线性代数

主　编　关鲁玉
副主编　安宇芳　姜　莹

东北林業大學出版社

线 性 代 数

主　编　关鲁玉
副主编　安宇芳　姜　莹

东北林业大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/关鲁玉主编．—哈尔滨：东北林业大学出版社，2005.3
ISBN 7-81076-761-5

Ⅰ．线… Ⅱ．关… Ⅲ．线性代数-高等学校-教材 Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 076180 号

责任编辑：倪乃华
封面设计：彭 宇

NEFUP

线性代数
Xianxing Daishu
主 编 关鲁玉
副主编 安宇芳 姜 莹

东北林业大学出版社出版发行
（哈尔滨市和兴路 26 号）
哈尔滨市工大节能印刷厂印装

开本850×1168 1/32 印张6.5 字数169千字
2005 年 3 月 第 1 版 2005 年 3 月 第 1 次 印 刷
印数 1—1 000 册

ISBN 7-81076-761-5
O·77 定价：15.00元

前　　言

线性代数是理工科院校学生的一门重要基础课，它的理论方法已成为科学研究及处理工程技术各领域问题的有力工具。由于线性代数理论性强，概念抽象，教学时数又较少，因此如何科学地处理教材内容，一直是从事高等数学教学的人们研究和探索的问题。笔者通过多年的教学经验，在广泛听取了教授过线性代数的教师们意见的基础上，还编写了带有 * 号的两章，即线性空间与线性变换、矩阵理论与方法的应用，这两部分内容可供选学。

参加本书编写的有：关鲁玉（黑龙江科技学院哈尔滨嵩山校区，编写第一章、第三章、第四章、第五章、习题答案）；安宇芳（黑龙江工程学院，编写第二章）；姜莹（黑龙江工程学院，编写第六章、第七章）。其中，关鲁玉任主编，安宇芳、姜莹任副主编。

本书内容包括 n 阶行列式、矩阵、向量的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、特征值与相似矩阵。这些内容是线性代数中最主要、最基本的部分。

在内容编排上，本书力求做到科学性与通俗性相结合，由浅入深，逐步提高。同时教材配有适量的习题，教师可根据教学实际情况，布置部分习题供学生练习。

由于编者受经验和水平所限，本教材中不妥之处实属难免，恳请读者不吝指正。

编　　者

2004 年 12 月 10 日

目　　录

1　n 阶行列式

行列式是线性代数中的重要概念之一，在数学的许多分支和工程技术中有着广泛的应用。本章主要介绍 n 阶行列式的概念、性质、计算方法及利用行列式来求解一类特殊线性方程组的克拉默法则。

1.1　n 阶行列式的概念

行列式的概念起源于用消元法解线性方程组。设有二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

用加减消元法得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，方程组(1 - 1)有惟一解。

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

为了进一步讨论方程组的解与未知量的系数和常数项之间的关系，引入下面记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

并称之为二阶行列式，它表示数值 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

行列式中横排的叫做行，纵排的叫做列，数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的元素，i 为行标，j 为列标。

由上述定义得

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-a_{12}b_2, \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则方程组(1 - 1) 的解可用二阶行列式表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}\quad (D\neq 0)$$

其中，D 又称为系数行列式。

类似地，为了便于表示三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1 - 2}$$

的解，引进记号

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ & (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) \\ &\quad +a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

称为三阶行列式,其中

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

是原三阶行列式 D 中划去元素 a_{11} 所在的第一行、第一列后剩下的元素按原来顺序组成的二阶行列式,称它为元素 a_{11} 的**余子式**,记作 M_{11},即

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

类似地,记

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

并且令

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \quad (i,j = 1,2,3)$$

称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**。因此,三阶行列式也可以表示为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j}$$

而且它的值可以转化为由二阶行列式计算而得到。

利用三阶行列式的概念,当方程组(1-2)的系数行列式 $D \neq 0$ 时,它的解也可以简洁地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中,D_1,D_2,D_3 是将方程组(1-2)中的系数行列式 D 的第一、二、三列分别换成常数列得到的三阶行列式。

例1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\4 & -5 & -3\\2 & 3 & 6\end{vmatrix}$。

解 $D=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-5 & -3\\3 & 6\end{vmatrix}+(-1)\times$

$$(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & -3\\2 & 6\end{vmatrix}+0\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & -5\\2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=[-5\times6-(-3)\times3]+[4\times6-(-3)\times2]$$

$$=-30+9+24+6=9$$

引入了二阶、三阶行列式的概念之后，二元、三元线性方程组的解可以很方便地由二阶、三阶行列式表示出来，那么对于 n 元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{1-3}$$

在一定条件下它的解能否有类似的结论？这里首先要解决的问题是定义 n 阶行列式。为此我们观察方程组(1-1)、(1-2)的系数与对应的二阶、三阶行列式的元素的位置关系，暂且把记号

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\tag{1-4}$$

称为 **n 阶行列式**[简记为 $\Delta(a_{ij})$]，它由 n 行 n 列共 n^2 个元素组成。下面我们给出 n 阶行列式(1-4)的归纳法定义。

定义 1.1.1 n 阶行列式(1-4)是由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 所决定的一个数。

当 $n=2$ 时，定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

假设 $n-1$ 阶行列式已定义，则定义 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} \qquad (1-5)$$

其中 $A_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$ 是 n 阶行列式中元素 $a_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$ 的代数余子式。

显然，对任意自然数 n，由此归纳定义可求 n 阶行列式的值。特别地，当 $n=1$ 时，行列式 $|a_{11}|=a_{11}$，不能与数的绝对值相混淆。

例 2 用行列式的定义计算

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

这个行列式称为**下三角形行列式**，它的特点是当 $i<j$ 时 $a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$。

解 由行列式的定义，得

$$D = a_{11}A_{11} + 0A_{12} + \cdots + 0A_{1n}$$

A_{11} 是一个 $n-1$ 阶下三角形行列式，由定义

$$A_{11} = a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

依次类推,不难求出

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即下三角形行列式等于主对角线上的诸元素的乘积。

作为下三角形行列式的特例,主对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

例 3 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}。$$

解
$$D = a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a_{12}\cdot a_{24}(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{31} & 0 \\ 0 & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$$

例 4 证明

$$
D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}。
$$

证 由行列式的定义

$$
D=(-1)^{1+n} a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n-2} & a_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-2} & a_{nn-1} \end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{n+1}(-1)^{1+(n-1)} a_{1n} a_{2n-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{3n-2} \\ 0 & \cdots & a_{4n-3} & a_{4n-2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn-3} & a_{nn-2} \end{vmatrix}
$$

$$
=\cdots=(-1)^{n+1}(-1)^{1+(n-1)} \cdots(-1)^{1+2} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}
$$

$$
=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}
$$

此对角行列式

$$
\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n
$$

1.2 n 阶行列式的性质

利用行列式的定义计算特殊类型的行列式比较简单，但对于一般的行列式，特别是高阶行列式，计算量相当大。为简化行列式

的计算,下面我们来讨论行列式的性质。

由上节(1 - 5)式可知,n 阶行列式可表示为第一行的元素与其对应的代数余子式的乘积之和,因此,(1 - 5)式又称为行列式按第一行的展开式。事实上,行列式可按任意一行(列)展开。

定理 1.2.1 n 阶行列式等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

证明略。

推论 1.2.2 如果 n 阶行列式中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零,那么行列式就等于 a_{ij} 与其对应的代数余子式的乘积,即

$$D = a_{ij}A_{ij}$$

设 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

若把 D 中每一行元素换成同序数的列元素,则得新行列式

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 D'(或记为 D^T)为行列式 D 中转置行列式。

性质 1.2.1 行列式与它的转置行列式相等。

证明 用数学归纳法证明。

当 $n=2$ 时，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$，结论成立。

假设对 $n-1$ 阶行列式结论成立，对于 n 阶行列式 D 和 D'，分别按第一行和第一列展开，得

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nj-1} & a_{nj+1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D' = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}M'_{1j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{2j-1} & \cdots & a_{ij-1} & \cdots & a_{nj-1} \\ a_{2j+1} & \cdots & a_{ij+1} & \cdots & a_{nj+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由于 M_{1j} 和 M'_{1j} 是 $n-1$ 阶行列式，且 M'_{1j} 是 M_{1j} 的转置行列式，根据假设 $M_{1j} = M'_{1j}$，于是 $D = D'$。

性质 1.2.1 表明，行列式中行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立，反之亦然。

性质 1.2.2 互换行列式两行(列)的元素，行列式变号。

证明 用数学归纳法证明。

当 $n=2$ 时，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$，结论成立。

假设对于 $n-1$ 阶行列式结论成立，对于 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

互换 D 中的第 s 行和第 l 行，得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

分别将 D 和 D_1 按第 i 行展开($i \neq s, l$)，得

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij},$$

$$D_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}N_{ij}$$

其中 M_{ij} 和 N_{ij} 分别为 D 和 D_1 中元素 a_{ij} 的余子式，并且 N_{ij} 是由 M_{ij} 互换两行得到的 $n-1$ 阶行列式，由于归纳假设 $M_{ij} = -N_{ij}$，因此 $D = -D_1$。

通常以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 C_i 表示第 i 列，交换 i,j 两行记做 $r_i \leftrightarrow r_j$，而交换 i,j 两列记做 $C_i \leftrightarrow C_j$。

推论　行列式中有两行(列)对应元素相等，行列式的值为零。

证明 互换行列式 D 中对应元素相等的两行,则 $D = -D$,故 $D = 0$。

性质 1.2.3 行列式中某一行(列)的所有元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 将左边行列式按第 i 行展开即得。

第 i 行(列)乘以 k,记做 $kr_i(kc_i)$。

推论 1 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号外面。

推论 2 若行列式中有一行(列)的元素全为零,则行列式为零。

推论 3 若行列式中有两行(列)对应元素成比例,则行列式为零。

性质 1.2.4 若行列式中某一行(列)的元素 a_{ij} 都可分解为两元素 b_{ij} 与 c_{ij} 之和,即 $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}(j = 1,2,\cdots,n,1 \leqslant i \leqslant n)$,则该行列式可分解为相应的两个行列式之和,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$