

高等数学

(下)

gaodeng shuxue

◆ 主编 邓 康 严秀坤

高等数学

(下)

主编: 邓 康 严秀坤



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书共分上下两册,主要介绍了函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、二重积分与三重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数(含傅立叶技术)、常微分方程等内容。

通过学习本课程,可以培养学生的抽象思维能力、问题概括能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力,还特别注意培养学生的运算能力、运用所学知识分析和解决实际问题的能力。

本书适用于高等院校各专业的高等数学教学用书,也可作为考研、自学人员的参考用书。

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·下/邓康,严秀坤主编. —北京:北京理工大学出版社, 2009. 8

ISBN 978-7-5640-2770-4

I. 高… II. ①邓…②严… III. 高等数学-高等学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 150783 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 三河市南阳印刷有限公司

开 本 / 710 毫米×1000 毫米 1/16

印 张 / 20.25

字 数 / 385 千字

版 次 / 2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷

印 数 / 1~10000 册

定 价 / 32.00 元

责任校对/ 陈玉梅

责任印制/ 边心超

图书出现印装质量问题,本社负责调换

前 言

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的一门科学. 随着现代科学技术和数学科学的发展,“数量关系”和“空间形式”有了越来越丰富的内涵和更加广泛的外延. 数学不仅是一种工具,而且是一种思维模式;不仅是一种知识,而且是一种素养;不仅是一门科学,而且是一种文化. 数学教育在培养高素质科技人才中具有其独特的、不可替代的作用. 对于高等学校工科类专业的本科生而言,高等数学课程是一门非常重要的基础课,它内容丰富,理论严谨,应用广泛,影响深远. 不仅为学习后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的基础,而且在培养学生抽象思维、逻辑推理能力,综合利用所学知识分析问题解决问题的能力,较强的自主学习的能力,创新意识和创新能力上都具有非常重要的作用.

本教材面对高等教育大众化的现实,以教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为依据,以“必须够用”为原则确定内容和深度. 知识点的覆盖面与“基本要求”相一致,要求度上略高于“基本要求”. 本教材对基本概念的叙述清晰准确;对定理的证明简明易懂,但对难度较大的理论问题则不过分强调论证的严密性,有的仅给出结论而不加证明;对例题的选配力求典型多样,难度上层次分明,注意解题方法的总结;强调基

本运算能力的培养和理论的实际应用;注重对学生的思维能力、自学能力和创新意识的培养.

考虑到不同学校、不同专业对高等数学课程内容广度和深度的不同要求,《高等数学》作了适当的处理,以适应不同层次、不同专业的需要.

《高等数学》中存在的问题,欢迎专家、同行及读者批评指正.

编 者

目 录

第七章 向量代数与空间解析几何	1
第一节 向量及其线性运算	1
一、向量的概念	1
二、向量的线性运算	2
第二节 空间直角坐标系 向量的坐标	5
一、空间直角坐标系	5
二、空间两点间的距离	6
三、向量的坐标表示	7
四、向量的代数运算	8
五、向量的模、方向角、投影	8
第三节 数量积 向量积 *混合积	10
一、向量的数量积	10
二、向量的向量积	12
* 三、向量的混合积	15
第四节 曲面与曲线的方程	16
一、曲面的方程	16
二、曲线的方程	17
第五节 平面及其方程	18
一、平面的点法式方程	19
二、平面的一般式方程	19
三、两平面的夹角	21
第六节 空间直线及其方程	22
一、空间直线的一般方程	22
二、直线的对称式方程与参数方程	23
三、两直线的夹角	24
四、直线与平面的夹角	24
第七节 几种常见的曲面	26
一、旋转曲面	26

二、柱面	27
三、投影柱面	28
四、二次曲面	29
习题七	33
第八章 多元函数微分学及其应用	37
第一节 多元函数的基本概念	37
一、平面点集	37
二、 n 维空间	39
三、多元函数的定义	40
四、多元复合函数及隐函数	42
五、多元初等函数	42
第二节 多元函数的极限与连续性	42
一、多元函数的极限	42
二、多元函数的连续性	45
第三节 偏导数	48
一、偏导数的定义及其算法	48
二、高阶偏导数	52
第四节 全微分及其应用	54
一、全微分的概念	54
二、全微分在近似计算中的应用	59
第五节 多元复合函数的求导法则	60
一、链式法则	60
二、全微分形式的不变性	66
第六节 隐函数的求导公式	67
一、一个方程的情形	67
二、方程组的情形	71
第七节 方向导数与梯度	75
一、方向导数	75
二、梯度	78
第八节 多元函数微分学在几何中的应用	81
一、空间曲线的切线与法平面	81
二、空间曲面的切平面与法线	85

第九节 多元函数的极值	89
一、多元函数的极值	89
二、多元函数的最大值与最小值	93
三、条件极值	95
第十节 二元函数的泰勒公式	100
一、二元函数的泰勒公式	100
二、极值充分条件的证明	104
习题八	106
第九章 重积分	114
第一节 二重积分的概念与性质	114
一、引例	114
二、二重积分的定义	116
三、二重积分的性质	117
第二节 二重积分的计算	120
一、利用直角坐标计算二重积分	120
二、利用极坐标计算二重积分	128
三、二重积分的一般变量替换	133
第三节 三重积分	136
一、三重积分的概念	136
二、三重积分的计算	138
第四节 重积分的应用	148
一、曲面的面积	148
二、重心	150
三、转动惯量	153
四、引力	154
* 第五节 含参变量的积分	155
习题九	160
第十章 曲线积分与曲面积分	168
第一节 对弧长的曲线积分	168
一、引例	168
二、对弧长的曲线积分的定义与性质	169
三、对弧长的曲线积分的计算	170

第二节 对坐标的曲线积分	174
一、引例	174
二、对坐标的曲线积分的定义与性质	175
三、对坐标的曲线积分的计算	177
四、两类曲线积分之间的关系	181
第三节 格林公式及其应用	183
一、格林公式	183
二、平面曲线积分与路径无关的条件	187
第四节 对面积的曲面积分	191
一、引例	192
二、对面积的曲面积分的定义与性质	192
三、对面积的曲面积分的计算	193
第五节 对坐标的曲面积分	196
一、有向曲面	196
二、对坐标的曲面积分的定义与性质	198
三、对坐标的曲面积分的计算	200
四、两类曲面积分之间的关系	203
第六节 高斯公式 通量与散度	205
一、高斯公式	205
* 二、物理意义——通量与散量	210
第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度	211
一、斯托克斯公式	211
* 二、物理意义——环流量与旋度	215
* 三、向量微分算子	217
习题十	218
第十一章 无穷级数	223
第一节 常数项级数的概念和性质	223
一、常数项级数的概念	223
二、收敛级数的基本性质	225
* 三、柯西审敛原理	228
第二节 正项级数的审敛法	228
第三节 一般常数项级数的审敛法	236

一、交错级数收敛性判别法	236
二、绝对收敛与条件收敛	237
三、绝对收敛级数的性质	239
第四节 幂级数	242
一、函数项级数的概念	242
二、幂级数及其收敛性	243
三、幂级数的运算	248
第五节 函数展开成幂级数	251
第六节 幂级数的应用	257
一、近似计算	257
二、欧拉公式	260
* 第七节 函数项级数的一致收敛性	261
一、函数项级数的一致收敛性	261
二、一致收敛级数的基本性质	264
三、幂级数的一致收敛性	266
第八节 傅里叶级数	267
一、三角级数 三角函数系的正交性	267
二、周期函数展开成傅里叶级数	270
三、非周期函数展开成傅里叶级数	280
四、傅里叶级数的复数形式	285
习题十一	287
附录 二阶和三阶行列式简介	294
习题参考答案	298

第七章 向量代数与空间解析几何

我们知道,代数学的优越性在于推理方法的程序化.鉴于这种优越性,人们产生了用代数方法研究几何问题的思想(这是解析几何的基本思想).要用代数方法研究几何问题,就必须沟通代数与几何的联系,也就是要把数学研究的两个基本对象数和形结合、统一起来,于是,人们建立了坐标系,通过坐标系,建立起数与点的一一对应的关系,从而就可以用代数方法来研究几何问题(这是解析几何的基本内容).

正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样,空间解析几何的知识是学习多元函数微积分的基础.因此,本章先介绍向量的基本概念,在此基础上建立空间坐标系,然后利用坐标讨论向量的运算,并介绍空间解析几何的一些基本内容,为学习多元函数微积分奠定基础.

第一节 向量及其线性运算

在自然界和工程技术中经常遇到的量一般分为两类:一类是只有大小的量,如长度、质量、温度等,这一类量称为数量(或标量);另一类是既有大小又有方向的量,如力、位移、速度等,这一类量称为向量(或矢量).本节介绍向量的基本概念及其运算.

一、向量的概念

在数学上,常用有向线段来表示向量.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.以 M 为起点, N 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{MN}$, 见图 7-1. 有时也用一个黑体字母表示向量,如 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ 等. 书写时在字母上面加箭头,即写成 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}$ 等.

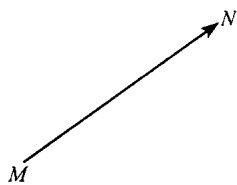


图 7-1

向量 $\mathbf{a}$ 的大小称为向量的模或长度,记为 $|\mathbf{a}|$. 模为 1 的向量称为单位向量. 模为零的向量称为零向量,记为 $\mathbf{0}$. 零向量没有确定的方向,可以认为它的方向是任意的.

在实际问题中,有些向量与它的起点有关.如质点运动的速度与该质点的位置有关,一个力与它的作用点的位置有关.有些向量与它的起点位置无关.由于向量的共性是具有大小和方向,因此,在数学上只讨论与起点无关的向量,并称这种向量为自由向量,简称向量.即只考虑向量的大小和方向这两个要素,而不关心它的

起点位置如何.

如果两个向量 a 和 b 大小相等且方向相同, 则称向量 a 和 b 相等, 记作 $a=b$. 两个相等的自由向量在空间平行移动后能够完全重合.

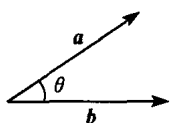


图 7-2

记两向量 a 与 b 之间的夹角为 θ (见图 7-2), 规定 $0 \leq \theta \leq \pi$. 特别地, 当 a 与 b 同向时, $\theta=0$; 当 a 与 b 反向时, $\theta=\pi$.

如果两个非零向量 a 与 b 的方向相同或相反, 就称这两个向量平行, 记作 $a \parallel b$. 由于零向量的方向是任意的, 因此可以认为零向量平行于任何向量.

当两个平行向量的起点放在同一点时, 它们的终点和公共起点应在同一条直线上. 因此, 两向量平行又称为两向量共线.

类似地, 还可引入向量共面的概念. 设有 k ($k \geq 3$) 个向量, 如果把它们起点放在同一点时, 这 k 个向量的终点和公共起点在同一个平面上, 就称这 k 个向量共面.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

设有两个向量 a 与 b , 任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB}=a$, 再以 B 为起点, 作 $\overrightarrow{BC}=b$, 连接 AC (见图 7-3), 则向量 $\overrightarrow{AC}=c$ 称为向量 a 与 b 的和, 记作 $a+b$, 即 $c=a+b$. 上述作出两向量之和的方法称为向量相加的三角形法则.

在力学上, 我们有作用在一质点上的两个力的合力的平行四边形法则, 类似地, 我们也可按如下方式定义两向量相加的平行四边形法则: 当向量 a 与 b 不平行时, 作 $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{AD}=b$, 以 AB 、 AD 为边作平行四边形 $ABCD$, 连接对角线 AC (见图 7-4), 显然向量 $\overrightarrow{AC}$ 等于向量 a 与 b 的和 $a+b$.

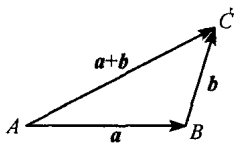


图 7-3

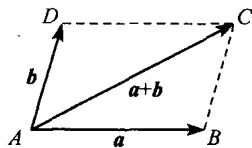


图 7-4

向量的加法满足下列运算规律:

- (1) 交换律 $a+b=b+a$;
- (2) 结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$.

对于(1), 根据向量相加的三角形法则, 由图 7-4, 有

$$a+b = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = b+a,$$

所以向量的加法满足交换律. 对于(2), 见图 7-5 所示, 先作出 $a+b$, 再将其与 c 相加, 即得和 $(a+b)+c$, 如将 a 与 $b+c$ 相加, 则得同一结果, 所以向量的加法满足结合律.

由于向量的加法满足交换律与结合律,所以 n 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 3)$ 相加可写成 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 并可按三角形法则相加如下: 使前一向量的终点作为次一向量的起点, 相继作向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 再以第一向量的起点为起点, 最后一向量的终点为终点作一向量, 这个向量即为所求的和. 见图 7-6 所示, 有

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

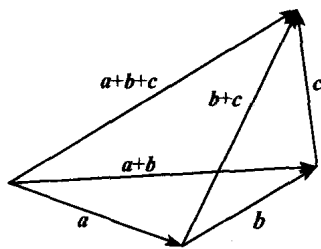


图 7-5

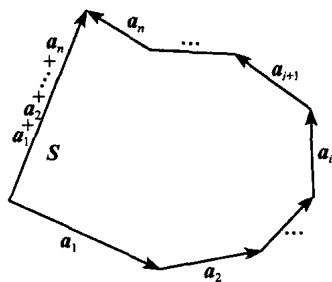
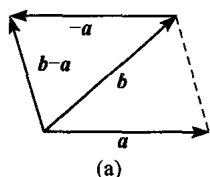


图 7-6

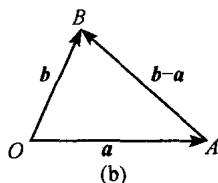
设有向量 a , 我们称与 a 的模相同而方向相反的向量为 a 的负向量, 记作 $-a$, 由此, 我们规定两个向量 b 与 a 的差

$$b - a = b + (-a).$$

上式表明, 向量 b 与 a 的差就是向量 b 与 $-a$ 的和 (见图 7-7(a)). 特别地, 当 $b = a$ 时, 有 $a - a = a + (-a) = 0$.



(a)



(b)

图 7-7

显然, 对任意向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O , 有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

因此, 若把向量 a 与 b 移到同一起点 O , 则从 a 的终点 A 向 b 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 b 与 a 的差 $b - a$ (图 7-7(b)).

2. 向量与数的乘法

设有向量 a , λ 是实数, 向量 a 与数 λ 的乘积是一个向量, 记作 λa . 规定:

- (1) $|\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|$;
- (2) 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同向; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 反向;
- (3) 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda a = 0$. 称向量 λa 为向量 a 与数 λ 的乘积, 简称数乘.

向量与数的乘法满足以下运算规律:

(1) 结合律. $\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$.

(2) 分配律.

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a;$$

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$$

(3) 交换律. $\lambda a = a\lambda$.

以上运算规律可以按向量与数的乘积定义进行证明.

向量相加及数乘向量统称为向量的线性运算.

由于向量 λa 与 a 平行, 因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系.

定理 7.1.1 设向量 $a \neq 0$, 则向量 b 平行于 a 的充分必要条件是: 存在唯一的实数 λ , 使 $b = \lambda a$.

证明 必要性. 设 $b \parallel a$, 取 $\lambda = \pm \frac{|b|}{|a|}$, 当 b 与 a 同向时 λ 取正值, 当 b 与 a 反向时 λ 取负值, 即有 $b = \lambda a$, 这是因为此时 b 与 λa 同向, 且 $|\lambda a| = |\lambda| |a| = \frac{|b|}{|a|} |a| = |b|$.

再证数 λ 的唯一性. 设 $b = \lambda a$, $b = \mu a$, 则两式相减得 $(\lambda - \mu)a = 0$, 即 $|\lambda - \mu| |a| = 0$. 因为 $|a| \neq 0$, 所以 $|\lambda - \mu| = 0$, 即 $\lambda = \mu$.

充分性是显然的.

与非零向量 a 同方向的单位向量称为向量 a 的单位向量, 记作 a° .

显然有 $a^\circ = \frac{a}{|a|}$ 或 $a = |a| a^\circ$.

这表明一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

定理 7.1.1 是建立数轴的依据. 给定一个点、一个方向及单位长度就确定一条数轴. 由于一个单位向量既确定了方向, 又确定了单位长度, 因此, 给定一个点 O (作原点) 及一个单位向量 (记做 i) 就确定了一条数轴 Ox 见图 7-8 所示, 数轴上任一点 P , 对应一向量 $\overrightarrow{OP}$.

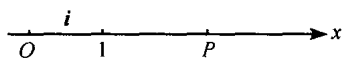


图 7-8

向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 i 共线, 由定理 7.1.1 知, 存在唯一的实数 x , 使 $\overrightarrow{OP} = xi$, 称实数 x 为数轴上有向线段 OP 的值. 这样数轴上任意一点 P 与向量 $\overrightarrow{OP}$ 及实数 x 三者就建立了一一对应关系, 点 $P \leftrightarrow \overrightarrow{OP} = xi \leftrightarrow x$, 也称实数 x 为数轴 Ox 上点 P 的坐标.

利用向量及其运算, 可以推得初等几何的许多结果.

例 7.1.1 证明三角形两边中点连线平行且等于第三边的一半.

证 见图 7-9 所示, 设 E, F 分别为 CA 与 CB 的

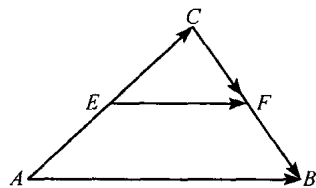


图 7-9

中点.

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AB},$$

$$\text{且 } |\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|.$$

第二节 空间直角坐标系 向量的坐标

一、空间直角坐标系

在平面解析几何中,我们建立了平面直角坐标系,并通过平面直角坐标系,把平面上的点和一对有序数组 (x, y) 对应起来,同样,为了把空间的任一点与有序数组对应起来,我们来建立空间直角坐标系.

在空间取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 i, j, k ,就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴,依次记为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴),统称坐标轴.它们构成一个空间直角坐标系,称为 $Oxyz$ 坐标系(图 7-10).通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上,而 z 轴则是铅垂线;它们的正向通常符合右手规则,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时,大拇指的指向就是 z 轴的正向,见图 7-11 所示.

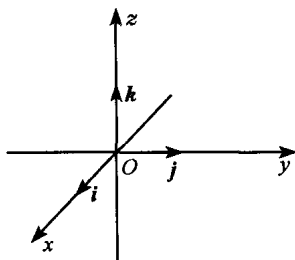


图 7-10

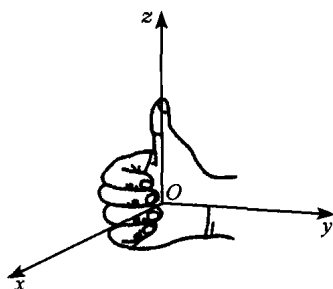


图 7-11

三条坐标轴中每两条坐标轴所在的平面 xOy 、 yOz 、 zOx 称为坐标面.三个坐标面把空间分成八个部分,每个部分称为一个卦限,共 8 个卦限.其中, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 部分为第 I 卦限,第 II、III、IV 卦限在 xOy 面的上方,按逆时针方向确定.第 V、VI、VII、VIII 卦限在 xOy 面的下方,由第 I 卦限正下方的第 V 卦限,按逆时针方向确定(图 7-12).

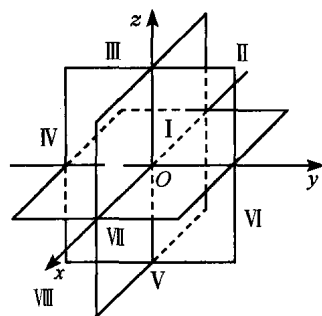


图 7-12

定义了空间直角坐标系后,就可以用一组有序实

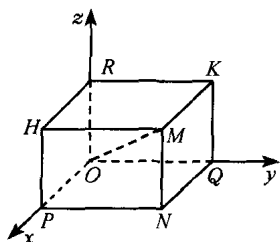


图 7-13

数组来确定空间点的位置. 设 M 为空间中任意一点(图 7-13), 过点 M 分别作垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴的平面, 它们与 x 轴、 y 轴、 z 轴分别交于 P 、 Q 、 R 三点, 这三个点在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的坐标分别为 x 、 y 、 z . 这样, 空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 x, y, z . 反之, 若给定一有序数组 x, y, z , 就可以分别在 x 轴、 y 轴、 z 轴找到坐标分别为 x 、 y 、 z 的三点 P 、 Q 、 R , 过这三点分别作垂直于

x 轴、 y 轴、 z 轴的平面, 这三个平面的交点就是由有序数组 x, y, z 所确定的唯一的点 M . 这样就建立了空间的点 M 和有序数组 x, y, z 之间的一一对应关系. 这组数 x, y, z 称为点 M 的坐标, 并依次称 x, y 和 z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标, 坐标为 x, y, z 的点 M 通常记为 $M(x, y, z)$.

坐标面和坐标轴上的点, 其坐标各有一定的特征. 例如, 在 x 轴上的点, 其纵坐标 $y=0$, 竖坐标 $z=0$, 于是, 其坐标为 $(x, 0, 0)$. 同理, y 轴上的点的坐标为 $(0, y, 0)$; z 轴上的点的坐标为 $(0, 0, z)$. xOy 面上的点的坐标为 $(x, y, 0)$; yOz 面上的点的坐标为 $(0, y, z)$; zOx 面上的点的坐标为 $(x, 0, z)$.

设点 $M(x, y, z)$ 为空间一点, 则点 M 关于坐标面 xOy 的对称点为 $A(x, y, -z)$; 关于 x 轴的对称点为 $B(x, -y, -z)$; 关于原点对称的点为 $C(-x, -y, -z)$. 掌握这些特殊位置上点的坐标的特征, 对于分析有关问题是很有好处的.

二、空间两点间的距离

在空间直角坐标系中, 任意两点都可以用它们的坐标来表示它们之间的距离.

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间直角坐标系中给定的两点, 过点 M_1 和 M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体. 见图 7-14 所示.

由于 $|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |M_2N|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |M_2N|^2$. 又因

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|PN| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|,$$

$$|M_2N| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

所以, $|M_1M_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$.

于是, 空间两点 M_1, M_2 间距离公式为

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

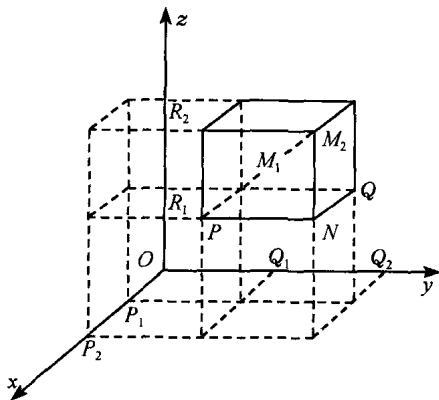


图 7-14

特别地,点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离公式为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 7.2.1 求证以三点 $A(4, 1, 9), B(10, -1, 6), C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证明

$$|AB| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$|AC| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$|BC| = \sqrt{(2-10)^2 + (4-(-1))^2 + (3-6)^2} = \sqrt{98},$$

$|AB| = |AC|$, 且 $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$, 所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

三、向量的坐标表示

确定空间直角坐标系后,就可以建立任一向量与一个三个有序数的数组之间的一一对应关系:

设有向量 r , 将该向量平移至 $\overrightarrow{OM} = r$, O 点为坐标原点, 以 OM 为对角线, 棱边在三条坐标轴的长方体 $OPNQ-RHMK$, 见图 7-15 所示, 于是

$$\begin{aligned} r = \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} \\ &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = xi + yj + zk. \end{aligned}$$

$\overrightarrow{OP} = xi, \overrightarrow{OQ} = yj, \overrightarrow{OR} = zk$ 为向量 r 的三个分向量, 记为

$$r = xi + yj + zk = (x, y, z).$$

称数组 (x, y, z) 为向量 r 的坐标, 这样, 就建立起空间的点 M , 向量 $r = \overrightarrow{OM}$ 与其坐标 (x, y, z) 之间的一一对应关系

$$M \leftrightarrow r = \overrightarrow{OM} = xi + yj + zk \leftrightarrow (x, y, z).$$

以原点为起点的向量 $r = \overrightarrow{OM}$ 又称向径, (x, y, z) 既表示点 M , 又表示向量 $\overrightarrow{OM}$. x, y, z 分别是点 M 或向量 $\overrightarrow{OM}$ 的横标、纵标、竖标.

如果在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中任意给定两点 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, 则有

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \\ &= (x_2i + y_2j + z_2k) - (x_1i + y_1j + z_1k) \\ &= (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \end{aligned}$$

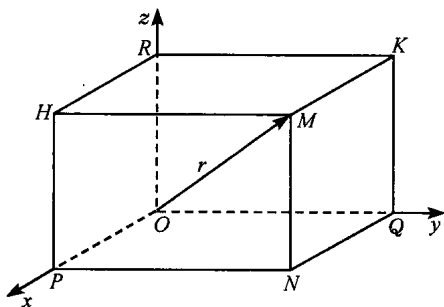


图 7-15