高等学校教材

线性代数

主编　王增辉

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

主　编　王增辉

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书主要内容有行列式、矩阵、n 维向量、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型等。每节后配有习题，每章后配有总习题，书末附有部分习题参考答案。

本书内容丰富，难易适中，讲解细致，可作为高等学校非数学类专业线性代数课程教材，也可作为科技工作者和自学者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／王增辉主编. --北京：高等教育出版社，2012.7

ISBN 978-7-04-035192-7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①王… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 141139 号

策划编辑 张晓丽　责任编辑 张晓丽　封面设计 于文燕　版式设计 马敬茹
插图绘制 尹 莉　责任校对 胡美萍　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	15.5	版　　次	2012 年 7 月第 1 版
字　　数	280 千字	印　　次	2012 年 7 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	23.00 元

物 料 号　35192-00

《线性代数》编委会

主　　编　王增辉
副 主 编　王红芳　李　健　白　杰
编写人员（按姓氏笔画排序）
于　航　刘丽红　吴丹丹
张　宇　周翠娟　潘　颖

前　　言

线性代数是理工、经济管理类专业的一门重要基础课程，也是后续课程的重要工具。随着科学技术的发展和计算机的普及，线性代数的主要内容已经渗透到自然科学和社会科学的各个领域，因此掌握线性代数的理论与方法对于现代化科学技术人才是十分必要的。

本书是为普通高等学校非数学类专业大学生编写的线性代数教材，在教材编写时，我们做了如下努力：

1. 在教材内容的选择上，参照最新制定的线性代数课程教学基本要求以及全国硕士研究生入学统一考试大纲，不追求内容的全面性，更注重内容的实用性。

2. 注重理论与实际的联系，加强理论与概念引入时的背景和应用介绍，使学生通过对实际问题的讨论加深对抽象概念的理解，同时帮助学生了解线性代数在解决实际问题中的重要性和应用的广泛性。在内容的讲解方法上，简化了一些定理的证明，打 * 号的定理证明供教师根据实际情况进行选择。本书强化线性代数的基本解题方法的讲解，淡化了解题的技巧性。

3. 每节后配备了难易适中的习题，每章后安排 A，B 两套习题。A 题中设有填空题、单项选择题、判断题和基本计算与证明题，主要用于检验学生对于基本概念、基本理论的掌握程度，可供学生期末复习之用；B 题中安排了有一定难度的计算题和证明题作为提高题，主要是为一些要求提高解题能力和参加研究生考试的学生而设计，可供不同层次的学生选择。书后附有习题答案，特别是对 B 题中的大部分习题给出了提示和简答。

本书适用于 32 ~ 40 学时的线性代数课程，对于学时较少的专业可略去一些理论证明。

全书由吉林农业大学、吉林农业大学发展学院、东北师范大学人文学院合作编写，由王增辉教授统稿。吉林农业大学教务处及院校同仁对本书的编写给予了有力支持，对此深表谢意。同时，研究生刘杰、徐月在文字排版中做了大量的工作，编者一并致谢。

由于编者水平有限，书中不妥和错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者

2012 年 3 月

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879
反盗版举报传真 (010)82086060
反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn
通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部
邮政编码 100120

目　　录

第一章

行列式

行列式的概念来自于线性方程组的求解问题.行列式是线性代数中的一个重要内容,也是一个基本的工具,在所讨论的许多问题中都会用到它.本章首先介绍二阶和三阶行列式,然后给出 n 阶行列式的定义和性质,最后介绍解一类非齐次线性方程组的克拉默法则.

第一节　二阶与三阶行列式

一、二阶行列式

在初等代数中,曾学过用消元法求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1}$$

这里 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22},b_1,b_2$ 均为常数,x_1,x_2 为未知数.为消去方程组(1)中未知数,用 a_{22},a_{12} 分别乘方程组中的第一个方程与第二个方程得

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}, \\ a_{21}a_{12}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = b_2a_{12}, \end{cases}$$

然后两式相减得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

类似地消去 x_2,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,则方程组(1)有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{2}$$

(2)式是解二元一次线性方程组的公式,但(2)式并不容易记住.细心观察,我们会发现(2)式的分母相同且都是由方程组(1)中未知数的系数构成,将这四个系数按照它们在方程组(1)中原来的位置排成两行两列,并在两侧各加一竖线表示(2)式分母这个数,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{3}$$

若将 a_{11},a_{22}两个数构成的对角线称为主对角线,将 a_{12},a_{21}构成的对角线称为副对角线,那么(3)式右端恰是(3)式左端主对角线两个数乘积减去副对角线两个数的乘积,我们称(3)式为**二阶行列式**.其中左端是行列式的记号,右端是行列式的值,数 $a_{ij}(i,j=1,2)$称为行列式的元素.

按二阶行列式的定义,二元一次线性方程组的求解公式(2)可写成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{4}$$

简记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则(4)可写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}. \tag{5}$$

其中行列式 D 称为方程组的系数行列式,x_1 的分子 D_1 是用常系数项 b_1,b_2替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21}所得到的二阶行列式,x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22}所得到的二阶行列式.

例 1 求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$$

解　计算行列式的值

$$D=\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}=4-3=1,\quad D_1=\begin{vmatrix}3&1\\6&2\end{vmatrix}=6-6=0,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&3\\3&6\end{vmatrix}=12-9=3.$$

由(5)式得方程组的解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{0}{1}=0,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{3}{1}=3.$$

二、三阶行列式

首先来讨论三元一次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{6}$$

的求解问题.

为了求解方程组(6),我们分别用$(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$乘第一个方程,用$(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})$乘第二个方程,用$(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$乘第三个方程,再把所得的三个式子相加,可消去$x_2,x_3$,

当$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$时,可解出$x_1$为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

同理可解出x_2,x_3的表达式

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$

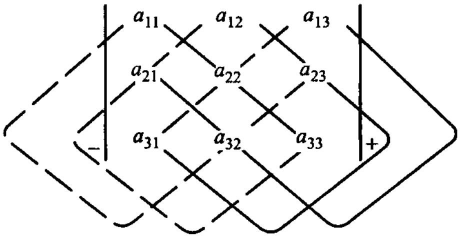
$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

为了简单地表出这个方程组的解,我们引进三阶行列式的概念.规定三阶行列式为

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

由定义可以看出，一个三阶行列式是由不同行不同列的三个数相乘得到的6项的代数和. 这些项前面所带的正负号可以从下图看出，其中，凡是实线上3个元素相乘所得到的项的前面带正号，虚线上3个元素相乘所得到的项的前面带负号. 称这种求三阶行列式值的方法为**对角线法则**.



若令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

则由三阶行列式定义知方程组(6)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{7}$$

称 D 为方程组(6)的系数行列式.

例 2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

解 按三阶行列式定义得

$$\begin{aligned} D &=1\times0\times(-1)+1\times3\times2+2\times(-1)\times2-2\times0\times2- \\ &\quad 1\times2\times3-1\times(-1)\times(-1) \\ &=0+6-4-0-6-1 \\ &=-5. \end{aligned}$$

例 3 解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=5, \\ -x_1+x_2+x_3=2. \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}1&-2&1\\1&1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=1+2+1+1-1+2=6,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-2&1\\5&1&1\\2&1&1\end{vmatrix}=9,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&5&1\\-1&2&1\end{vmatrix}=8,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&1\\1&1&5\\-1&1&2\end{vmatrix}=13.$$

由公式(7)得解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{3}{2},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{4}{3},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{13}{6}.$$

例 4　解方程 $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\4&9&x^2\end{vmatrix}=0.$

解　由三阶行列式的定义得

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\4&9&x^2\end{vmatrix}=3x^2+4x+18-12-9x-2x^2=x^2-5x+6=0.$$

可解出 $x=2$ 或 $x=3$.

习题 1－1

1. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix}2&4\\3&5\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{vmatrix}$.

2. 解方程组 $\begin{cases}6x_1-5x_2=35,\\x_1+x_2=180.\end{cases}$

3. 解方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

4. 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 0.$

5. 证明 $\begin{vmatrix} 1 & x & a^2+x^2 \\ 1 & y & a^2+y^2 \\ 1 & z & a^2+z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x).$

第二节　全排列及其逆序数

为了定义 n 阶行列式,需要用到有关排列的概念及其基本性质.

定义 1　由数 1,2,3,…,n 组成的一个有序数组称为一个 n 阶排列.

例如:1,2,3,4,5 为一个五阶排列,4,3,2,1 为一个四阶排列.

一般地,把由数 1,2,3,…,n 组成的一个 n 阶排列记为 $i_1i_2\cdots i_n$,其中 i_1,i_2,…,i_n 分别为数 1,2,3,…,n 中的某一个数,且互不相同,下标表示这些数在 n 阶排列中的次序. 如 i_4 是 1,2,3,…,n 中的某一个数,是 n 阶排列中的第四个数.

例 1　写出由数 1,2,3 组成的所有三阶排列.

解　由数 1,2,3 组成的所有排列共 6 = 3!个,它们是

1　2　3,1　3　2,2　1　3,2　3　1,3　1　2,3　2　1.

一般地,由数 1,2,3,…,n 组成的全部 n 阶排列共有 $n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$ 个. 但在这 $n!$个排列中只有唯一的一个排列 1 2 3…n 是按数的大小次序组成的一个排列,我们称这个排列为自然排列(或称标准排列). 在其余的排列中都存在大数排列在小数前面的情况.

定义 2　在一个排列中,如果两个数的前后位置与大小顺序相反,即大数排列在小数前面,则称它们构成了一个逆序(反序). 一个排列的逆序总数称为这个排列的逆序数(反序数). 如果一个排列的逆序数为偶数,则称这个排列为偶排列. 如果一个排列的逆序数为奇数,则称这个排列为奇排列. 一个 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

根据排列逆序数的定义,可按照下述方法计算一个排列的逆序数.

设在一个 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,比 $i_t(t=1,2,\cdots,n)$ 大的且排在 i_t 前面的数共有 t_k 个,则 i_t 的逆序数为 t_k 个,而该排列的逆序数就是排列中所有数的逆序数的个数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 之和,即

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n.$$

例 2　求排列 $1\ 2\cdots n$ 的逆序数.

解　1 的逆序数为 $t_1=0$,2 的逆序数为 $t_2=0,\cdots,n$ 的逆序数为 $t_n=0$,所以 $1\ 2\cdots n$ 的逆序数为

$$\tau(1\ 2\cdots n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=0.$$

例 3　求排列 4 3 1 5 2 的逆序数,并指出排列的奇偶性.

解　排在 1 前面比 1 大的数有 2 个,则 1 的逆序数为 $t_1=2$;排在 2 前面比 2 大的数有 3 个,则 2 的逆序数为 $t_2=3$;排在 3 前面比 3 大的数有 1 个,则 3 的逆序数为 $t_3=1$;排在 4 前面比 4 大的数为 0 个,则 4 的逆序数为 $t_4=0$;排在 5 前面比 5 大的数为 0 个,则 5 的逆序数为 $t_5=0$. 所以排列 4 3 1 5 2 的逆序数为 $\tau(4\ 3\ 1\ 5\ 2)=t_1+t_2+t_3+t_4+t_5=2+3+1+0+0=6$. 此排列为偶排列.

例 4　求排列 $n(n-1)\cdots2\ 1$ 的逆序数.

解　排在 1 前面且比 1 大的数共有 $(n-1)$ 个,因此 1 的逆序数为 $t_1=n-1$,排在 2 前面比 2 大的数有 $(n-2)$ 个,故 2 的逆序数为 $t_2=n-2$,等等,排在 $(n-1)$ 前面且比 $(n-1)$ 大的数有 1 个,故 $(n-1)$ 的逆序数为 $t_{n-1}=1$,而 n 的逆序为 $t_n=0$,所以排列 $n(n-1)\cdots2\ 1$ 的逆序数为

$$\begin{aligned}\tau(n(n-1)\cdots2\ 1)&=t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}+t_n\\&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\\&=\frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

定义 3　在一个排列中,互换两个数的位置,其余数的位置不动,得到另一个排列,称这样的变换为一个对换.

例 5　对排列 5 3 4 2 1 中的数 2 与 3 对换,并判断原排列和对换后的排列的奇偶性.

解　对换后的排列为 5 2 4 3 1,其逆序数为 $\tau(5\ 2\ 4\ 3\ 1)=4+1+2+1+0=8$,此排列为偶排列.

原排列的逆序数为 $\tau(5\ 3\ 4\ 2\ 1)=9$,原排列为奇排列.

由此例看出,排列经过一次对换后,改变了排列的奇偶性. 一般地,有下述结论.

定理 1　任一排列经过一次对换后改变其奇偶性.

证　略.

例如,排列 3 4 1 2 的逆序数为 $\tau(3\ 4\ 1\ 2)=4$,对换 3 与 4 后的排列 4 3 1 2 的逆序数为 $\tau(4\ 3\ 1\ 2)=5$,即改变了排列的奇偶性.

在例 1 中,由 1,2,3 组成的全部排列共有 6 个,其中偶排列有 3 个,它们是:

1 2 3,2 3 1,3 1 2. 奇排列有 3 个,它们是:1 3 2,2 1 3,3 2 1,即 1,2,3 的全部排列中一半是奇排列,一半是偶排列. 那么对于由 1,2,…,n 组成的全部 $n!$个 n 阶排列中,是否也是奇偶各占一半呢? 答案是肯定的. 有下面的定理:

定理 2 由数 1,2,…,$n(n\geqslant 2)$ 组成的全部 $n!$个排列中,奇排列和偶排列各占一半.

证 略.

习题 1-2

1. 求下列各排列的逆序数,并指出它们的奇偶性.

(1) 2 5 4 3 1 6;　　(2) 6 3 1 4 2 5;

(3) 3 1 4 6 2 5;　　(4) 9 8 7 6 5 4 3 2 1.

2. 确定 i 和 j 的值,使 9 阶排列

(1) 1 2 7 4 i 5 6 j 9 成为奇排列;

(2) 9 7 3 2 i 1 5 j 4 成为偶排列;

(3) 4 1 2 i 5 7 6 9 j 成为偶排列;

(4) 1 i 2 5 j 4 8 9 6 成为奇排列.

第三节 n 阶行列式

为了给出 n 阶行列式的定义,我们再来考察二阶和三阶行列式的特征.

先来看二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(1) 二阶行列式共有 $2^2=4$ 个元素,排成 2 行 2 列.

(2) 二阶行列式共有 $2!=2$ 项,它的项数等于 1,2 的全排列的个数.

(3) 每一项都由取自行列式中不同行不同列的两个元素的乘积. 这样二阶行列式的项可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}$,$j_1\ j_2$ 是由 1,2 组成的排列.

(4) 每项的符号是:当该项的行标按自然顺序排列时,若对应的列标组成的排列为偶排列,则该项带有正号;若对应的列标组成的排列为奇排列,则该项带有负号. 于是行列式每一项的符号可记为 $(-1)^{\tau(j_1j_2)}$,其中 $j_1\ j_2$ 为 1,2 的一个排列.

(5) 行列式等于这些项的代数和.

由上面的讨论可知,二阶行列式可定义为