2004年上海大学博士学位论文 41

Chebyshev-Legendre 谱方法及其区域分裂方法

作 者：吴 华
专 业：计算数学
导 师：马和平

上海大学出版社
·上 海·

2004 年上海大学博士学位论文

Chebyshev-Legendre 谱方法及其区域分裂方法

作　者：吴　华

专　业：计算数学

导　师：马和平

上海大学出版社

· 上　海 ·

Shanghai University Doctoral Dissertation (2004)

Chebyshev-Legendre Spectral Method and its Domain Decomposition Method

Candidate: Wu hua
Major: Computational Mathematics
Supervisor: Prof. Ma He-ping

Shanghai University Press

• Shanghai •

上 海 大 学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单：

主任：	邵嘉裕	教授，同济大学数学系	200092
委员：	郭本瑜	教授，上海师范大学数学系	200234
	杨忠华	教授，上海师范大学数学系	200234
	王翼飞	教授，上海大学数学系	200444
	田红炯	教授，上海师范大学数学系	200234
导师：	马和平	教授，上海大学数学系	200444

评阅人名单：

郭本瑜	教授，上海师范大学数学系	200234
杨忠华	教授，上海师范大学数学系	200234
贺国强	教授，上海大学数学系	200444

评议人名单：

许梦杰	教授，上海大学数学系	200444
向新民	教授，上海师范大学数学系	200234
茅德康	教授，上海大学数学系	200444
徐承龙	教授，同济大学数学系	200092

答辩委员会对论文的评语

偏微分方程谱方法具有高精度的优点，已成为数值求解偏微分方程的重要方法之一。经典的谱方法存在许多局限，扩大谱方法的应用范围，设计有效、便于计算的谱格式，是这一研究领域的重要课题。吴华同学的博士学位论文在这方面做了很有意义和有价值的工作。

论文系统地讨论了单区域和多区域下Chebyshev插值算子新的逼近性质，并推广到高维情况。论文细致地分析了Legendre-Galerkin Chebyshev 配置方法(LGCC)，既保持了通常Legendre 和 Chebyshev 方法的优点，并进一步将其推广到多区域方法，把 LGCC 方法应用于 Burgers 方程、二维涡度方程、以及 N-S 方程，证明了方法的稳定性和收敛性。论文中的数值结果显示了方法的优越性。

作者的这些研究工作有创新、有难度，表明作者扎实地掌握了计算数学的基本理论和所研究领域中的系统的专门知识，较强的科学研究能力。这是一篇优秀的博士学位论文。

答辩委员会表决结果

答辩委员会一致同意通过论文答辩，并建议授予吴华同学理学博士学位。

答辩委员会主席：邵嘉裕

2004 年 6 月 8 日

摘 要

本文主要研究偏微分方程的 Chebyshe-Legendre 谱方法及其区域分裂谱方法.

我们首先较系统地介绍了 Chebyshev 插值算子在一维单区域和多区域下的不带 Chebyshev 权函数的逼近性质，以及在多维单区域和多区域下的不带 Chebyshev 权函数的逼近性质. 这些性质是 Chebyshev-Legendre 谱方法数值分析的理论基础.

接下来，针对广义发展型 Burgers 方程，我们对 Chebyshev-Legendre 耦合谱 (CL) 方法进行理论分析. 除了 Cheby-shev-Legendre 配置方法外, 我们还对 Legendre-Galerkin Chebyshev 配置 (LGCC) 方法进行分析. LGCC 方法总体上采用 Legen-dre-Galerkin 形式，但对非线性项用 Chebyshev 配置方法进行逼近. 由于结合了 Legendre 方法和 Chebyshev 方法的优点，有更大的灵活性，并且更易于推广到多区域方法中. 在 CL 方法的数值分析中，我们需要考虑 Chebyshev 插值算子按 L^2 范数意义下的稳定性和逼近性质，而不是通常的带 Chebyshev 权范数意义下的稳定性和逼近性质. 由于 Chebyshev 插值算子的性质，我们很难直接得到全离散格式的 L^2 估计，因此在数值分析中，我们将 H^1 范数估计耦合进去. 最优误差估计可通过 L^2 范数和 H^1 范数耦合得到.

然后，同样是对广义 Burgers 方程，构造 Chebyshev-Legendre

多区域谱方法格式，即在每一个子区间上运用 LGCC 方法. 数值分析方法中，我们采用类似于文 [70] 中的简洁自然的分析方法. 我们同时引入类似于文 [47]， [70] 中基函数的方法，以使得系数矩阵稀疏，并且可以并行化求解. 方法的稳定性和最优收敛率也得到证明.

在成功地将 LGCC 方法运用到一维问题中之后，我们把这种方法应用到二维涡度方程中，类似于对 Burgers 型方程的处理方法，对二维涡度方程我们给出其 LGCC 方法的离散格式，即总体上采用基本的 Legendre-Galerkin 形式，但对非线性项用 Chebyshev 配置方法进行逼近，所使用的配置点是 Chebyshev-Gauss 点. 通过适当的选取基函数，使得系数矩阵稀疏，并对算法进行描述. 对于涡度方程的 LGCC 方法我们也给出它的稳定性和收敛性分析以及数值例子.

在本文中，我们也将对于经典的方程 Navier-Stokes 方程进行相应的讨论. 我们首先构造了 Navier-Stokes 方程的一个速度与压力分离的弱形式. 具体做法如下：应用散度 - 自由函数空间将 Sobolev 空间 $[H_0^1(\Omega)]^d$ 分解为两个在 $[H_0^1(\Omega)]^d$ 中相互正交的子空间. 然后将这一分解应用于不可压缩的 Navier-Stokes 方程的速度与压力耦合的弱形式，得到了速度和压力分离的弱形式，并且利用速度函数 U 为散度 - 自由函数空间函数，将方程弱形式的非线性项进行改写. 从速度和压力分离的经改写的弱形式出发，进而构造了速度和压力分离的单区域和多区域 Chebyshev-Legendre 谱方法格式. 最后我们得到了单区域和多区域 Chebyshev-Legendre

谱格式关于速度的 L^2- 最优误差估计，同时我们对单区域和多区域方法的压力逼近也做了误差分析.

关键词：广义 Burgers 方程，涡度方程，Navier-Stokes 方程，Legendre-Galerkin Chebyshev- 配置方法，Chebyshev-Legendre 耦合方法，Chebyshev 插值算子，散度 - 自由函数空间，区域分裂方法（多区域方法）

Abstract

In this thesis, we study the Chebyshev-Legendre spectral methods and their domain decomposition methods.

First, we introduce the approximation properties of Chebyshev interpolation operator in one dimension with single domain and multi-domains in general L^2-norm, and also in several dimensions with single domain and multi-domains. These properties are essential in numerical analysis of Chebyshev-Legendre methods.

Then we analyze the Chebyshev-Legendre spectral method for the generalized Burgers equation. Besides the Chebyshev-Legendre collocation (CLC) method in [48], a Legendre Galerkin Chebyshev collocation (LGCC) scheme is presented. The LGCC scheme is basically formulated in the Legendre Galerkin form but with the nonlinear term being treated with the Chebyshev collocation method. Here the Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL) points are adopted. By combining the Galerkin and collocation methods, the scheme seems more flexible and easier to be generalized to multi-domain approaches. In numerical analysis of such methods, we need to consider the stability and approximation properties of the Chebyshev interpolation operator in L^2-norm rather than in the Chebyshev

weighted norm. Also, due to the property of the Chebyshev interpolation operator, we find that it is difficult to get the desired L^2-estimate directly for our fully discrete scheme. This is why an H^1-estimate is involved in analysis. Optimal convergence rate of the methods is obtained through combining L^2-and H^1-estimates.

Next we apply a multi-domain Legendre Galerkin Chebyshev collocation (MLGCC) method to the Burgers equation. That means the LGCC methods are applied on all the subintervals. We also introduce appropriate base functions as in [47] and [70] so that the matrix of the system is sparse and the problem in each subinterval can be solved efficiently and in parallel. The stability and the optimal rate of convergence of the method are proved. Numerical results are given for both single domain and multi-domain methods to make a comparison.

After applying the Chebyshev-Legendre method to the one-dimensional problems, we also treat two-dimensional vorticity equations with LGCC methods. Similar to the Burgers equation, we give the discrete schemes for the vorticity equations. That is basically formulated in the Legendre Galerkin form but the nonlinear terms are interpolated by Chebyshev collocation methods at Chebyshev-Gauss points.We take proper base functions to make the coefficient matrix sparse and also describe the algorithm. Then we give the optimal error estimates and numerical examples.

At last, we study the Chebyshev-Legendre methods for the two-dimensional Navier-Stokes equations. We first construct a weak form that the velocity and pressure are decoupled. We do this as following: Separate the Sobolev space $H_0^1(\Omega)$ into two spaces (the divergence-free functions space V_{div} and its orthogonal complement space $V_{\text{div}}^{\perp}$ which are orthogonal each other). By utilizing the separation of the space H_0^1, we can get the weak form of Navier-Stokes equations that the velocity and pressure are decoupled. For the velocity functions are belong to the divergence-free functions space, we also can get the weak forms with a modified nonlinear terms. Then we construct the Chebyshev-Legendre spectral schemes at single domain and multi-domains from the modified weak forms. At the end we can get the optimal error estimates for the velocity of the method with the single domain and multi-domains. We also analyze the estimate for the pressure at single domain and multi-domains.

Keywords: generalized Burgers equation, vorticity equation, Navier-Stokes equation, Legendre-Galerkin Chebyshev-collocation method, Chebyshev-Legendre method, Chebyshev interpolation operator, divergence-free function space, domain decompostion method(multi-domain method)

目 录

第一章 引言

1.1 谱方法介绍

谱方法作为数值求解微分方程的一种手段，在最近二、三十年里获得了迅速的发展. 实际上，追溯谱方法的产生历史，应该说早在 1820 年就出现了谱方法的雏形. 然而，谱方法的使用却没有很好地得到推广和发展，其中一个非常重要的原因就是计算量太大. 随着计算机技术的广泛应用， 1965 年快速 Fourier 变换的出现才真正推动了谱方法的迅速发展. 1971 年 Orszag[1] 提出了以三角多项式作为基函数求解不可压缩流问题的谱方法和拟谱方法，并描述了如何借助 FFT 来有效的实施谱方法. 接着，谱方法很快被广泛应用于计算各种实际问题. 例如，大气扩散问题 [2], 海洋问题 [3], 流体力学中湍流理论研究 [4,5], 非线性波及孤立子的计算和研究 [6–10], 分子动力学计算 [11] 等等.

目前，谱方法已经和差分法、有限元法一起成为数值求解实际问题中偏微分方程的重要工具 [12–14]. 同时, 随着实际应用的推广, 谱方法的数值分析理论也越来越丰富和完善. 较早的系统地介绍谱方法理论及应用的著作是 Gottlieb 和 Orszag 的 [15] 对 1977 年以前谱方法的数值分析理论及应用情况作了总结，并着重进行