全国高等教育自学考试教材

高等数学习题解答

下册

李茂生　龙幼娟　闵泰山　编

GAODENG SHUXUE XITI JIEDA

北京邮电大学出版社

高等数学习题解答

全国高等教育自学考试教材

高等数学习题解答

下册

李茂生　龙幼娟　闵泰山　编

北京邮电大学出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题解答(下册)/李茂生等编. －北京：北京邮电大学出版社，1999．8

全国高等教育自学考试教材

ISBN 7-5635-0376-5

Ⅰ.高 Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学－高等教育－自学考试－解题
Ⅳ.013－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 25483 号

出版发行：北京邮电大学出版社　电话：（010）62282185（发行部）

社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号　　邮编：100876

经　　销：各地新华书店经售

印　　刷：河北省高碑店市印刷厂

开　　本：850 mm×1 168 mm　1/32

印　　张：9

字　　数：223 千字

版　　次：1999 年 8 月第 1 版　1999 年 8 月第 1 次印刷

印　　数：1—5100 册

书　　号：ISBN 7-5635-0376-5/O·26

定　　价：19.00 元

目　　录

第七章　向量代数与空间解析几何

习题 7-1 ~ 7-2　见教材中答案.

习题 7-3

1. 见教材中答案.

2. 证明：$(\lambda \boldsymbol{a})_L = \lambda(\boldsymbol{a})_L$.

证明　设 $\boldsymbol{a}$ 与 L 的夹角为 γ,

$\lambda > 0$ 时，$\lambda \boldsymbol{a}$ 与 L 的夹角为 γ，由定理一知

$(\lambda \boldsymbol{a})_L = |\lambda \boldsymbol{a}| \cos\gamma = |\lambda| |\boldsymbol{a}| \cos\gamma = \lambda |\boldsymbol{a}| \cos\gamma = \lambda(\boldsymbol{a})_L$,

$\lambda < 0$ 时，$\lambda \boldsymbol{a}$ 与 L 的夹角为 $\pi - \gamma$，由定理一

$$(\lambda \boldsymbol{a})_L = |\lambda \boldsymbol{a}| \cos(\pi - \gamma) = -|\lambda| |\boldsymbol{a}| \cos\gamma = \lambda |\boldsymbol{a}| \cos\gamma = \lambda(\boldsymbol{a})_L.$$

$\lambda = 0$ 时，$(\lambda \boldsymbol{a})_L = 0$，$\lambda(\boldsymbol{a})_L = 0$.

故　$(\lambda \boldsymbol{a})_L = \lambda(\boldsymbol{a})_L$.

习题 7-4　见教材中答案.

习题 7-5

1. 证明：$P_1(1,2,3)$，$P_2(2,3,1)$，$P_3(3,1,2)$ 为等边三角形的三个顶点.

证明　显然，$\overrightarrow{P_1P_2}$，$\overrightarrow{P_1P_3}$，$\overrightarrow{P_2P_3}$ 构成一个三角形，

由两点间距离公式：

$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{6}$,

$$|\overrightarrow{P_1P_3}| = \sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{6},$$

$$|\overrightarrow{P_2P_3}| = \sqrt{(3-2)^2+(1-3)^2+(2-1)^2} = \sqrt{6},$$

故 P_1, P_2, P_3 为等边三角形的三个顶点.

2. 已知点(0,0,0),(2,0,0),(0,-4,0),(0,0,4)在同一个球面上,试求该球的半径.

解 设球面方程为$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

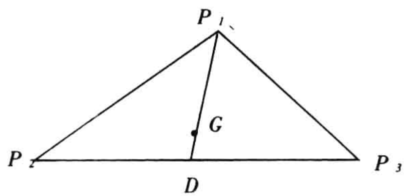
(x_0, y_0, z_0)为球心坐标,R 为半径,将 4 个点代入方程

$$\begin{cases} {x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2=R^2, \\ (2-x_0)^2+{y_0}^2+{z_0}^2=R^2, \\ {x_0}^2+(-4-y_0)^2+{z_0}^2=R^2, \\ {x_0}^2+{y_0}^2+(4-z_0)^2=R^2, \end{cases}$$

解方程组得 $x_0=1, y_0=-2, z_0=2$, 所以半径

$$R=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2}=\sqrt{1+4+4}=3.$$

3. 已知三角形的三个顶点为 $P_1(2,5,0)$, $P_2(11,3,8)$, $P_3(5,1,12)$,求三角形重心的坐标.



解 三条中线的交点 G 为三角形的重心(如图),D 为 P_2, P_3 的中点,$GD=\dfrac{1}{3}P_1D$.

由中点坐标公式得 D 的坐标为

$x=\frac{11+5}{2}=8$, $y=\frac{3+1}{2}=2$, $z=\frac{8+12}{2}=10$, 即 $D(8,2,10)$.

$\frac{P_1G}{GD}=\frac{2}{1}=\lambda$, 由定比分点公式得重心 G 的坐标

$x=\frac{2+2\times 8}{3}=6$, $y=\frac{5+2\times 2}{3}=3$, $z=\frac{0+2\times 10}{3}=\frac{20}{3}$,

即重心 $G(6,3,\frac{20}{3})$.

习题 7-6

1. 见教材第 11 页.

2. 见教材第 11 页.

3. 向量的方向余弦有什么性质? 已知一个向量的模为 3,它与 y 轴与 z 轴正向的夹角分别为 30°与 60°,问这个向量能否确定? 为什么? 如果把 60°角改为 45°角呢?

解 由性质 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 能确定此向量

由于 $\beta=30°$, $\gamma=60°$, 由上面性质

$$\cos^2\alpha=1-\cos^2 30°-\cos^2 60°=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0,\alpha=\frac{\pi}{2},$$

若将 60°角改为 45°角,则不存在这样的向量,因找不到满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2 30°+\cos^2 45°=\cos^2\alpha+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1 \text{ 的 } \alpha.$$

4. 设有向量 $\boldsymbol{a}=7\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$, 已知它的终点为(1,2,3),求起点的坐标;并求出 $\boldsymbol{a}$ 的模与它的方向余弦.

解 设起点为 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, 则

$$\boldsymbol{a}=(1-x_1)\boldsymbol{i}+(2-y_1)\boldsymbol{j}+(3-z_1)\boldsymbol{k}=7\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k},$$

$$1-x_1=7,2-y_1=-4,3-z_1=4,$$

起点 P_1 为 $(-6,6,-1)$,

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{49+16+16}=9,$$

$$\cos\alpha=\frac{7}{9},\ \cos\beta=-\frac{4}{9},\ \cos\gamma=\frac{4}{9}.$$

5. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$,试写出 $5\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 的分解式与坐标表示式.

解 $5\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(5\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+20\boldsymbol{k})-2\boldsymbol{j}+(6\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})=11\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+20\boldsymbol{k}$,

$5\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\{11,-3,20\}$.

6. 见教材中答案.

习题 7-7

1. 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$,计算:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;　(2) $\boldsymbol{b}^2$($\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$ 的简写);　(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$;

(4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$;　(5) $(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})$.

解

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6-3-10=-7$;

(2) $\boldsymbol{b}^2=9+1+4=14$;

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=25+4+9=38$;

(4) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$,

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-5+8+21=24$;

(5) $3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=9\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{k}+13\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$,

$(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})=-9-56-156=-221$.

2. 求 m 的值,使 $2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 与 $3\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 互相垂直.

解 $(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k})\cdot(3\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})=6-3m-10=0$,

故 $m=-\dfrac{4}{3}$.

3. 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 上的投影.

解 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$.

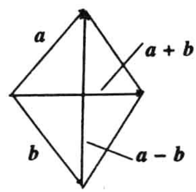
因$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\gamma =$

$|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{c}}$，（$\gamma$ 为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角）

故$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{c}} = \dfrac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|} = \dfrac{9+4+6}{\sqrt{9+16+4}} = \dfrac{19}{\sqrt{29}}$.

4. 证明:菱形的对角线互相垂直.

证明 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为菱形相邻的两条边,则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$与$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$为两条对角线,$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0$,故两条对角线互相垂直.

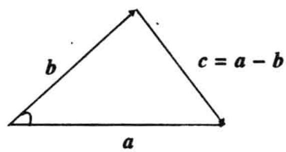


5.证明余弦定理.

证明 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为三角形的三条边,且 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(见图)

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),$$

即$|\boldsymbol{c}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} =$
$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})$,
此即为余弦定理,同理可证另外两式.



6. 如果 $\boldsymbol{a}$ 是一个给定的向量,且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,我们能否断定 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$? 为什么?

答 不能,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$,但 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 不一定为 $\boldsymbol{0}$.

7. 设有力 $\boldsymbol{F}$,它与向量 $\boldsymbol{x}$ 的夹角为$\boldsymbol{\theta}$,那么 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 方向上的分力为$\boldsymbol{F}\cos\theta$,这话对吗? 为什么?

答 不对,应为$|\boldsymbol{F}|\cos\theta\boldsymbol{x}^0\left(\boldsymbol{x}^0=\dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right)$.

8. 证明向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ 垂直.

证 $\boldsymbol{c}\cdot[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}] = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}) =$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=0.$$

所以 $\boldsymbol{c}$ 与$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ 垂直.

习题 7-8

1．见教材中答案．

2．如果 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，求 $|(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|$ 的值．

解 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k},\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=-5\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$，

$$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\5&0&-1\\0&-5&7\end{vmatrix}=-5(\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}),$$

故 $|(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})|=5\sqrt{1+49+25}=25\sqrt{3}$．

3．求与 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 所决定的平面平行且跟 $2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 垂直的单位向量．

解 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{d}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 决定的平面平行且与 $\boldsymbol{c}$ 垂直．

则 $\quad \boldsymbol{d}\perp(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),\boldsymbol{d}\perp\boldsymbol{c}$．

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&-2\\3&-2&1\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{d}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-3x-7y-5z=0,$$

$$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{c}=2x+2y-z=0.$$

求方程组 $\begin{cases}3x+7y+5z=0\\2x+2y-z=0\end{cases}$ 的非零解．

得 $\quad x=17,\ y=-13,\ z=8$．

$$\boldsymbol{d}=17\boldsymbol{i}-13\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k},\ |\boldsymbol{d}|=\sqrt{522},$$

所求向量为 $\pm\boldsymbol{d}^0=\dfrac{\pm1}{\sqrt{522}}(17\boldsymbol{i}-13\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})$．

4．证明：如果 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$，反过来是否成立？

证明 $\boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$,

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$,

$\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$,

$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$,

故 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

反过来不一定成立.如:$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{i}$ 时,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$,但 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{0}$.

习题 7-9

1. 见教材中答案.

2. 求与点(3,2,-1),(4,-3,0)等距离的点的轨迹.

解 $(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2 = (x-4)^2+(y+3)^2+z^2$,

故 $2x-10y+2z-11=0$ 为所求轨迹方程.

3. 写出球心在点(6,2,3)且通过原点的球面方程.

解 $R=\sqrt{6^2+2^2+3^2}=\sqrt{49}=7$,

方程为$(x-6)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=49$.

4. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+6y+4z-35=0$ 的图形是什么?如果将方程中的常数项 -35 分别换成 14 与 15,那么它们的图形又是什么?

解 配方将方程化成

$$(x-1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2-35-14=0,$$

即
$$(x-1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=49,$$

球心在(1,-3,-2),半径为 7 的球面.

-35 换成 14 时,方程为

$(x-1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=0$ 表示一个点(1,-3,-2).

-35 换成 15 时,方程为

$(x-1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=-1$ 表示没有任何图形的虚球面.

5. 见教材中答案.

6. 见教材中答案.

7. 见教材中答案.

8. 说出下列各方程所表示的曲面的名称,并作出它们的图形.

(1) $x^2+y^2+4z^2=4$;　　(2) $4x^2+9y^2+9z^2=36$;

(3) $2x^2+3y^2+2z^2=6$;　　(4) $x^2+y^2-2z^2=2$;

(5) $3x^2-4y^2-4z^2=12$;　　(6) $3x^2-5y^2+3z^2=15$;

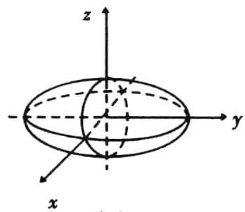
(7) $x^2+y^2=8z$.

解 (1),(2),(3)为旋转椭球面,旋转轴分别为 z,x,y 轴.

(4),(6)为单叶旋转双曲面,旋转轴分别为 z 轴,y 轴.

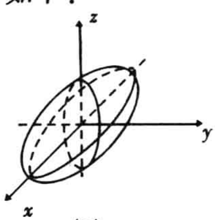
(5)双叶旋转双曲面,旋转轴为 x 轴.

(7)开口朝上旋转抛物面,z 轴为旋转轴.

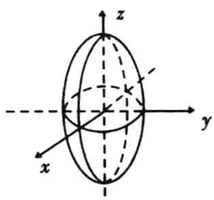


(1)

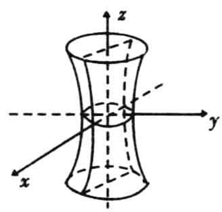
图形如下:



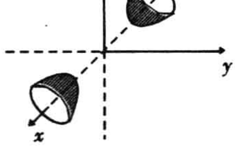
(2)



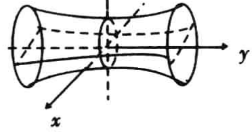
(3)



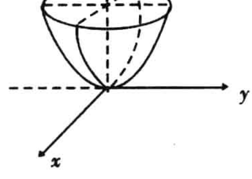
(4)



(5)



(6)



(7)

9. 一圆锥的顶点在$(0,0,a)$,轴为 z 轴,半顶角为45°,求它的方程.

解 圆锥面为 yOz 面上的曲线 $z-a=y$ 绕 z 轴旋转而成的旋转面,所以曲面方程为

$$z-a=\sqrt{x^2+y^2},$$

即

$$x^2+y^2-(z-a)^2=0.$$

10. 在 yOz 坐标面内有一半径为 a 的圆周,圆心的坐标为$(0,0,b)$且 $b>a$,绕 y 轴旋转,求旋转面的方程.

解 在 yOz 面上圆的方程为$(z-b)^2+y^2=a^2$,绕 y 轴旋转.则旋转面方程为$(\sqrt{x^2+z^2}-b)^2+y^2=a^2$.

习题 7-10

1. 写出空间直角坐标系的三条坐标轴的方程.

解 任两个坐标面的交线为一条坐标轴.

x 轴:$z=0,y=0$; y 轴:$x=0,z=0$; z 轴:$x=0,y=0$.

2. 下列各方程的图形都是某一个坐标平面上的曲线方程,如果把这些曲线看作是空间的曲线,那么它们的方程是什么?

(1) $y^2=4x$; (2) $x^2+z^2=16$;

(3) $8x^2-y^2=64$; (4) $4z^2+9y^2=36$.

解 (1) $\begin{cases}y^2=4x,\\z=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x^2+z^2=16,\\y=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}8x^2-y^2=64,\\z=0;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}4z^2+9y^2=36,\\x=0.\end{cases}$

3. 求与点$(3,7,-4)$,$(-5,7,-4)$,$(-5,1,-4)$等距离的点的轨迹.

解 设动点为(x,y,z),依题

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-7)^2+(z+4)^2=(x+5)^2+(y-7)^2+(z+4)^2,\\(x-3)^2+(y-7)^2+(z+4)^2=(x+5)^2+(y-1)^2+(z+4)^2,\\(x+5)^2+(y-7)^2+(z+4)^2=(x+5)^2+(y-1)^2+(z+4)^2,\end{cases}$$

即$\begin{cases}x=-1,\\4x+3y=8,\\y=4,\end{cases}$这三个平面相交于同一条直线.

所以动点轨迹方程为$\begin{cases}x=-1\\y=4\end{cases}$,即平面 $x=-1$ 与平面 $y=4$ 的交线.

4. 说明方程组$\begin{cases}y^2+x^2=4z\\y=4\end{cases}$表示的是怎样的曲线?

解 在平面 $y=4$ 上的一条抛物线 $z=\frac{1}{4}x^2+4$,即平面 $y=4$ 与旋转抛物面 $x^2+y^2=4z$ 的交线.

5. 求两个球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 的交线在三个坐标面上的投影曲线的方程.

解 将 $z^2=1-x^2-y^2$ 代入方程 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$,消去 z 得

$$x^2+2(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2},$$

所以 xOy 面投影曲线为

$$\begin{cases}2x^2+4(y-\frac{1}{2})^2=1,\\z=0,\end{cases}$$

将 $y^2=1-x^2-z^2$ 代入方程 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$,得

$$x^2+2(z-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2},$$

所以 xOz 面投影曲线为