 \\ c=2 \end{cases}$$

由于

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 16 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -20 & -15 & -27 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -15 & -37 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

阶梯方程中出现 $0=-7$，故方程组无解，因此不存在二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象经过 P，

Q,M,N 四点.

7. 下列齐次线性方程组有无非零解？若有非零解，求出它的一般解.

(1) $\begin{cases}3x_1-5x_2+x_3-2x_4=0,\\2x_1+3x_2-5x_3+x_4=0,\\-x_1+7x_2-4x_3+3x_4=0,\\4x_1+15x_2-7x_3+9x_4=0;\end{cases}$

解: $\begin{bmatrix}3&-5&1&-2\\2&3&-5&1\\-1&7&-4&3\\4&15&-7&9\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-7&4&-3\\2&3&-5&1\\3&-5&1&-2\\4&15&-7&9\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-7&4&-3\\0&17&-13&7\\0&16&-11&7\\0&43&-23&21\end{bmatrix}$

$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-7&4&-3\\0&1&-2&0\\0&16&-11&7\\0&43&-23&21\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-7&4&-3\\0&1&-2&0\\0&0&21&7\\0&0&03&21\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-7&4&-3\\0&1&-2&0\\0&0&3&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

由于阶梯形矩阵中非零行数目为 3，它小于未知量数目 4，因此原齐次线性方程组有非零解，且原齐次线性方程组的一般解为

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{3}x_4\\x_2=-\dfrac{2}{3}x_4\\x_3=-\dfrac{1}{3}x_4\end{cases}$$

其中，x_4 是自由未知量.

(2) $\begin{cases}5x_1-2x_2+4x_3-3x_4=0,\\-3x_1+5x_2-x_3+2x_4=0,\\x_1-3x_2+2x_3+x_4=0.\end{cases}$

解: 方程组的系数矩阵为

$$\begin{bmatrix}5&-2&4&-3\\-3&5&-1&2\\1&-3&2&1\end{bmatrix}$$

此矩阵为 3×4 矩阵，它经过行初等变换后得阶梯形矩阵非零行的个数不大于 3，而方程中未知量的个数为 4，故原线性方程组有非零解，且

$$\begin{bmatrix}5&-2&4&-3\\-3&5&-1&2\\1&-3&2&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-3&2&1\\-3&5&-1&2\\5&-2&4&-3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-3&2&1\\0&-4&5&5\\0&13&-6&-8\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-3&2&1\\0&-4&5&5\\0&1&9&7\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&29&22\\0&1&9&22\\0&0&41&33\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-\dfrac{55}{41}\\0&1&0&-\dfrac{10}{41}\\0&0&1&\dfrac{33}{41}\end{bmatrix}$$