北大燕园

2013年 李永乐·李正元

考研数学⑩

数学 全真模拟经典400题

数学一

（水平检测5套题）

主编 清华大学 李永乐
北京大学 李正元
北京大学 范培华

国家行政学院出版社

北大燕园

2013年李永乐·李正元考研数学⑩

数学

数学一

全真模拟经典400题

（水平检测5套题）

主　编　清　华　大　学　李永乐
　　　　北　京　大　学　李正元
　　　　北　京　大　学　范培华
编　者　（以姓氏笔画为序）
　　　　北　京　大　学　刘西垣
　　　　北　京　大　学　李正元
　　　　清　华　大　学　李永乐
　　　　北　京　大　学　范培华

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学全真模拟经典400题·水平检测5套题．数学．1/李正元,李永乐,范培华主编．
-北京:国家行政学院出版社,2012.6
ISBN 978-7-5150-0383-2

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①李…　②李…　③范…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集
Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第144042号

书　　名　数学全真模拟经典400题(水平检测5套题):数学一
作　　者　李永乐　李正元　范培华
责任编辑　樊克克
出版发行　国家行政学院出版社
　　　　　(北京市海淀区长春桥路6号　100089)
电　　话　(010)82771887
经　　销　新华书店
印　　刷　北京市朝阳印刷厂
版　　次　2012年7月北京第1版
印　　次　2012年7月北京第　次印刷
开　　本　787毫米×1092毫米　16开
印　　张　7.5
字　　数　194千字
书　　号　ISBN 978-7-5150-0383-2/O·014
定　　价　15.00元

前　言

本套书（**李永乐、李正元考研数学系列——《数学复习全书》及《数学全真模拟经典400题》等，国家行政学院出版社**）出版、修订多年以来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为本套书在编写体例和内容上有“自己的特色”和“较高的水准及较强的针对性、前瞻性”，较“适合考生备考的需要”，我们深感欣慰。《**2013年考研数学全真模拟经典400题**》根据考试大纲的考试内容、考试要求及试卷结构重新编写，将以更高的质量和新的面貌呈现在广大考生的面前。

《经典400题》特点：

1. **每题均全新优化设计，综合性强**

为使考研同学考前多一些查漏补缺的机会，多见一些新题型，多一些针对性，考试中多一份把握，我们特优化设计了10套模拟试题。在内容设计上，每道题均涉及两个或两个以上知识点，这些题涵盖新大纲大部分重要考查知识点。通过这10套全新优化设计的试题训练，我们相信一定能提高您的数学的分析问题、解决问题的能力。

2. **注重归纳总结，力求一题多解，解答规范、详细**

我们在设计这10套试题时，无论是选择题、填空题，还是解答题（包括证明题），每道题设有：①分析——该题的解题思路和方法；②解答——该题的详细、规范解题过程；③评注——该题所考查的知识点（或命题意图）、解题思路归纳总结和延伸、常见错误和注意事项、涉及的重要结论。同时，在解题过程中，力求一题多解，扩展考生的视野和思路，比较各种解题方法的特点和适用范围，从而提高应试水平。

本书使用说明：

1. 本书是依据考研数学大纲为2013年考研读者全新优化设计的一本全真模拟训练套题，本书中的试题难度略高于2012年考研试题，解答题（包括证明题）体现了考试重点、难点内容，综合性比较强；选择题与填空题着重考查考生对基本概念、基本公式、基本定理的理解和运用，适用于第二、三阶段复习训练之用。

2. 本书中的每道题均有较透彻的分析、详细解答、归纳总结的评注，因此希望考生在做题时，如果遇到了困难，不要急于看分析与解答，一定要多思考，只有这样才能达到本书编写的目的，才能提高应试水平，才能取得好成绩。

3. 考生在使用本书之前，应仔细研读《2013年考研数学复习全书》，弄清《考试大纲》中要求掌握的基本概念、基本定理和基本方法，掌握《2013年考研数学复习全书》中所介绍的解题思路、方法和技巧。

特别提醒考生注意：①本书编撰者长期从事于清华大学、北京大学、中国人民大学等重点高校的相关教学，考研辅导经验丰富，并且是各自领域的专家学者，具有足够的专业素养。更重要的是，本书编撰者认真钻研考试大纲的考试内容和考试要求，归纳总结考生在学习中的不足及近年来考研数学考试的命题规律，尽力做到考研辅导和考研辅导资料的编写具有很强的针对性和有效性。

②为了提高考生数学分析和解决问题的能力，本书所编题目难度较大，有的题目涉及3个以上的考点，综合运用性比较高，概念运用性较强，如果考生在做本书试题感到棘手时，请不要着急，更不能泄气，应静下心来，仔细分析题目所考查的是哪些知识点，回忆《数学复习全书》所介绍的解题方法，然后再动手做题。

因此，我们希望考生认真对待本书中每道题，一定要动手做题，不要一看了事，建议考生对本书中的每套题至少要做二至三遍。我们相信在2013年考研数学考试中，您肯定会感到有些题“似曾相识”、甚至“一见如故”。

在本书的编写、编辑和成书过程中，由于时间紧、任务重，尽管我们认真对待和严格要求，仍难免有不尽如意的地方，诚请广大读者和同行批评指正。

说明：应广大考生的要求，并使本书更具针对性，我们将原《经典400题》（共10套题）分阶段即分成两本（各5套题）出版，但书名仍沿用《数学全真模拟经典400题》。

第一本即**《2013年数学全真模拟经典400题》（水平检测5套题）**：该书于7月中旬出版，目的是帮助考生在夯实基础、强化提高的基础上检测前阶段的复习效果，查漏补缺，便于考生后阶段有针对性地加以提高。

第二本即**《2013年数学全真模拟经典400题》（最后冲刺5套题）**：该书将于10月上旬出版，目的是帮助考生总结重要考试题型的解题思路、方法，扫清解题中相关知识点间的衔接与转换上的障碍，增长见识；同时帮助考生调整考试状态，提高数学成绩。

编　者

2012年7月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

水平检测　卷(一)

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 设 $f'(x_0)=0,f''(x_0)>0$，则必定存在一个正数 δ，使得

(A) 曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 是凹的．

(B) 曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 是凸的．

(C) 曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 单调减少，而在 $[x_0,x_0+\delta)$ 单调增加．

(D) 曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 单调增加，而在 $[x_0,x_0+\delta)$ 单调减少．

(2) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则下列命题中错误的是

(A) 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 必是奇函数．

(B) 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $F(x)$ 必是偶函数．

(C) 若 $f(x)$ 以 T 为周期且是偶函数，则 $F(x)$ 以 T 为周期且是奇函数．

(D) 若 $f(x)$ 以 T 为周期且是奇函数，则 $F(x)$ 以 T 为周期且是偶函数．

(3) 设在全平面上有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$，则下列条件中能保证 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 的是

(A) $x_1<x_2,\ y_1<y_2$．　　(B) $x_1<x_2,\ y_1>y_2$．

(C) $x_1>x_2,\ y_1<y_2$．　　(D) $x_1>x_2,\ y_1>y_2$．

(4) 下列级数中属于条件收敛的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]$．　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\dfrac{1}{n^{3/2}}+\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]$．

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+2}}\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$．　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\ln(n+1)}$．

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，则

(A) 当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解时，必有 $m=n$．

(B) 当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解时，必有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$．

(C) 当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解时，必有 $m<n$．

(D) 当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解时，必有 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<m$．

(6) 下列矩阵中不能相似对角化的是

(A) $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$．　(B) $\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$．　(C) $\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$．　(D) $\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&3\end{bmatrix}$．

(7) 已知随机变量 $X_1 \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$，$X_2 \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$，且 X_1 与 X_2 独立．记 $A = \{X_1 = 1\}$，$B = \{X_2 = 1\}$，$C_1 = \{X_1X_2 = 1\}$，$C_2 = \{X_1X_2 = -1\}$，则

(A) A,B,C_1 相互独立，A,B,C_2 相互独立．

(B) A,B,C_1 相互独立，A,B,C_2 两两独立．

(C) A,B,C_1 两两独立，A,B,C_2 相互独立．

(D) A,B,C_1 两两独立，A,B,C_2 两两独立．

(8) 设总体 X 的方差存在，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，其样本均值和样本方差分别为 $\overline{X}$，S^2，则 EX^2 的矩估计量是

(A) $S^2 + \overline{X}^2$.

(B) $\dfrac{n-1}{n}S^2 + \overline{X}^2$.

(C) $\dfrac{n}{n-1}S^2 + \overline{X}^2$.

(D) $\dfrac{n}{n-1}S^2 + n\overline{X}^2$.

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 数列极限 $I = \lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{\sqrt{n^2+4n}} x\sin\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = $ ________.

(10) 定积分 $I = \int_0^a \dfrac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}(a>0) = $ ________.

(11) 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有定义，且满足：$f(x,y) = f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0) + o(\rho)(\rho\to 0)$，其中 a,b 为常数，$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$，则

$$I = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+2t,y_0) - f(x_0,y_0-t)}{2t} = \text{________}.$$

(12) 设 S 为圆锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2 = 2ax$ 所截下部分，则曲面积分 $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S = $ ________$(a>0)$.

(13) 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^4$，则 $A^{-1} = $ ________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E\min(X,Y) = $ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)　(本题满分 10 分)

设参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) = t - \sin t, \\ y = \psi(t) = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$，求证：

(Ⅰ) 由参数方程确定连续函数 $y = y(x)(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$；

(Ⅱ) $y = y(x)$ 在 $[0,\pi]$ 单调上升，在 $[\pi,2\pi]$ 单调下降；

(Ⅲ) $y = y(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 是凸函数．

(16)　(本题满分 10 分)

设有一容器由平面 $z = 0, z = 1$ 及介于它们之间的曲面 S 所围成．过 z 轴上 $\forall$ 点 $(0,0,z)(0 \leqslant z \leqslant 1)$ 作垂直于 z 轴的平面与该立体相截得水平截面 $D(z)$，它是半径 $r(z) = \sqrt{(1-z)^2 + z^2}$ 的圆面．若以每秒 v_0 体积单位的均匀速度往该容器注水，并假设开始时容器是空的．

(Ⅰ) 写出注水过程中 t 时刻水面高度 $z = z(t)$ 与相应的水体积 $V = V(t)$ 之间的关系式，并求出水面高度 z 与时间 t 的函数关系；

(Ⅱ) 求水表面上升速度最大时的水面高度；

(Ⅲ) 求灌满容器所需时间．

(17) （本题满分 10 分）

设 xOy 平面第一象限中有曲线 $\Gamma: y = y(x)$，过点 $A(0, \sqrt{2}-1)$，$y'(x) > 0$．又 $M(x,y)$ 为 Γ 上任意一点，满足：弧段 $\overset{\frown}{AM}$ 的长度与点 M 处 Γ 的切线在 x 轴上的截距之差为 $\sqrt{2}-1$．

（Ⅰ）导出 $y = y(x)$ 满足的积分、微分方程和初始条件；

（Ⅱ）求曲线 Γ 的表达式．

(18) （本题满分 10 分）

（Ⅰ）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n + (-2)^n}{n}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域；

（Ⅱ）求证：和函数 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}x^2 e^{-nx}$ 定义于 $[0, +\infty)$ 且有界．

(19) （本题满分 10 分）

是否存在常数 n，使得存在可微函数 $u(x,y)$ 在如下区域 D 满足：

$$du = \frac{-y\,dx + x\,dy}{(2x^2 - 2xy + y^2)^n},$$

若存在，并求出相应的 $u(x,y)$．

（Ⅰ）$D: x^2 + y^2 > 0$；（Ⅱ）$D: x \neq 0$．

(20) **(本题满分 11 分)**

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,a,4)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(5,17,-1,7)^T$,

(Ⅰ) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,求 a 的值;

(Ⅱ) 当 $a=3$ 时,求与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交的非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$;

(Ⅲ) 当 $a=3$ 时,证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 可表示任一个 4 维列向量.

(21) **(本题满分 11 分)**

已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的 3 维列向量,满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=4\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3$.

(Ⅰ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(Ⅱ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量;

(Ⅲ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}^*-6\boldsymbol{E}$ 的秩.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

(22) **(本题满分 11 分)**

有甲、乙、丙三个口袋,其中甲袋装有 1 个红球,2 个白球,3 个黑球;乙袋装有 2 个红球,1 个白球,2 个黑球;丙袋装有 2 个红球,3 个白球.现任取一袋,从中任取 2 个球,用 X 表示取到的红球数,Y 表示取到的白球数,Z 表示取到的黑球数.试求:

(Ⅰ)(X,Y) 的联合分布;

(Ⅱ)$\operatorname{cov}(X,Y)+\operatorname{cov}(Y,Z)$.

(23) **(本题满分 11 分)**

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\dfrac{A}{e^{x}+e^{-x}}(-\infty<x<+\infty)$,对 X 进行两次独立观察,其结果分别记为 X_1,X_2,令 $Y_i=\begin{cases}1, & X_i\leqslant 1,\\ 0, & X_i>1,\end{cases}\quad i=1,2.$

(Ⅰ)确定常数 A,并计算概率 $P\{X_1<0,X_2<1\}$;

(Ⅱ)求二维随机变量 (Y_1,Y_2) 的联合概率分布;

(Ⅲ)求二维随机变量 (Y_1,Y_2) 的联合分布函数.

水平检测　卷(二)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $f(x) = \cos|x|^{\frac{1}{2}}$,则 $f(x)$

(A) 在点 $x = 0$ 处右可导,且 $f'_+(0) = 0$.

(B) 在点 $x = 0$ 处右可导,且 $f'_+(0) \neq 0$.

(C) 在点 $x = 0$ 处不右可导,但有无穷导数 $f'_+(0) = \infty$.

(D) 在点 $x = 0$ 处不右可导,但不是无穷导数.

(2) 设 $f(x),g(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导且 $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $f'(x_0)g'(x_0) < 0$,则

(A) x_0 不是 $f(x)g(x)$ 的驻点.

(B) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点,但不是 $f(x)g(x)$ 的极值点.

(C) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点,且是 $f(x)g(x)$ 的极小值点.

(D) x_0 是 $f(x)g(x)$ 的驻点,且是 $f(x)g(x)$ 的极大值点.

(3) 设无穷长直线 L 的线密度为 1,引力常数为 k,则 L 对距直线为 a 的单位质点 P 沿 y 轴方向的引力为

(A) $\frac{2k}{a}$.　　(B) $\frac{k}{a}$.　　(C) $\frac{2k}{a^2}$.　　(D) $\frac{k}{a^2}$.

(4) 设 $f(x,y)$ 为区域 D 内的函数,则下列命题中不正确的是

(A) 若在 D 内,有 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$,则 $f(x,y) \equiv$ 常数.

(B) 若在 D 内的任何一点处沿两个不共线方向的方向导数都为零,则 $f(x,y) \equiv$ 常数.

(C) 若在 D 内,有 $\mathrm{d}f(x,y) \equiv 0$,则 $f(x,y) \equiv$ 常数.

(D) 若在 D 内,有 $\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y \equiv 0$,则 $f(x,y) \equiv$ 常数.

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是 n 阶矩阵,并满足 $\boldsymbol{ABAC} = \boldsymbol{E}$,则下列结论中不正确的是

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$.　　(B) $\boldsymbol{BAC} = \boldsymbol{CAB}$.

(C) $\boldsymbol{BA}^2\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}$.　　(D) $\boldsymbol{ACAB} = \boldsymbol{CABA}$.

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,则下列矩阵中与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等价、合同但不相似的是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(7)　已知随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=a\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$,其中 $\lambda>0,k=1,2,\cdots$,则 EX 为

(A) λ.　　(B) λe^{λ}.　　(C) $\dfrac{\lambda}{e^{\lambda}-1}$.　　(D) $\dfrac{\lambda e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1}$.

(8)　设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n+1}$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$. 已知 $T=k\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sim t(m)$,则 k,m 的值分别为

(A) $k=\sqrt{\dfrac{n}{n+1}},\quad m=n-1$.　　(B) $k=\sqrt{\dfrac{n+1}{n}},\quad m=n-1$.

(C) $k=\sqrt{\dfrac{n+1}{n}},\quad m=n$.　　(D) $k=\sqrt{\dfrac{n}{n+1}},\quad m=n$.

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)　曲线 $y=x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)$ 的全部渐近线方程是________.

(10)　设 $y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续,又当 $\Delta x\to 0$ 时 α 是比 Δx 高阶的无穷小,函数 $y(x)$ 在任意点处的增量 $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)$ 满足

$$\Delta y(1+\Delta y)=\frac{y\Delta x}{x^2+x+1}+\alpha,$$

且 $y(0)=\pi$,则 $y(1)=$ ________.

(11)　设 $b>a>0$,则圆 $(x-b)^2+y^2=a^2$ 绕 y 轴旋转所得旋转体的表面积为________.

(12)　设 L 为曲线:$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ y+z=0, \end{cases}$ 则 $I=\int_L(x^2+3y+3z)ds=$ ________.

(13)　设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{bmatrix}$,$B$ 是 3 阶非零矩阵,满足 $BA=0$,则矩阵 $B=$ ________.

(14)　设 X,Y 分别服从参数为 $\dfrac{3}{4}$ 与 $\dfrac{1}{2}$ 的 0-1 分布,且它们的相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,则 X 与 Y 的联合概率分布为________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) **(本题满分 10 分)**

设 $F(x)=\int_0^1(1-t)\ln(1+xt)\mathrm{d}t\,(x>-1)$,求 $F'(x)\,(x>-1,x\neq 0)$ 并证明 $F'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上连续.

(16) **(本题满分 10 分)**

计算二重积分 $I=\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 为 $x^2+y^2=1$,$x^2+y^2=2x$ 所围中间一块区域.

(17) **(本题满分 10 分)**

求 $f(x,y,z)=2x+2y-z^2+5$ 在区域 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant 2$ 上的最大值与最小值.

(18) （本题满分 10 分）

设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t, & x\neq 0,\\ A, & x=0,\end{cases}$

（Ⅰ）确定常数 A,使得 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 任意阶可导,并求它的幂级数展开式;

（Ⅱ）求 $f^{(8)}(0)$ 与 $f^{(9)}(0)$.

(19) （本题满分 10 分）

求证 $f(x)=\pi x(1-x)\cos\pi x-(1-2x)\sin\pi x>0$ 当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$时成立.

（20）（本题满分 11 分）

设 A 是 n 阶反对称矩阵，

（Ⅰ）证明：A 可逆的必要条件是 n 为偶数；当 n 为奇数时，A^* 是对称矩阵；

（Ⅱ）举一个 4 阶不可逆的反对称矩阵的例子；

（Ⅲ）证明：如果 λ 是 A 的特征值，那么 $-\lambda$ 也必是 A 的特征值.

（21）（本题满分 11 分）

已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -a \\ 2 & a & -2 \\ -a & -1 & 1 \end{bmatrix}$，求 A 的特征值与特征向量，并指出 A 可以相似对角化的条件.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com