微积分学习辅导（下册）

主　编　李剑秋
副主编　卢俊峰　宋秀迎
孙景楠　陈赛君

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

微积分学习辅导（下册）

主　编　李剑秋
副主编　卢俊峰　宋秀迎
　　　　孙景楠　陈赛君

浙江工商大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习辅导. 下册 / 李剑秋主编. —杭州：浙江工商大学出版社，2012.1

ISBN 978-7-81140-458-6

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 006743 号

微积分学习辅导(下册)

李剑秋 主编

责任编辑 陈维君
封面设计 刘 韵
责任印制 汪 俊
出版发行 浙江工商大学出版社
(杭州市教工路 198 号 邮政编码 310012)
(E-mail:zjgsupress@163.com)
(网址:http://www.zjgsupress.com)
电话:0571—88904980,88831806(传真)
排 版 杭州朝曦图文设计有限公司
印 刷 杭州恒力通印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 13.25
字 数 270 千
版 印 次 2012 年 1 月第 1 版 2012 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-81140-458-6
定 价 27.00 元

浙江工商大学出版社营销部邮购电话 0571—88804227

前　言

微积分是高等院校学生的重要基础课之一，为使学生更好掌握教材的内容，我们编写了这本与教材配套的辅导书。书中的每章按照内容提要、例题解析、自测题及教材复习题解答四个部分编写。内容提要比较详细地总结了各章节的定义、重要定理和公式，特别对于一些重要的基本概念，从不同的角度加以剖析，并指出需注意的重点；例题解析对各章节重点题型作了归纳和总结，精选各类典型例题，力求解释详尽，着重分析，并通过一题多解的讲解，帮助学生提高综合分析能力；自测题主要取自于教材，难易程度适中，目的是检测学生在理解本章内容的基础上，掌握必备的解题能力，也可以作为考查学生是否掌握该章节知识的基本试题内容；复习题解答给出了教材各章总复习题的详细解答，帮助学生更好地学习和掌握各章内容，起到辅助参考的作用。为检测学生是否全面掌握知识要点和解题能力，特精选了五套模拟试卷并附试卷详细解答。

本书下册部分由浙江工商大学五位老师合作完成。其中卢俊峰编写第六章；宋秀迎编写第七章；孙景楠编写第八章；李剑秋编写第九章及第十章；陈赛君编写模拟试卷及解答，最后由李剑秋统稿、定稿。

限于编者水平，不周之处切望同行、读者指正。

编　者

于浙江工商大学杭州商学院

2011 年 12 月

第六章　定 积 分

内容提要

一、定积分的概念

(一) 定义

设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上有界，用分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

来等分区间$[a,b]$，各小区间的长度依次为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}(i = 1,2,\cdots,n)$. 在每一小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 ξ_i，作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$，并作和式

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

若当 $n \to \infty$ 时，和式极限存在，且此极限不依赖于 ξ_i 的选择，则称此极限值为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的定积分，记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\frac{b-a}{n}.$$

其中 $f(x)$ 称为被积函数，x 称为积分变量，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为积分表达式，$[a,b]$称为积分区间，a 和 b 分别称为积分下限和积分上限.

(二) 定积分的值只与被积函数及积分区间有关，而与积分变量用什么符号表示无关，比如

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u.$$

(三) 和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 通常称为 $f(x)$ 的积分和. 如果 $f(x)$ 在$[a,b]$上的定积分存在，我们就说 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

(四) 可积函数一定是有界的，而无界函数一定不可积.

(五) 设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

(六) 设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上有界,且只有有限个第一类间断点,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

(七) 定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义为:它是介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x=a,x=b$之间的各部分面积的代数和,其中约定在x轴上方的面积取正值,x轴下方的面积取负值.

二、定积分的性质

(一) 对定积分作两点补充规定

1. 当 $a=b$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

2. 当 $a>b$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

(二) 在后续的讨论中,如不特别指出,对定积分的上下限的大小均不加以限制,并假定各性质中所列出的定积分都是存在的.

1. $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (k 是常数).

2. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

3. (**区间可加性**)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

4. 如果在区间$[a,b]$上 $f(x)\equiv 1$,则

$$\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a.$$

5. 如果在区间$[a,b]$上 $f(x)\geqslant 0$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0 \quad (a<b).$$

推论 1 如果在区间$[a,b]$上,$f(x)\leqslant g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a<b).$$

推论 2 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \quad (a<b).$

6. (**估值定理**)设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的最大值及最小值,则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a) \quad (a<b).$$

7. (**定积分中值定理**)如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,则在积分区间$[a,b]$上

至少存在一点 ξ,使下式成立:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

上式称为**积分中值公式**. 数值 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 称为连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值.

三、微积分基本公式

(一) 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则积分上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 $[a,b]$ 上具有导数,并且它的导数是

$$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

(二) 类似地,可以讨论积分下限函数 $\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$. 由规定知 $\int_x^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^x f(t)\mathrm{d}t$,于是

$$\left[\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right]' = \left[-\int_b^x f(t)\mathrm{d}t\right]' = -f(x).$$

(三) 如果积分的上限和下限都是 x 的可导函数,则由复合函数的求导法则,得

$$\begin{aligned}\left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]' &= \left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]' \\ &= f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x).\end{aligned}$$

(四)(**原函数存在定理**)如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

注 这个定理的重要性在于一方面肯定了连续函数的原函数是存在的,另一方面揭示了定积分与原函数之间的联系.

(五)(**牛顿-莱布尼茨公式**)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一个原函数,即 $F'(x) = f(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

注 不定积分与定积分是两个完全不同的概念,定积分是求某一和式的极限,而不定积分是原函数的全体,两者通过牛顿-莱布尼茨公式联系起来,从而我们可以利用原函数求定积分.

四、定积分的换元积分法

(一) 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,函数 $x=\varphi(t)$ 满足:

(1) $\varphi(t)$ 在区间$[\alpha,\beta]$上有连续导数 $\varphi'(t)$;

(2) 当 t 在区间$[\alpha,\beta]$上变化时,$\varphi(t)$ 的值在$[a,b]$上变化,且 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

(二) 区别于不定积分的换元法,使用定积分的换元法应注意两点:

(1) 用 $x=\varphi(t)$ 把原来变量 x 代换成新变量 t 时,积分限也要换成相应于新变量 t 的积分限,而且 t 的下限对应着 x 的下限,t 的上限对应着 x 的上限;

(2) 定积分的换元法并不要求变换 $x=\varphi(t)$ 具有反函数,计算过程中不需作变量回代步骤,即求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数 $F[\varphi(t)]$ 后,不要变换成原来变量 x 的函数,而直接把新变量 t 的上、下限分别代入 $F[\varphi(t)]$ 中然后相减即可.

五、定积分的分部积分法

设函数 $u(x),v(x)$ 在区间$[a,b]$上具有连续导数 $u'(x),v'(x)$,则有

$$\int_a^b u\mathrm{d}v=(uv)\big|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u.$$

分部积分公式中 $u(x),v(x)$ 的选取与不定积分是一样的.

六、定积分的应用

(一) 平面图形的面积

1. 由曲线 $y=f(x)$,直线 $x=a,x=b(a<b)$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积为

$$A=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

2. 由两条连续曲线 $y=f(x),y=g(x)$ 及直线 $x=a,x=b(a<b)$ 所围成的图形的面积为

$$A=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x.$$

3. 由两条连续曲线 $x=f(y),x=g(y)$ 及直线 $y=c,y=d(c<d)$ 所围成的图形的面积为

$$A=\int_c^d|f(y)-g(y)|\mathrm{d}y.$$

(二) 平行截面积为已知的立体的体积

若立体介于平面 $x=a,x=b$ 之间,且在点 x 处垂直于 x 轴的截面面积为连续函数

$A(x)$，则立体体积为

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

(三) 旋转体的体积

1. 由连续曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a, x = b(a < b)$ 与 x 轴所围成曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积为

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 \mathrm{d}x = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

2. 由连续曲线 $x = \varphi(y)$，直线 $y = c, y = d(c < d)$ 与 y 轴所围成曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积为

$$V_y = \int_c^d \pi x^2 \mathrm{d}y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\mathrm{d}y.$$

3. “套筒法”或“柱壳法”：由连续曲线 $y = f(x) \geqslant 0$，直线 $x = a, x = b(0 \leqslant a < b)$ 与 x 轴所围成曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积为

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x.$$

(四) 经济应用问题

(1) 已知边际成本为 $C'(Q)$，则总成本为 $C(Q) = \int_0^Q C'(Q)\mathrm{d}Q + C(0)$，其中 $C(0)$ 为固定成本；

(2) 已知边际收益为 $R'(Q)$，则总收益为 $R(Q) = \int_0^Q R'(Q)\mathrm{d}Q + R(0)$，其中 $R(0) = 0$.

当边际成本等于边际收益时，总利润最大.

七、广义积分

(一) 无穷限广义积分

定义 设函数 $f(x)$ 在区间$[a, +\infty)$ 上连续，取 $b > a$. 如果极限

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在$[a, +\infty)$ 上的广义积分，记作$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

此时也称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 如果上述极限不存在，则称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

类似地，有下面的定义.

定义 设函数 $f(x)$ 在区间$(-\infty,b]$上连续，则定义函数 $f(x)$ 在$(-\infty,b]$上的广义积分为

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

定义 设函数 $f(x)$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上连续，且$\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 和$\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则定义 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上的广义积分为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

如果广义积分$\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 和$\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 至少有一个发散，则称广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

上述积分统称为无穷限的广义积分.

(二) 无界函数广义积分(瑕积分)

定义 设函数 $f(x)$ 在区间$(a,b]$上连续，且$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，取 $\eta>0$，如果极限

$$\lim_{\eta\to0^+}\int_{a+\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在$(a,b]$上的广义积分，仍然记作$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to0^+}\int_{a+\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x,$$

此时称广义积分$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 如果上述极限不存在，则称广义积分$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

类似地，有下面的定义.

定义 设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b)$上连续，且$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$，取 $\eta>0$，如果极限

$$\lim_{\eta\to0^+}\int_{a}^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则定义函数 $f(x)$ 在$[a,b)$上广义积分为

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to0^+}\int_{a}^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x,$$

此时也称广义积分$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 否则，就称广义积分$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上除点 c $(a<c<b)$ 外连续，且$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$. 如果两个广义积分$\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则定义

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\eta \to 0^+}\int_{c+\eta}^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

此时称该广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛. 如果两个广义积分$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$与$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$中至少有一个发散,则称广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散.

注 计算广义积分时,需要确定广义积分的类型,先观察上下限是否有无穷大,再确定积分区间的端点或内部是否有无穷型间断点(即瑕点)存在. 确定类型后,可利用牛顿-莱布尼茨公式、换元法或分部积分法求解.

例题解析

一、定积分的概念及性质

【例 1】 利用定积分求下列和式的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$

分析 化极限问题为定积分计算常适用于某些连加或连乘(取对数后变为连加)的极限,化为定积分的关键是找出对应的被积函数与积分区间.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 2.$$

(2) 将连乘式通过求对数转化为连加,令 $y_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$,取对数得

$$\ln y_n = \frac{1}{n}[\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(n+n)] - \ln n$$

$$= \frac{1}{n}[\ln(n+1)-\ln n+\ln(n+2)-\ln n+\cdots+\ln(n+n)-\ln n]$$

$$= \frac{1}{n}\left(\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n}+\cdots+\ln\frac{n+n}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right),$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=2\ln 2-1$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln y_n}=\mathrm{e}^{2\ln 2-1}=4\mathrm{e}^{-1}$.

【例 2】 估计下列积分的值:

(1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2x)\mathrm{d}x$　　　(2) $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$

分析 利用估值定理.

解 (1) (习题 6.1—4(2)) 因为 $1\leqslant 1+\sin^2x\leqslant 2$, $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi\right]$,

所以 $\pi\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\sin^2x)\mathrm{d}x\leqslant 2\pi$.

(2) 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$,令 $f'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}=0$,得 $x=0$.

而
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},\quad f(0)=1,\quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},$$

比较知 $f(x)$ 在$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$上的最大值为 1,最小值为 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

由估值定理得
$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\leqslant\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\leqslant 1\times\left[\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

即
$$\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\leqslant\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{2}.$$

【例 3】 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上可导,且满足 $f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=0$,证明:在$(0,1)$内至少存在一点 ξ,使 $f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$.

分析 令 $F(x)=xf(x)$,则 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$,利用罗尔定理证明.

证 设 $F(x)=xf(x)$,由积分中值定理,存在 $\eta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,使

$$\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}F(x)\mathrm{d}x=F(\eta)\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{2}F(\eta).$$

由已知条件,有

$$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=2\cdot\frac{1}{2}F(\eta)=F(\eta).$$

由于 $F(1)=f(1)=F(\eta)$,并且 $F(x)$ 在$[\eta,1]$上连续,在$(\eta,1)$上可导. 故由罗尔定理知,

至少存在一点 $\xi \in (\eta,1) \subset (0,1)$，使得

$$F'(\xi) = f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0,$$

即

$$f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}.$$

二、变限积分函数

【例 4】 求下列各式对 x 的导数：

(1) $\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$　　　　(2) $\displaystyle\int_0^{x^2} x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$

分析　(1) 计算变上限积分函数的导数时，最好不要计算积分，而是利用公式求解. (2) 被积函数中的 x 与 t 是不同的变量，t 是积分变量，而 x 是变上限积分函数的自变量，求关于 x 的导数，应先分离自变量 x.

解　(1) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t = \frac{(x^3)'}{\sqrt{1+(x^3)^2}} - \frac{(x^2)'}{\sqrt{1+(x^2)^2}} = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}.$

(2)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2} x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right) = \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t + x\mathrm{e}^{x^4}\cdot 2x$$
$$= \int_0^{x^2} \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t + 2x^2\mathrm{e}^{x^4}.$$

【例 5】 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\int_{\frac{1}{x}}^{0} \sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

分析　这是“$\infty\cdot 0$”型未定式，先化为“$\dfrac{0}{0}$”型，再用洛必达法则.

解　
$$原式 = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{\frac{1}{x}}^{0}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\sin\sqrt{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}} = -\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}\sin\sqrt{\frac{1}{x}}$$
$$= -\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}} = -\frac{2}{3}.$$

【例 6】 设函数 $f(x) > 0$，且在 $[a,b]$ 上连续，则方程

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = 0$$

在 $[a,b]$ 内有且仅有一实根.

分析　利用介值定理证明方程有根，利用函数的单调性证明根的唯一性.

证　设 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续. 又 $f(x) > 0$，则 $F(a) = \displaystyle\int_b^a \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t < 0$，$F(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0$. 由介值定理知方

程 $F(x)=0$ 在$[a,b]$内有根.

又因为 $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}>0$,所以 $F(x)$ 单调递增,$F(x)$ 在$[a,b]$内有且仅有一个零点. 证毕.

【例 7】 已知 $f(x)$ 为连续函数,且$\int_0^{2x} xf(t)\mathrm{d}t+2\int_x^0 tf(2t)\mathrm{d}t=2x^3(x-1)$,求 $f(x)$ 在$[0,2]$上的最大值、最小值.

分析 本题的关键是通过对等式两端关于 x 求导给出 $f(x)$ 的表达式.

解 先化简等式得

$$x\int_0^{2x} f(t)\mathrm{d}t+2\int_x^0 tf(2t)\mathrm{d}t=2x^3(x-1).$$

上式两边对 x 求导,得

$$\int_0^{2x} f(t)\mathrm{d}t+xf(2x)\cdot 2-2xf(2x)=6x^2(x-1)+2x^3,$$

即

$$\int_0^{2x} f(t)\mathrm{d}t=8x^3-6x^2.$$

两边再对 x 求导,得

$$f(2x)=12x^2-6x.$$

令 $2x=t$,则 $f(x)=3x^2-3x$. 利用 $f'(x)=6x-3=0$,得到驻点 $x=\dfrac{1}{2}$.

又 $f(0)=0$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{4}$,$f(2)=6$,于是 $f(x)$ 在$[0,2]$上的最大值为 6,最小值为 $-\dfrac{3}{4}$.

小结 以上题目讨论了变限积分的极限、单调性、方程的根及最大(小)值等问题,这与一般的初等函数的研究方法是类似的,都是通过导数来研究函数的性质,只是求导数时需要利用变限积分的求导公式.

三、定积分计算

【例 8】 求定积分 $I=\int_{-1}^{1}(3x+|x|+1)^2\mathrm{d}x$.

分析 注意到被积函数中含有 $|x|$,因此将积分区间分为$[-1,0]$和$[0,1]$两部分,将含有绝对值符号的定积分化为不含绝对值的定积分之和.

解 原式 $=\int_{-1}^{0}(2x+1)^2\mathrm{d}x+\int_0^1(4x+1)^2\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{6}(2x+1)^3\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{12}(4x+1)^3\Big|_0^1=\frac{32}{3}.$$

【例 9】 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$.

解　原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx=2(\sqrt{2}-1).$$

小结　被积函数含有绝对值符号时，计算的基本方法是先用分段函数表示被积函数，以便去掉绝对值符号，然后利用定积分的区间可加性，分段进行计算.

【例 10】　计算$\int_{-3}^{2}\min\{2,x^2\}dx$.

解　由于在$[-3,2]$上，有

$$\min\{2,x^2\}=\begin{cases}2, & -3\leqslant x\leqslant-\sqrt{2},\\ x^2, & -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2},\\ 2, & \sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

所以

$$\int_{-3}^{2}\min\{2,x^2\}dx=\int_{-3}^{-\sqrt{2}}2dx+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}x^2dx+\int_{\sqrt{2}}^{2}2dx$$

$$=2x\Big|_{-3}^{-\sqrt{2}}+\frac{1}{3}x^3\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}+2x\Big|_{\sqrt{2}}^{2}=10-\frac{8}{3}\sqrt{2}.$$

【例 11】　计算下列积分：

(1) $\int_1^2(x^2-1)\frac{1}{\sqrt{x}}dx$　　　　(2) $\int_5^6\frac{1}{x^2+2x}dx$

分析　利用牛顿-莱布尼茨公式计算.

解　(1)（习题6.2—5(3)）原式$=\int_1^2(x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})dx=\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^2=\frac{8}{5}-\frac{2}{5}\sqrt{2}$.

(2) 原式$=\frac{1}{2}\int_5^6\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{2}[\ln|x|-\ln|x+2|]\Big|_5^6$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|\Big|_5^6=\frac{1}{2}\ln\frac{21}{20}.$$

【例 12】　**（习题 6.3—1(8)）**计算$\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{5-4x}}dx$.

解　设$\sqrt{5-4x}=t$，则$x=\frac{1}{4}(5-t^2)$，$dx=-\frac{1}{2}tdt$，且当$x=-1$时，$t=3$；$x=1$时，$t=1$. 于是

$$原式=\frac{1}{4}\int_3^1\frac{(5-t^2)}{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)tdt=\frac{1}{8}\int_1^3(5-t^2)dt=\frac{1}{8}\left(5t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^3=\frac{1}{6}.$$

【例 13】　计算$\int_0^1\frac{x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$.

解 设 $x=\sin t$,则 $dx=\cos t dt$,且当 $x=0$ 时,$t=0$;当 $x=1$ 时,$t=\frac{\pi}{2}$. 于是

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{(2-\sin^2 t)\cos t}\cdot\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 t}d(\cos t)=-\arctan(\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

【例 14】 计算 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dx}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

解 设 $x=\tan t$,则 $dx=\sec^2 t dt$,且当 $x=0$ 时,$t=0$;$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时,$t=\frac{\pi}{6}$. 于是

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{(1+5\tan^2 t)\sec t}\cdot\sec^2 t dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{\cos^2 t+5\sin^2 t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{1+4\sin^2 t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{1+(2\sin t)^2}d(2\sin t)$$

$$=\frac{1}{2}\arctan(2\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{8}.$$

【例 15】 计算 $\int_0^{\ln 3}\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

解 设 $\sqrt{e^x+1}=t$,则 $e^x=t^2-1$,$dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$,且当 $x=0$ 时,$t=\sqrt{2}$;当 $x=\ln 3$ 时,$t=2$. 于是

$$\text{原式}=\int_{\sqrt{2}}^2\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{2}}^2\frac{2}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{2}}^2\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_{\sqrt{2}}^2=\ln\frac{1}{3}-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=2\ln(\sqrt{2}+1)-\ln 3.$$

【例 16】 计算 $\int_0^1\frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx$.

解法 1 设 $e^x=t$,则 $x=\ln t$,$dx=\frac{1}{t}dt$,且当 $x=0$ 时,$t=1$;$x=1$ 时,$t=e$. 于是

$$\text{原式}=\int_1^e\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+t^{-1}}}\frac{1}{t}dt=\int_1^e\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\ln(t+\sqrt{t^2+1})\Big|_1^e=\ln\frac{e+\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}.$$

解法 2
$$\text{原式}=\int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx=\int_0^1\frac{de^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

$$=\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+1})\Big|_0^1=\ln\frac{e+\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}.$$

注 对同一积分,从凑微分和换元两种角度出发,可以得到不同的解法.下面再看几例.

【例 17】 计算$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

解法 1 设 $t=\sqrt{1+\ln x}$,则 $x=e^{t^2-1}$,$dx=2te^{t^2-1}dt$,且当 $x=1$ 时,$t=1$;$x=e$ 时,$t=\sqrt{2}$.于是

$$\text{原式}=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{e^{t^2-1}\cdot 2t}{e^{t^2-1}\cdot t}dt=\int_1^{\sqrt{2}}2dt=2t\Big|_1^{\sqrt{2}}=2(\sqrt{2}-1).$$

解法 2 $\text{原式}=\int_1^e\frac{d\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^e\frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}}=2\sqrt{1+\ln x}\Big|_1^e=2(\sqrt{2}-1).$

【例 18】 计算$\int_e^{e^6}\frac{\sqrt{3\ln x-2}}{x}dx$.

分析 先凑微分,再换元求解.

解 设 $\ln x=t$,当 $x=e$ 时,$t=1$;$x=e^6$ 时,$t=6$.于是

$$\int_e^{e^6}\frac{\sqrt{3\ln x-2}}{x}dx=\int_e^{e^6}\sqrt{3\ln x-2}\,d\ln x=\int_1^6\sqrt{3t-2}\,dt$$
$$=\frac{2}{9}(3t-2)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^6=14.$$

【例 19】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{\sqrt{2x+1}}, & x\geqslant 0,\\ e^{-x}, & x<0,\end{cases}$ 求$\int_{-1}^5 f(x-1)dx$.

分析 先换元,再分段积分.

解 $\int_{-1}^5 f(x-1)dx\xlongequal{x-1=u}\int_{-2}^4 f(u)du=\int_{-2}^0 e^{-u}du+\int_0^4\frac{u+2}{\sqrt{2u+1}}du,$

而
$$\int_{-2}^0 e^{-u}du=-e^{-u}\Big|_{-2}^0=e^2-1,$$

$$\int_0^4\frac{u+2}{\sqrt{2u+1}}du\xlongequal{\sqrt{2u+1}=t}\int_1^3\frac{\frac{1}{2}(t^2-1)+2}{t}\cdot t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^3(t^2+3)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3+3t\right)\Big|_1^3=\frac{22}{3}.$$

所以
$$\int_{-1}^5 f(x-1)dx=e^2-1+\frac{22}{3}=e^2+\frac{19}{3}.$$

【例 20】 利用函数的奇偶性计算下列积分:

(1) $\int_{-1}^1\frac{2x^3+5x+2}{\sqrt{1-x^2}}dx$