CALCULUS

高等数学

——分层教学教程

李　瑞　宋延奎　王延庚　颜　黎　主编
卫　国　主审

从微积分入门到考研导航

上海财经大学出版社

从微

高等数学
——分层教学教程

主编 李　瑞　（上海金融学院）
宋延奎　（南京师范大学）
王延庚　（西北大学）
颜　黎　（加拿大魁北克大学）
主审 卫　国　（美国北卡罗莱纳大学）

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:分层教学教程/李瑞,宋延奎,王延庚,颜黎主编. —上海:上海财经大学出版社,2012.8

ISBN 978-7-5642-1406-7/F.1406

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李… ②宋… ③王… ④颜… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 147171 号

□ 策　　划　王永长
□ 责任编辑　王永长
□ 封面设计　张克瑶
□ 责任校对　赵　伟　卓　妍

GAODENG SHUXUE

高　等　数　学

——分层教学教程

主编　李　瑞　宋延奎　王延庚　颜　黎

主审　卫　国

上海财经大学出版社出版发行

(上海市武东路 321 号乙　邮编 200434)

网　址:http://www.sufep.com

电子邮箱:webmaster @ sufep.com

全国新华书店经销

上海崇明裕安印刷厂印刷装订

2012 年 8 月第 1 版　2012 年 8 月第 1 次印刷

787mm×1092mm　1/16　29.75 印张　761 千字

印数:0 001—4 000　定价:49.00 元

常用初等数学公式

1. 算术运算：

① $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$　② $\frac{a/b}{c/d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

2. 指数与根式运算：

① $x^m x^n=x^{m+n}$　② $x^m/x^n=x^{m-n}$　③ $(x^m)^n=x^{mn}$　④ $\frac{1}{x^n}=x^{-n}$

⑤ $(xy)^n=x^n y^n$　⑥ $\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}$　⑦ $x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$　⑧ $x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}=(\sqrt[n]{x})^m$

⑨ $\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$　⑩ $\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

3. 多项式的因式分解：

① $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$　② $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

③ $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

④ $x^{n+1}-y^{n+1}=(x-y)(x^n+x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\cdots+xy^{n-1}+y^n)$

4. 二项式公式：

① $(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2$　② $(x\pm y)^3=x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3$

③ $(x+y)^n=x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2+\cdots+C_n^k x^{n-k}y^k+\cdots+nxy^{n-1}+y^n$，

其中，$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!}$

5. 数列：

① $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$　② $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

③ $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$　④ $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

⑤ $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$

⑥ 等比数列 $a,aq,aq^2,\cdots$ 前 n 项和 $S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$

6. 二次三项式的求根公式：

如果 $ax^2+bx+c=0$，则 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

7. 不等式：

① 如果 $a<b$ 且 $b<c$，则 $a<c$；　② 如果 $a<b$，则 $a+c<b+c$；

③ 如果 $a<b$ 且 $c>0$，则 $ca<cb$；④ 如果 $a<b$ 且 $c<0$，则 $ca>cb$.

8. 绝对值不等式：

① 如果 $a>0$，则（以下⇒表示“意指”）$|x|=a \Rightarrow x=a$ 或 $x=-a$；$|x|<a \Rightarrow -a<x<a$；$|x|>a \Rightarrow x<-a$ 或 $x>a$；$|x-b|<a \Rightarrow b-a<x<b+a$.

② $|a \pm b| \leqslant |a|+|b|$.

9. 对数函数：

① $\log_a(N_1 \cdot N_2)=\log_a N_1+\log_a N_2$　　② $\log_a \dfrac{N_1}{N_2}=\log_a N_1-\log_a N_2$

③ $\log_a N^m=m\log_a N$　　④ 换底公式：$\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

⑤ 自然对数：$\ln x=\log_e x$，$\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$

10. 几何公式：

① 半径为 r 的圆面积 $A=\pi r^2$；

② 半径为 r，圆心角为 θ 的扇形面积 $A=\dfrac{1}{2}r^2\theta$，弧长 $l=r\theta$；

③ 半径为 r 的球体体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，球面积 $A=4\pi r^2$；

④ 半径为 r 高为 h 的圆柱体体积 $V=\pi r^2 h$；

⑤ 半径为 r 高为 h 的圆锥体体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$，面积 $A=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$.

11. 距离与中点公式：

① 两点 $P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 间的距离 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$；

② 线段 $\overline{P_1P_2}$ 的中点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

12. 直线方程：

记平面上过两点 $P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 的直线斜率 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$，则

① 直线的点斜式方程 $y-y_1=k(x-x_1)$；

② 直线的截斜式方程 $y=kx+b$，其中 b 为直线在 y 轴上的截距.

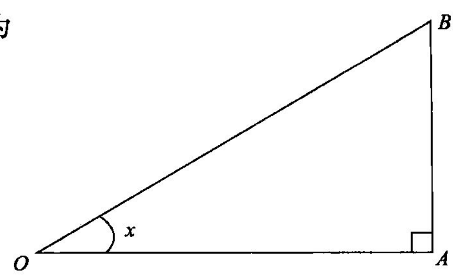
13. 圆的方程：

平面上圆心在点 (a,b)，半径为 r 的圆为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

14. 三角函数：

① 角度与弧度：π 弧度 $=180°$，$1°=\dfrac{\pi}{180}$ 弧度，1 弧度 $=\dfrac{180°}{\pi}$.

② 在直角三角形 OAB 中，设 OA 是底边，$\angle OAB$ 为直角，记 $\angle BOA=x$，则三角函数的定义为：



正弦(sine)函数　　$\sin x=\dfrac{AB}{OB}$，

余弦(cosine)函数　　$\cos x=\dfrac{OA}{OB}$，

正切(tangent)函数　　$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{AB}{OA}$，

余切(cotangent)函数 $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{OA}{AB}$,

正割(secant)函数 $\sec x=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{\cos x}$,

余割(cosecant)函数 $\csc x=\frac{OB}{AB}=\frac{1}{\sin x}$.

③ 三角函数的运算规律:

倍角公式:

$\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$

(或半角公式:$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$), $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

两角和:

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$, $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$.

积化和差公式:

$2\sin x\cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y)$, $2\cos x\sin y=\sin(x+y)-\sin(x-y)$,

$2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$, $-2\sin x\sin y=\cos(x+y)-\cos(x-y)$.

和差化积公式:

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$,

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

平方关系:$\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $1+\tan^2 x=\sec^2 x$, $1+\cot^2 x=\csc^2 x$.

基本恒等式:

$\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$, $\tan(-x)=-\tan x$,

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$,

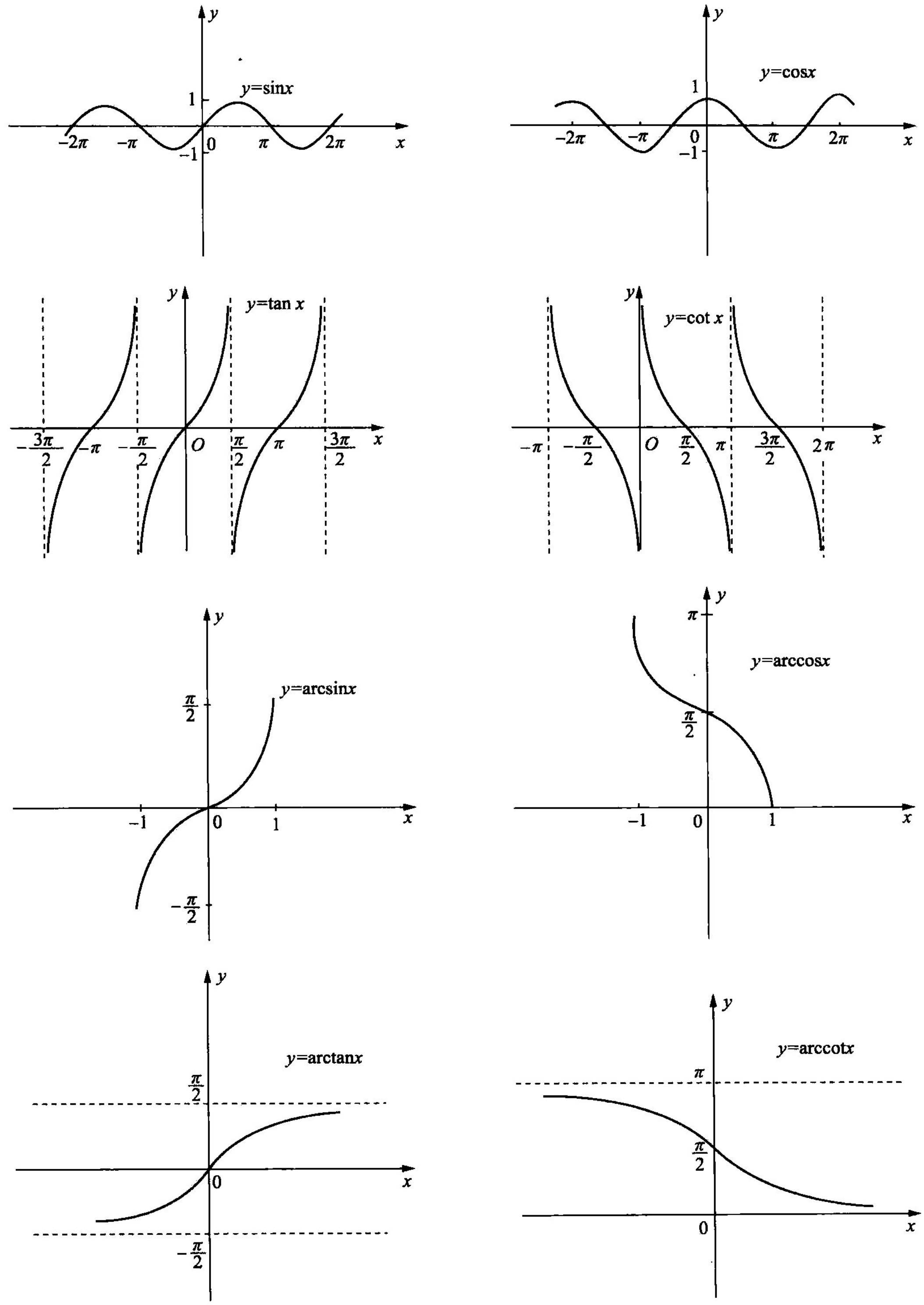
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x$,

$\sin(\pi-x)=\sin x$, $\cos(\pi-x)=-\cos x$, $\tan(\pi-x)=-\tan x$.

三角函数的特殊值:

函数 / 变量	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\alpha=\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\alpha=\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\alpha=\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\alpha=\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

15. 三角函数及反三角函数的图形：



高等数学简介

高等数学是大多数大专院校各专业开设的一门公共基础课. 在大学的数学系里，大学生要学习数学分析、高等代数、解析几何、常微分方程、拓扑学、实变函数、复变函数、偏微分方程等一二十门课程. 虽然面向非数学系学生的高等数学只讲大学数学系课程中的一部分数学内容，但这些内容却涉及上述课程的许多方面，而且对一定的内容(应用方面)还要求强化训练.

高等数学要研究什么问题?

大家知道，在初等数学，我们会研究这样的问题：如果一辆汽车用 3.5 小时行驶了 245 千米路程，那么由初等代数容易求得该车的平均时速为 $v=245\text{km}/3.5\text{h}=70\text{km/h}$. 这里，时间、距离、速度都是常量. 初等数学研究的对象是常量.

然而在行驶过程中，汽车的速度是时常改变的，速度表上显示的速度不一定是 70km/h，有时可能是 50km/h，有时可能是 100km/h，或者是其他数值.

假如我们知道汽车在每一时刻的位置，即是说已知位置函数 $s(t)$——这里 t 是时间变量，如何确定它在任一时刻的速度 $v(t)$呢? 这里涉及微分学中的一个基本概念：导数(derivative)，也就是物理学上求瞬时速度(instantaneous velocity)的问题，或在几何上，求函数图形在一点的切线斜率(slope of tangent line). 在微分学中，函数 $v(t)$叫做函数 $s(t)$的导函数或简称为导数. 从函数 $s(t)$计算导函数 $v(t)$的过程称作求导(微分).

让我们继续考虑上述问题. 若我们知道的是汽车在每一时刻的速度，也就是说，已知速度函数 $v(t)$，又如何确定它在任一时刻的位置 $s(t)$呢? 这是前面的一个问题的逆问题. 为了解决这样的问题并找到位置函数 $s(t)$，我们将介绍另一个叫做积分的概念(运算)，积分是积分学中最基本的概念. 在积分学中，$s(t)$叫做 $v(t)$的一个原函数(anti-derivative). 从函数 $v(t)$求原函数 $s(t)$的计算过程叫做求积(积分). 积分运算实际上是求一个函数，使它的导函数恰是给定的函数，因而积分运算是微分运算的逆运算. 积分概念也最早来源于求平面图形的面积和立体图形的体积.

微分学和积分学统称为微积分学. 我们将看到微分和积分这两个核心概念(运算)被微积分基本定理巧妙而深深地联系在一起：它表明微分和积分是两个互逆的运算. 值得注意的是，上述 $s(t)$和 $v(t)$都是随时间而变化的量，故这里所研究的是变量与变量之间的关系. <u>高等数学要研究的问题是不断变化着的量与量之间即变量之间的关系问题</u>. 因此，<u>高等数学研究的对象是变量</u>，处理问题的思想方法是用变化(或运动)的观点去分析、去研究、去解决问题. 读者将会在高等数学这门课程中反复体会到这个思想方法的运用.

数学分析(微积分是其基本部分)，拓扑学(也就是由研究物体几何形状的几何学发展而成的点集几何学)和抽象代数(线性代数是其一部分，另外还包括群、环、域、理想、模的结构等)是现代数学的三大基础。另一方面，这三个数学分支之间又是紧密相关和相互影响的，当你在用数学的方法建立模型、求解模型并最终解决一个应用问题的时候，你将会真正地体会到这一点。几何的基本知识对进一步学习微积分(特别是多元函数微积分学)是必要的，并且这些基本知识在整个数学中也扮演着重要角色。类似地，代数的基本方法和结果一是使用微积

分解决应用问题的必要工具，二是它们在全部数学中扮演着基础的角色，起着独特的作用.

常微分方程和积分变换（拉普拉斯变换）是比微积分更高层次的独立课程，叫做工程数学，属于微积分的应用。其中，我们将会看到微积分在许多工程问题上很好的、成功的应用，我们也会看到解决实际问题的思想是直接地、紧密地和成功地与微积分相联系。把无穷级数放在微积分应用中，是因为许多工程问题的解通常以种种无穷级数的形式出现。

具有上述内容的一本书叫做高等数学，是因为它（或多或少地）覆盖了数学的三大基础和工程数学的几个分支。

高等数学的核心教学内容主要由两部分组成：微分学和积分学（Differential Calculus and Integral Calculus），简称为微积分学，所以与高等数学相应的英美教材名称是 CALCULUS（微积分学）. 微积分在现代科技生活中有着广泛的应用. 例如，牛顿（Newton）的三大运动定律可以用微分方程的形式来刻划. 这些定律改变了人们对宇宙的认识方式. 再如，麦克斯韦（Maxwell）微分方程组（或积分方程组）是对电磁场结构和电磁场理论的最完美和最准确的一个描述. 因此，高等数学的教学范围也包括一定的工程数学内容.

高等数学教学的意义，不仅在于能给读者提供一个从事专业课程学习及进行科学研究的工具，而且更为重要的是它能够向读者提供一种思维方式（甚至是哲学层面上的，例如物质、时空的概念），开拓读者的思维，帮助读者建立起唯物主义的世界观，使读者能够用科学的思想方法和观点去从事科学研究和技术工作.

通过高等数学的学习，可以培养读者的抽象思维能力、空间想象能力，养成办事具有条理性的习惯，使学习者享用终身.

前　言

教师的责任就是给学生指路. 写这本书的目的就是想在学生学习微积分的道路上,为后来的青年学生指个路.

在写作本书的过程中,感想颇多,下面只简要作几点说明.

1. 关于书名

高等数学就是微积分学,其主要内容是一元函数微积分、多元函数微积分及其应用. 在研究数学的道路上,人类经过数千年的探索,特别是近四百多年以来的努力,微积分学已经形成了比较完善、严谨的体系. 需要指出的是,对微积分学的发展和完善的工作,主要应归功于欧洲数学家. 欧、美同名教科书的名字是 CALCULUS(微积分学),国内教材一般就叫高等数学,也有叫微积分的.

2. 本书的定位

经管类高等数学主要介绍一元函数微积分,除此以外,经管类与工学类的高等数学教学内容几乎一样. 文理兼融是高等数学教学的新趋势:工学类课本举经管类的例子多了,而某些经管专业则要求学生使用工学类的课本,目的是加强学生的数学基础. 为了适应时代发展对微积分教学的新要求,我们把本书写成工学、经管兼容的高等数学课本,为把数学当作工具使用的非数学专业的工学类、经济类、管理类应用型学生提供必要的微积分知识,篇幅按照工学类、经管类(对应于研究生入学考试"数学一"、"数学二"、"数学三"的要求)编写.

数学就是数学,它本无文科与理科之分. 数学来自人们研究自然规律的过程,又服务于解决各种实际问题之中. 在本书中,我们会用 95%以上的篇幅系统地介绍微积分的基本概念,叙述解决数学问题的思想、方法和技巧. 我们希望大学生把微积分学的基本思想、概念、方法和技巧学好,至于在不同领域中的应用,都应该掌握一点,作为大学一年级学生不应有所偏颇,这样有利于开拓思维,有利于综合能力、创新思维能力的培养.

3. 本书的特点

分层教学改革搞了十余年,国家"国民经济和社会发展第十二个五年规划纲要"给我们指出了教学改革的新方向. 纲要要求:"全面实施高校本科教学质量和教学改革工程","创新教育方式,突出培养学生科学精神、创造性思维和创新能力."因此,我们不仅要全面提高教学质量,而且要通过微积分的教学,在培养学生的科学精神、创造性思维和创新能力上下工夫,为国家以后选拔培养应用型高级专门人才做好铺垫. 这也是本书写作的创新之处.

本书的特点与教学要求:

(1) 讲思想、讲方法、讲技巧,注重培养学生的科学精神、创造性思维和创新能力. 首先是教学方法的创新. 课本中确定重积分限的"动射线法"等就是创新的教学方法. 课本不拘泥于对知识的介绍,而是注意培养学生把所学知识与社会实践相结合. 例如在"导数在经济学中的应

用”一节中，在介绍了“均衡价格”的概念后，引导读者“在以后的经济生活中不要做那种追涨杀跌的事情”．再如在“广义积分”中讨论了两类广义积分的正确解法后，要求“读者有意识地培养自己科学的（也就是按照自然规律行事的）学习、工作态度，在生活、学习、工作中不断寻求解决问题的正确途径”．

（2）按照全国硕士研究生入学数学考试大纲的要求编写教材，提高教学标准，并针对不同需求的学生分层次安排教学内容．从为绝大多数学生讲授的微积分入门到为少数优秀学生考研导航，把少量研究生入学试题作为例题，帮助读者循序渐进地掌握微积分的基本概念与运算技巧，在大学一年级就为考研做好准备．我们把不同类别（工学类、经管类）的素材都放入课本中，按照章节分别编排．例如，工学类可以讲定积分的几何与物理应用；而经管类可以讲几何与经济应用．对于难易度也进行区别：课本把不需要本科生掌握的理论部分用小一个字号编排，例如许多定理和公式的证明，写出来是为学习能力强、打算考研究生的学生选学．因此，该课本特别适合学生自学。

（3）习题分层的特点．为配合分层教学的要求，在每节后的习题中，我们把题目分成基本题、一般题和提高题三个部分．其中，提高题主要是为打算考研究生的学生设计的，绝大部分精选、改编自 1982 年以来的考研原题，综合程度非常高，技巧性很强．说到技巧，数学的精华和魅力之处往往就在某些技巧上，一些简单的技巧其实就是学生必须掌握的基本运算方法．因此，习题部分的教学要求是：

对于学习基础较差的学生，会做基本题，能做出一般题中的大部分即可．

对于学习基础一般的学生，必须熟练做出基本题，会做一般题，最好把课本中的大部分例子也独立地做下来，争取试做一些提高题（少数提高题目比一般题目要简单），提高自己的综合运用基本概念和方法的能力．事实上，在难题和简单题目之间没有严格的界限，只是所谓的难题多了几道弯，需要对基本概念掌握得非常熟练，对常用技巧要求运用自如而已．

对于想考研究生的学生，必须熟练做出基本题和一般题．通过做提高题，强化基本概念，提高运算技巧，训练抽象思维能力和综合解决问题的能力．**经过精心挑选和编排，每一节后的提高题，只要学生学过本节及以前的知识，都应能做出来，不需要该节后面的知识**．这样可以使学生循序渐进地学习和提高，为日后考研积累经验．全书收集了三十多年来的各类考研题 300 多道．在书后的“参考答案与提示”中，关于提高题的提示，一般都给的比较详细，其目的就是在研究生数学（微积分部分）入学考试方面关于解题的思路与方法对读者予以指导．对于较简单的提高题，只给答案，不给提示，以锻炼学生的能力．

我们编写提高题，在于引导学生积极向上的能力．既照顾到学习能力强的学生的学习需求，又通过这些优秀学生的钻研，带动大多数学生的学习．因为研究生入学考试是为国家选拔、培养高级人才做准备的专门考试，因此，提高题是仅供学生选做和自学的，任课教师没有必要给学生讲提高题，这不是本科教学阶段师生必须完成的教学任务．但是话说回来，如果教师从提高题中直接选取个别题目作为习题课的素材，那肯定是很好的典型例题，因为研究生入学考试试题是许多专家辛勤劳动的智慧结晶，当然是优秀的例题．

作为教科书，更多的解题方法和技巧都存在于在习题之中．如果读者通过做每一道题，都能总结出相应类型题目的解题方法和技巧，那么就会事半功倍．我们不想搞题海，学生也不要指望把所有的数学题都做完，因为没有人能做完世界上的数学题目．关键是通过独立做题培养总结解决问题规律的能力及自学能力．在书后给出了参考答案与提示（其中的方法不一定是最简捷的）．我们不打算出课本的配套习题解答，因为习题解答只能给学生帮倒忙：一方面阻碍

优秀学生的思维，另一方面给不愿意通过艰苦学习的学生提供了偷懒的机会，贻害无穷. 只要潜心研读课本，你就一定能掌握微积分的基本思想和方法；只要你能独立地做出基本题，独立地做出一般题的大部分，我们认为你基本上就掌握了本科教学大纲所要求的东西；只要你能独立地做出提高题的多一半，将会为你考研打下一个很好的基础.

4. 如何学好数学

"数学是科学的皇后."

要想学好数学，非下苦工夫不可. 学数学不能只看不练，不论你学习例题还是做习题，都要亲自动手，一步一步地计算. 在教学过程中，经常有同学说"我这里看不懂". 问他你动手做了没有？再转一圈回来问他：懂了没有？"懂了." 2011 级有一位男同学，数学基础很差，思路也是"不上道"，但他学习十分刻苦，总是问老师问题，结果期末考试得了 67 分. 而那些学习基础比他好很多的学生，因为工夫根本就没有用到，所以考试成绩二三十分甚至零分，也是不足为奇的.

要想学好数学，先要学会做人. 因为做人是要讲原则的：要时时处处考虑到别人的利益. 社会上的腐败分子脑子里无任何原则，只有私心杂念. 学数学或从事数学工作的人，出于职业习惯，一般都比较讲原则，尽管他们的行事方式有时不太招人喜欢. 如果你不按照原则办事，数学工作就做不下去.

数学是一门自然科学. 人们研究数学的过程，就是寻找其内在规律的过程. 而一旦发现了具有规律性的东西，人们就要按照这个规律(即原则)走下去，否则，必然出错.

因此，我们想告诉读者的是：要千方百计地学习掌握数学的原理和方法，坚决按照处理数学问题的原则去做题，这样一来，经过努力，学习数学对你就不是一件难事. 通过学数学，研究事物的内在规律，形成处理问题的科学思想和正确方法，进而把学习数学中养成的好的解决问题的思想方法运用到你的实际工作、生活之中.

只要你心中装着祖国，装着人民，为人类的进步事业而学，就没有克服不了的困难. 通过学习数学，培养自己良好的思维习惯和坚强的意志力，学好数学，学会做人.

5. 致谢

对于任何问题，真理只有一个，谬误遍地都是. 这就是追求真理的人为什么要不畏世俗的冷嘲热讽，耐得住孤寂而勇攀险峰，最后才能成功的原因. 希望每位读者用怀疑的眼光学这本书，不盲从、不迷信. 独立思考、追求真理是大学精神之所在. 在学习和使用本教材中，如果发现任何错误，敬请专家同行和各位读者不吝指正，这里我们向大家表示深深的感谢！

李　瑞

Email：robertlirui@yahoo.com.cn

2012 年 5 月 1 日于上海

目　录

第二部分 空间解析几何与向量代数

第三部分 多元函数微积分学

第四部分 微积分学的应用

第一部分

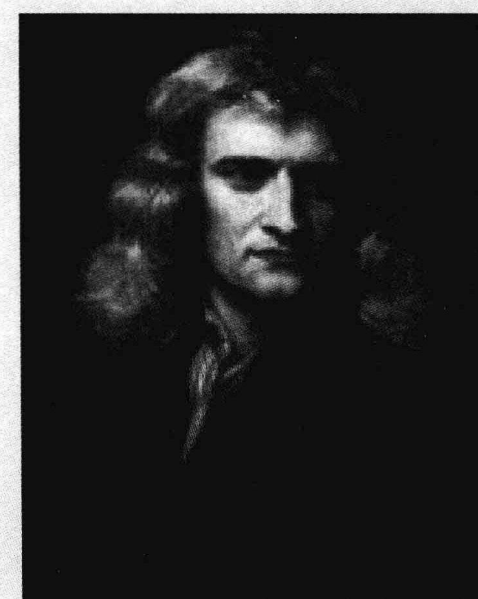
一元函数微积分学

在一切理论成就中，未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发现那样被看作人类精神的最高胜利了。如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹和惟一的功绩，那就正是在这里。

——恩格斯

学生要取得成就，需要对创造感兴趣，对新鲜事物感兴趣，对解决问题感兴趣。但最重要的品质，就是愿意为祖国作贡献。

——谷超豪



牛顿（Isaac，Newton, 1642—1727），英国数学家、物理学家、天文学家。

1