本书为浙江省"2+2"联考科目《高等数学》备考教材
也可作为研究生入学考试数学三参考用书
及在校生高等数学提高型参考用书

浙江省"2+2"考试辅导教材

高等数学宝典

金义明 主编

严格按照大纲要求编排 深度结合典型真题剖析

本书是金义明老师对浙江省"2+2"联考科目《高等数学》多年的教学成果结晶。知识点紧扣大纲，概括性强；所有例题来自对历年真题逐题深入研究和精选，启发性强；解题方法独到新颖而多样，提分效果显著。

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

本书为浙江省“2+2”联考科目《高等数学》备考教材
也可作为研究生入学考试数学三参考用书
及在校生高等数学提高型参考用书

浙江省“2+2”考试辅导教材

高等数学宝典

金义明 主编

严格按照大纲要求编排 深度结合典型真题剖析

本书是金义明老师对浙江省“2+2”联考科目《高等数学》多年的教学成果结晶 知识点紧扣大纲，概括性强；所有例题来自对历年真题逐题深入研究和精选，启发性强；解题方法独到新颖而多样，提分效果显著

图书在版编目(CIP)数据

高等数学宝典 / 金义明主编. — 杭州 ：浙江工商大学出版社，2011.8

浙江省“2＋2”考试辅导教材

ISBN 978-7-81140-366-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①金… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 171183 号

浙江省“2＋2”考试辅导教材・高等数学宝典

金义明 主编

责任编辑 何海峰
责任校对 周敏燕
封面设计 杭州中纬教育照排部
责任印制 汪 俊
出版发行 浙江工商大学出版社
(杭州市教工路 198 号 邮政编码 310012)
(e-mail：zjgsupress@163.com)
(网址：http://www.zjgsupress.com)
电话：0571－88904980，88831806(传真)
排　　版 杭州朝曦图文设计有限公司
印　　刷 杭州名师文化传播有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 29
字　　数 670 千
版 印 次 2011 年 8 月第 1 版 2011 年 8 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-81140-366-4
定　　价 68.00 元

前 言

浙江省“2＋2”考试是选拔浙江省优秀二年级本科生转入部分重点大学学习的转学考试。为一些不满足现在就读的学校、专业且品学兼优的大学生提供了一次重新选择的机会，为他们实现名牌大学梦开辟了一条途径，同时也为更好地促进优质教育资源的互补和复合型人才的培养，构建我省人才成长立交桥，创造了更为宽松的学习环境。

我省从2005年起，开展了选拔优秀二年级本科生转入浙江工业大学、浙江工商大学、宁波大学、杭州电子科技大学、浙江理工大学等重点院校重点专业学习的试点工作。选拔对象为浙江省各类全日制普通高校二年级在校优秀本科学生（含独立学院）。报考者应具备一定的成绩条件。考试科目设基础课和综合课两门，其中基础课《高等数学》实行高校间联考，其余课程分别由选拔学校根据专业特点单独命题，单独组织考试。考试通常安排在4月的第二或第三个星期日，地点设在各选拔学校内。

联考科目《高等数学》的内容包括微积分、线性代数和概率论三个部分，难度接近考研数学三。随着考生的日益增多，加上所在院校教材版本各异，大家普遍感到缺少一本针对性强的复习用书。

本书作者金义明老师自2005年开始对浙江省“2＋2”考试联考课程《高等数学》进行深入研究，对考试范围、命题形式、命题规律和考试题型有深刻把握，对考题难度和评分标准等情况极其熟悉，对历年的考试真题进行过逐题深入研究，在多年“2＋2”辅导经验的基础上，精心编写了这本教材。

本书参照浙江省“2＋2”考试《高等数学》考试大纲以及全国硕士研究生入学考试数学三考试大纲编写而成。本书知识点概括，例题丰富多样，针对性强，覆盖面广，突出考试热点，力求使学生达到以下三个目的：(1)查漏补缺，对所学知识作一个系统的复习；(2)学习一些解题的新方法、新技巧，从而大幅度提高自己的解题能力；(3)熟悉“2＋2”考试和考研数学三的题型与风格，提前进入考试状态。

本书按照考试大纲要求的三个科目分为三篇：第一篇微积分，共分六章；第二篇线性代数，共分六章；第三篇概率论，共分五章。内容上不仅涵盖三门《高等数学》课程的主要知识点，还将精华部分进行了筛选和提炼。因此，本书不仅是浙江省“2＋2”联考科目《高等数学》备考教材，也可作为研究生入学考试数学三参考用书，以及高校优等生学习三门课程的提高参考书。

读者邮箱：zj2jia2@126.com

新浪微博：http://weibo.com/zj2jia2

目 录

第一篇 微积分

第二篇 线性代数

第三篇　概 率 论

第一篇

微 积 分

第一章　函数、极限、连续

【考试内容】

函数的概念及其表示法/函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性/反函数、复合函数、隐函数、分段函数/基本初等函数的性质及图形/初等函数/应用问题的函数关系的建立/数列极限与函数极限的概念/函数的左极限和右极限/无穷小和无穷大的概念及其关系/无穷小的基本性质及无穷小的比较/极限四则运算/两个重要极限/函数连续的概念/函数间断点的类型/初等函数的连续性/闭区间上连续函数的性质

【考试要求】

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题中的函数关系式.
2. 理解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,理解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左、右极限)的概念以及函数极限与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限存在时函数的性质与函数极限的四则运算和复合运算法则,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
7. 理解无穷小、无穷大的概念和基本性质,掌握无穷小的阶的比较方法.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值与最小值定理和介值定理)并掌握应用这些性质进行相关证明题论证的方法.

知识要点

一、函数

函数的概念及表示;
函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;
反函数、复合函数、隐函数和分段函数;
基本初等函数的性质及其图形,初等函数;
实际问题的函数关系的建立.

二、极限

数列极限与函数极限的定义及其性质;
函数的左右极限: $\lim f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow f(x_0+0), f(x_0-0)$ 存在且相等;

无穷小与无穷大,无穷小的比较,高阶、低阶、同阶、等价的定义;

重要的等价无穷小: $x \to 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $e^x-1 \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $(1+x)^a-1 \sim ax(a \neq 0)$, $a^x-1 \sim x\ln a$;
极限的四则运算法则;
极限存在的两个判定准则:单调有界准则和夹逼准则;

两个重要极限: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$;

洛必达法则: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

三、函数的连续性

函数连续的概念;
函数间断点的类型;
初等函数的连续性:初等函数在其定义域内连续;
闭区间上连续函数的性质(最值定理,介值定理,零点定理).

典型例题

题型1:函数的概念及其特性

【例1】 若对任意 x,有 $f(x)+2f(1-x)=x^2-2x$,求 $f(x)$.
详解 令 $x=1-t$,则 $f(1-t)+2f(t)=(1-t)^2-2(1-t)=t^2-1$,
即 $f(1-x)+2f(x)=x^2-1$,与原式联列,消去 $f(1-x)$,

得 $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-2)$.

【例2】 设 $f(x)+f(\frac{x-1}{x})=2x$,其中 $x\neq 0$, $x\neq 1$,求 $f(x)$.

详解 令 $t=\frac{x-1}{x}$,即 $x=\frac{1}{1-t}$,代入得 $f(\frac{1}{1-t})+f(t)=\frac{2}{1-t}$,

即 $f(\frac{1}{1-x})+f(x)=\frac{2}{1-x}$;

再令 $\frac{1}{1-x}=\frac{u-1}{u}$,即 $x=\frac{1}{1-u}$,代入上式得 $f(\frac{u-1}{u})+f(\frac{1}{1-u})=\frac{2(u-1)}{u}$,

即 $f(\frac{x-1}{x})+f(\frac{1}{1-x})=\frac{2(x-1)}{x}$;

联列上述三式，解得 $f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1$.

【例 3】 求下列函数的定义域：

(1) $y=\log_{(x-1)}(16-x^2)$　　(2) $y=\arcsin\frac{2x-1}{7}+\frac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$

(3) $f(x)=\int_{x^2}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$

详解 (1) $\begin{cases}16-x^2>0\\x-1>0\\x-1\neq 1\end{cases}$，解得 $1<x<2$ 或 $2<x<4$，即定义域为 $(1,2)\cup(2,4)$.

(2) $\begin{cases}\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\\2x-x^2\geqslant 0\\2x-1>0\\2x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4\\0\leqslant x\leqslant 2\\x>\frac{1}{2}\\x\neq 1\end{cases}$，解得 $\frac{1}{2}<x<1$ 或 $1<x\leqslant 2$，

即定义域为 $(\frac{1}{2},1)\cup(1,2]$.

(3) 该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

评注 本题易写成 $x\neq 0$，究其原因是对可积函数类不甚了解. 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，所以 $x=0$ 是被积函数的第一类间断点，因此，$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在包含 $x=0$ 的区间内积分有意义.

【例 4】 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

详解 $f[\varphi(x)]=\mathrm{e}^{[\varphi(x)]^2}=1-x\Rightarrow(\varphi(x))^2=\ln(1-x)$，

而 $\varphi(x)\geqslant 0$，$\Rightarrow\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$；

$\ln(1-x)\geqslant 0\quad\Rightarrow 1-x\geqslant 1\quad\Rightarrow x\leqslant 0$，即定义域为 $(-\infty,0]$.

【例 5】 设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，且 $f(\varphi(x))=\ln x$，求 $\varphi(x)$.

详解 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}=\ln\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$，所以 $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$，

而 $f(\varphi(x))=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$，$\Rightarrow\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x$，所以 $\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

【例 6】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 则　　(　　)

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0\\-(x^2+x), & x>0\end{cases}$　　(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0\\-x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\x^2-x, & x>0\end{cases}$　　(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

详解 $f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0\\ (-x)^2+(-x), & -x>0\end{cases}=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

答案 选(D).

【例 7】 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=x(1-x)$ (2) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ (3) $y=2^x+2^{-x}$ (4) $y=2^x-2^{-x}$

(5) $y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ (6) $y=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$

(7) $y=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$, $a>0$, $a\neq 1$

(8) $y=\begin{cases}\cos x, & 0<x<\pi\\ -\cos x, & -\pi<x<0\end{cases}$

(9) $f(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$，其中 $g(x)$ 为连续的偶函数

详解 (1) $y=x-x^2$，非奇非偶； (2) $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$，奇函数；

(3) $y=2^x+2^{-x}$，偶函数； (4) $y=2^x-2^{-x}$，奇函数；

(5) $y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$，$f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}=f(-x)$，奇函数；

(6) $y=\ln(\sqrt{1+x^2+x})$，

$f(x)+f(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=\ln 1=0$，所以是奇函数；

(7) $y=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$，

$f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a^{-x}-1}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{-a^x}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}=0$，

奇函数；

(8) $y=\begin{cases}\cos x, & 0<x<\pi\\ -\cos x, & -\pi<x<0\end{cases}$，

$f(-x)=\begin{cases}\cos(-x), & 0<-x<\pi\\ -\cos(-x), & -\pi<-x<0\end{cases}=\begin{cases}\cos x, & -\pi<x<0\\ -\cos x, & 0<x<\pi\end{cases}=-f(x)$，奇函数；

(9) $f(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t, f(-x)=\int_0^{-x} g(t)\mathrm{d}t \xlongequal{u=-t} -\int_0^x g(-t)\mathrm{d}t$，$g(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=-\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=-f(x)$，即 $f(x)$ 为奇函数.

【例 8】 判断下列函数是否有界：

(1) $y=\sin^2 x+\cos x-3$ (2) $y=3\sin\dfrac{1}{x}$

(3) $y=2^{\frac{1}{x}}$ (4) $y=-\dfrac{1+3x^2}{1+x^2}$

详解 (1) $|y|=|\sin^2 x+\cos x-3|\leqslant|\sin^2 x|+|\cos x|+3\leqslant 5$，有界；

(2) $|y| = |3\sin\frac{1}{x}| \leqslant 3$，有界；

(3) 无界；

(4) $|y| = \frac{1+3x^2}{1+x^2} = 1 + \frac{2x^2}{1+x^2} \leqslant 1 + 2 = 3$，有界.

【例 9】 函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上为　(　　)

(A) 有上界无下界　(B) 有下界无上界

(C) 有界且 $2\ln\frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 0$　(D) 有界且 $\ln\frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant -\frac{1}{4}$

详解　$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} > 0, x \in [\frac{1}{2}, 1]$，所以 $f(x)$ 单调增加，$2\ln\frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 0$.

答案　选(C).

【例 10】　$f(x) = |x\sin x| e^{\cos x}, -\infty < x < +\infty$ 是　(　　)

(A) 有界函数　(B)单调函数　(C) 周期函数　(D)偶函数

详解　当 $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ 时，只要 $n \to \infty$，则 $f(x) = (2n\pi + \frac{\pi}{2})e \to \infty$，所以 $f(x)$ 无界. $f(x)$ 显然不是单调函数和周期函数，并且很容易证明它是偶函数.

答案　选(D).

【例 11】　设函数 $f(x) = x \cdot \tan x \cdot e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是　(　　)

(A) 偶函数　(B) 无界函数　(C) 周期函数　(D) 单调函数

答案　选 (B).

题型 2:极限的计算方法

主要是计算七种未定式：$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

1. 洛必达法则：$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$；

2. 等价无穷小替换：$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$，其中 $\alpha' \sim \alpha$, $\beta' \sim \beta$；

常用的等价无穷小：$x \to 0$

$\sin x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\arctan x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $e^x - 1 \sim x$, $a^x - 1 \sim x\ln a$, $\ln(1+x) \sim x$, $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x (\alpha \neq 0)$；

3. 共轭因子法(有理化方法)；

4. 凑重要极限法：两个重要极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to \infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$；

5. 左右极限法：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow f(x_0 + 0), f(x_0 - 0)$ 存在且相等；

6. 无穷小乘以有界变量仍为无穷小；

7. 极限存在的两个判定准则：夹逼准则和单调有界准则；