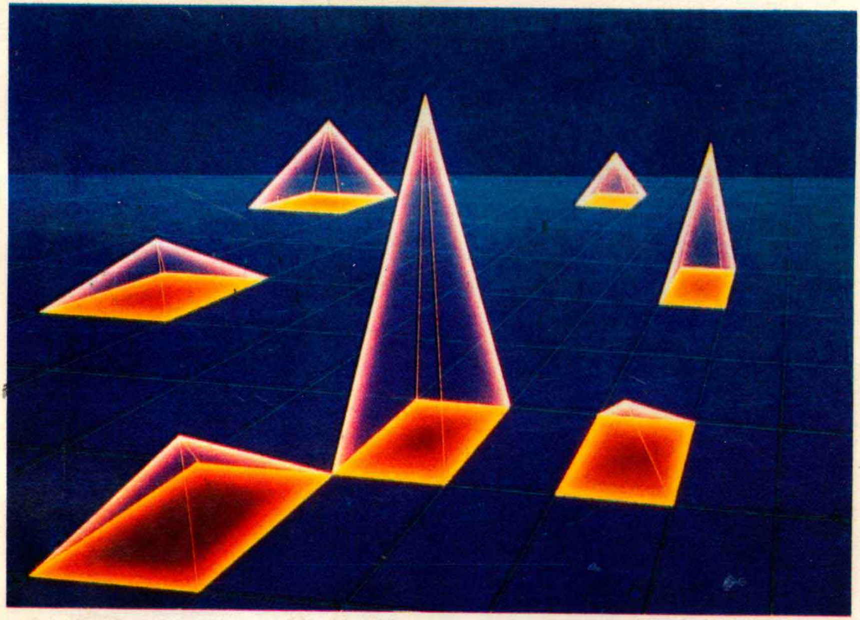
数理化一题多解丛书



黄东坡 编

初中数学一题多解

湖北教育出版社

数理化一题多解丛书

初中数学一题多解

黄东坡 编

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目（CIP）数据

初中数学一题多解/黄东坡编．—武汉：湖北教育出版社，1995

（数理化一题多解丛书）

ISBN 7-5351-1719-8

Ⅰ．初…

Ⅱ．黄…

Ⅲ．数学课-初中-解题

Ⅳ．G634．605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（95）第 04161 号

湖北教育出版社出版、发行

（430022·武汉市解放大道新育村 63 号）

新华书店经销

湖北教育出版社印刷厂印刷

（433100·潜江市环城路 62 号）

*

787×1092 毫米 32 开本　10.25 印张 230 000 字

1995 年 8 月第 1 版　　1995 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—10 000

ISBN7—5351—1719—8/G·1404

定　价：8.90 元

说　明

学好中学数理化基础知识，提高分析问题和解决问题的能力，养成探索、思维的习惯，培养富有科学创造性的人才，是中学教学的一项重要任务，而提高数理化解题能力则是实现上述任务的一种必不可少的手段.我们在这种思想的指导下，根据现行中学教学大纲和教材的要求，编写了这套《数理化一题多解丛书》.

本册《初中数学一题多解》为这套丛书之一种，它以初中数学教学大纲为准绳，在分析课本经典题、近年来全国各地中考题、竞赛题的基础上，精选出一百多道典型题编写而成.在不脱离现有初中数学知识的前提下，尽可能给出每道题的多种解法，并在一些题的解法后对解法的繁简、涉及到的知识与解题方法给出画龙点睛式的评注.

本书可作为初中学生开阔思路的课外读物，亦可作为教师备课选题的资料.

鉴于编者能力有限，加上时间仓促，错误之处在所难免，敬请读者不吝指正.

黄东坡

1994 年 7 月于

武昌水果湖中学

目　录

一、实数概念

[题解导引] 实数是代数的基础与出发点．有理数、无理数、数轴、绝对值、非负数等概念是实数中重要概念，在解题中应用较为广泛．巧用整数的奇偶性与整除性、用字母表示数、对字母赋值、善用数轴是解决实数问题的重要技巧．

1．求证：对于任意自然数 n，数 $2n^3+3n^2+n$ 一定能被 6 整除．

[证一] $2n^3+3n^2+n=n(2n^2+3n+1)=n(n+1)(2n+1)$

因为 $n(n+1)$ 是两个连续自然数的乘积，所以 $n(n+1)$ 能被 2 整除，即原数能被 2 整除．

又因为

$$n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{4}\cdot 2n(2n+1)(2n+2)$$

而 $2n,2n+1,2n+2$ 为三个连续的自然数，其中必有一个是 3 的倍数，且 $(3,4)=1$，所以，$\frac{1}{4}\cdot 2n(2n+1)\cdot(2n+2)$ 能被 3 整除，即原数能被 3 整除．

综上可知，对于任意自然数 n，数 $2n^3+3n^2+n$ 一定能被 6 整除．

[证二] $2n^3+3n^2+n=n(n+1)(2n+1)$

因为当 $n=2k$ 时，n 能被 2 整除；当 $n=2k+1$ 时，$n+1=2(k+1)$ 能被 2 整除（k 为自然数）．所以 $n(n+1)(2n+1)$ 能被 2 整除．

又因为当 $n=3k$ 时，n 能被 3 整除；当 $n=3k+1$ 时，$2n+1=2(3k+1)+1=3(2k+1)$ 能被 3 整除（k 为自然数）. 所以 $n(n+1)(2n+1)$ 能被 3 整除.

综上可知，对于任意自然数 n，数 $2n^3+3n^2+n$ 一定能被 6 整除.

[**证三**]　$2n^3+3n^2+n=n(n+1)(2n+1)$

$$=n(n+1)[(2n+4)-3]$$
$$=2n(n+1)(n+2)-3n(n+1)$$

由于任意两个连续自然数中必有一个是偶数，任意三个连续自然数中必有一个是 2 的倍数、一个是 3 的倍数，所以 $2n(n+1)(n+2)$，$3n(n+1)$ 都能被 6 整除，数 $2n(n+1)(n+2)-3n(n+1)$ 一定能被 6 整除.

即对于任意自然数 n，数 $2n^3+3n^2+n$ 一定能被 6 整除.

2. 证明 $53^{53}-33^{33}$ 能被 10 整除.

[**思路**]　利用因式分解证.

[**证一**]

$$53^{53}-33^{33}$$
$$=(53-33)(53^{52}+53^{51}\cdot 33+53^{50}\cdot 33^2+\cdots+33^{52})$$
$$=20(53^{52}+53^{51}\cdot 33+53^{50}\cdot 33^2+\cdots+33^{52})$$

因为 20 能被 10 整除，所以 $53^{53}-33^{33}$ 能被 10 整除.

[**思路**]　利用数的整除性质证.

[**证二**]

因为　$53=4\times 13+1$　$33=4\times 8+1$.

所以 53^{53}，33^{33} 的末位数字与 53，33 的末位数字相同，都是 3. 所以 $53^{53}-33^{33}$ 的末位数字是 0. 故 $53^{53}-33^{33}$ 能被 10 整除.

3. 满足等式 $1984\cdot x-1983\cdot y=1985$ 的一组自然数是（　　）.

(A) $x=22783, y=22796$　　　(B) $x=22784, y=22790$

(C) $x=27764, y=27777$　　　(D) $x=27763, y=27785$

[解一] 将(A)、(B)、(C)、(D)分别代入等式左边，经计算只有

$$1985\times27764-1983\times27777=1985$$

所以应选(C).

[解二] 将(A)、(B)、(C)、(D)代入原等式.

左边的个位数字分别是4(由 $84\times3-3\times6$ 得到)，6(由 $4\times4-3\times6$ 得到)，5(由 $84\times4-3\times7$ 得到)，7(由 $84\times3-3\times5$ 得到)，而右边的个位数字是5，可见(A)、(B)、(D)均不合要求.

所以应选(C).

[解三] 原等式 $1984\cdot x-1983\cdot y=1985$ 中，右边是奇数，而 $1984\cdot x$ 一定是偶数，所以 $1983\cdot y$ 必须是奇数，从而 y 必须是奇数，于是(A)、(B)可以排除，在余下的答案中按[解二]检验，可知(C)符合要求.

所以应选(C).

[评注] 由于所给的数据较大，计算量大，解法一繁琐. 而解法二对个位数字进行分析、解法三对数的奇偶性进行分析，避免了大量计算，解题过程较为简洁.

4. 求证：1989^2+1990 不是完全平方数.

[证一] $\because$ $1989^2<1989^2+1990<1989^2+2\times1989+1$

$$=(1989+1)^2$$

而 1989^2 和 1990^2 是两个连续完全平方数，所以 1989^2+1990 不是一个完全平方数.

[证二] 设 $1989=x$

则 $1989^2+1990=x^2+x+1$

因为二次三项式 x^2+x+1 的判别式

$$\Delta=1^2-4\times1\neq0$$

所以 1989^2+1990 不是完全平方数.

[**证三**] (用反证法证)

由于 1989^2 是奇数,而 1990 是偶数,所以 1989^2+1990 必是一个奇数.

设 $1989^2+1990=(2k+1)^2$ (k 为整数)

则 $1989^2+1990=4k^2+4k+1$

$1989^2+1989=4k(k+1)$

$1989(1989+1)=4k(k+1)$

$1989\times1990=4k(k+1)$

因为 $k(k+1)$ 为两个连续整数的乘积,必是 2 的倍数,所以 $4k(k+1)$ 一定能被 8 整除.

但 1990 不能被 8 整除,所以原假设不成立.

故 1989^2+1990 不是完全平方数.

5. 求一个正整数 P,使它的一半是一个完全平方数,它的 $\frac{1}{3}$ 是一个立方数,它的 $\frac{1}{5}$ 是一个五次方数.

[**解一**] 设 $P=2m^2=3n^2=5k^5$ (m,n,k 均为正整数).

由于 $P=2m^2$ 的一半是一个完全平方数,所以 P 中含 2 的最低次幂 2^3.

由于 $P=3n^3$ 的 $\frac{1}{3}$ 是一个方立数,所以 P 中含 3 的最低次幂 3^4.

由于 $P=5k^5$ 的 $\frac{1}{5}$ 是一个五次方数,所以 P 中含 5 的最低次幂是 5^6.

所以要同时满足 P 的一半是一个完全平方数,P 的 $\frac{1}{3}$ 是一

个立方数，P 的$\frac{1}{5}$是一个五次方数，这样的最小正整数是

$$P=2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^{6}$$

经检验知 $2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^{6}$ 是所求的数.

［解二］ 由于 P 的$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{5}$皆为整数，所以 P 定能被 2，3，5 整除.

设 $P=2^{a}\cdot 3^{b}\cdot 5^{c}$（$a$、$b$、$c$ 都不为 0）

因为$\frac{P}{2}=2^{a-1}\cdot 3^{b}\cdot 5^{c}$ 为平方数，所以 $a-1$，b，c 必为偶数；

因为$\frac{P}{3}=2^{a}\cdot 3^{b-1}\cdot 5^{c}$ 为立方数，所以 a，$b-1$，c 必为 3 的倍数；

因为$\frac{P}{5}=2^{a}\cdot 3^{b}\cdot 5^{c-1}$ 为五次立方数，所以 a，b，$c-1$ 必为 5 的倍数.

从而易知，a 为 3 的倍数又为 5 的倍数，a 的最小值为 15，$15-1=14$ 又为偶数；b 既为偶数又为 5 的倍数，b 的最小值为 10，$10-1=9$ 为 3 的倍数；c 既为偶数又为 3 的倍数，c 的最小值是 6，$6-1=5$ 为 5 的倍数.

所以所求 P 的最小值应为 $2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^{6}$.

6. 已知有理数 a，b 满足 $a>0$，$b<0$，$|a|<|b|$，则 a，b，$-a$，$-b$ 的大小顺序是__________.（用"$>$"号连接）

［解一］ 令 $a=1$，$b=-2$

则 $-a=-1$，$-b=-(-2)=2$

$\because$ $2>1>-1>-2$

$\therefore$ $-b>a>-a>b$

［解二］ 依题意，画数轴如图 1—1 所示.

从数轴上知

$$-b>a>-a>b$$

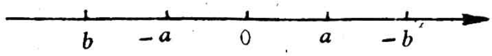


图 1—1

[**解三**]　由 $a>0, b<0$，得　$a>-a, a>b$

由　$b<0, |a|<|b|$

得　$-b>a$

$\therefore$　$-b>a>-a>b$

[**评注**]　本题是有理数大小比较问题. 解法一为赋值法，字母表示数是代数的特点，但字母具有抽象性，所以在条件允许的范围内赋予字母具体的数值常能化难为易，但此法有一定局限性，一般适用于填空题、选择题. 解法二借助数轴、绝对值等概念，形象而直观.

7. 若 $A=\dfrac{5678901234}{6789012345}$，$B=\dfrac{5678901235}{6789012347}$，试比较 A 与 B 的大小.

[**解一**]　设 $A=\dfrac{x}{y}$，则 $B=\dfrac{x+1}{y+2}$

$$\frac{x}{y}-\frac{x+1}{y+2}=\frac{x(y+2)-(x+1)y}{y(y+2)}=\frac{2x-y}{y(y+2)}$$

$\because$　$2x>y, y>0$

$\therefore$　$\dfrac{2x-y}{y(y+2)}>0$

即　$\dfrac{x}{y}-\dfrac{x+1}{y+2}>0$

$\therefore$　$A-B>0$，即　$A>B$

[**解二**]　设 $A=\dfrac{x}{y}$，$B=\dfrac{x+1}{y+2}$

$$\frac{x}{y}\Big/\frac{x+1}{y+2}=\frac{x(y+2)}{y(x+1)}=\frac{xy+2x}{xy+y}$$

$\because$　$2x>y$

$\therefore\quad xy+2x>xy+y$

$\therefore\quad \dfrac{xy+2x}{xy+y}>1$

即 $\quad \dfrac{x}{y}\Big/\dfrac{x+1}{y+2}>1$

$\therefore\quad \dfrac{A}{B}>1$，即 $\quad A>B$

［评注］ 解法一是通过作差来比较 A 与 B 的大小，解法二是通过作商来比较 A 与 B 的大小．作差法、作商法是比较实数大小的常用方法，两种解法都恰当地用字母表示数，避免了繁琐的计算，充分体现了代数的风格与特点．

8. $P=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n\text{个}}-\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}}}$，则（　　）．（$n$ 为自然数）

(A) P 为无理数　　　　(B) $P=\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}$

(C) $P=\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}}$　　　　(D) $P=\underbrace{33\cdots3}_{n\text{个}}$

［思路］ 用赋值法解．

［解一］

取 $n=1$ 时，$P=\sqrt{11-2}=\sqrt{9}=3$

取 $n=2$ 时，$P=\sqrt{1111-22}=\sqrt{1089}=33$

由于 n 具有一般性，而正确的答案唯一，所以应选 (D)．

［思路］ 用推理方法解．

［解二］

$$\underbrace{11\cdots1}_{2n\text{个}}-\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}}=\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\times10^n+\underbrace{111\cdots1}_{n\text{个}}-2\times\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}$$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\times10^n-\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}=\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\times(10^n-1)$$

$=\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\times\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}}=\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\times\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}\times9$

$=9\times(\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}})^2$

$\therefore\quad P=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n\text{个}}-\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}}}=\sqrt{9\times(\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}})^2}=3\times\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}$

$=\underbrace{33\cdots3}_{n\text{个}}$

故应选(D).

9. 已知$\sqrt{1984}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$且$0<x<y$,则满足此关系的不同的整数对$(x,y)$的个数为(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)3　　(D)4　　(E)7

[**解一**]　由已知易得　$0<x<1984$

$\because\quad \sqrt{1984}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$\therefore\quad \sqrt{y}=\sqrt{1984}-\sqrt{x}$

两边平方,得

$$y=1984+x-2\sqrt{1984\cdot x}$$

因为y是整数,所以$1984\cdot x$必为完全平方数.

又　$1984=2^6\times31$,所以x具有$31t^2$的形式.(t为整数)

于是　$31t^2<1984$

$\therefore\quad t^2<2^6$,即　$|t|<2^3$

因此有　$1\leqslant|t|\leqslant7$

当$|t|=1,2,3$时,得$x=31,124,279$,对应的$y=1519$,1116,775满足条件$0<x<y$.

当$|t|\geqslant4$时,有$y\leqslant x$,不合题意.

所以不同整数对的个数是3.故应选(C).

［解二］ ∵ $1984=2^5\times31$

∴ $8\sqrt{31}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

由此可知，x 必具有 $31t^2$ 形式，y 必具有 $31k^2$ 形式，且 $t+k=8$（t,k 均为正整数）.

∵ $0<x<y$

∴ $t<k$

当 $t=1,k=7$ 时，$(x,y)=(31,1519)$

当 $t=2,k=6$ 时，$(x,y)=(124,1116)$

当 $t=3,k=5$ 时，$(x,y)=(279,775)$

所以不同的整数对的个数为 3，故应选(C).

［解三］ 直接将 $\sqrt{1984}$ 分解为 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 形式.

∵ $\sqrt{1984}=2^5\times31$ $(0<x<y)$

∴ $\sqrt{1984}=8\sqrt{31}=\sqrt{31}+7\sqrt{31}=\sqrt{31}+\sqrt{1519}$

$\sqrt{1984}=8\sqrt{31}=2\sqrt{31}+6\sqrt{31}=\sqrt{124}+\sqrt{1116}$

$\sqrt{1984}=8\sqrt{31}=3\sqrt{31}+5\sqrt{31}=\sqrt{219}+\sqrt{775}$

所以不同的整数对的个数为 3，故应选(C).

10. 已知实数 a、b、c 满足等式 $a=6-b$，$c^2=ab-9$，求 a、b 的值.

［解一］ 把 $a=6-b$ 代入 $c^2=ab-9$ 中，得

$c^2=(6-b)\cdot b-9=-b^2+6b-9=-(b-3)^2$

∵ $c^2\geqslant0$

∴ $-(b-3)^2\geqslant0$

而 $-(b-3)^2\leqslant0$

∴ $(b-3)^2=0$

于是得 $b=3$

此时，$c^2=0$，即 $c=0$

又 $a=6-b=6-3=3$

故 $a=3, b=3, c=0$ 为所求.

［**解二**］ 把 $a=6-b$ 代入 $c^2=ab-9$,得

$$c^2=(6-b)b-9=-(b-3)^2$$

$\therefore \quad c^2+(b-3)^2=0$

$\because \quad c^2\geqslant 0, (b-3)^2\geqslant 0$

$\therefore \quad c^2=0, (b-3)^2=0$ 即 $c=0, b-3=0$

于是得 $c=0, b=3$

$\therefore \quad a=6-b=6-3=3$

故 $a=3, b=3, c=0$ 为所求.

［**解三**］ 由已知 $a+b=6, ab=c^2+9$,所以 a,b 可看作是方程

$$t^2-6t+(c^2+9)=0$$

的两个实根.

因为 a,b 为实数,所以

$$\Delta=(-6)^2-4(c^2+9)=-4c^2\geqslant 0$$

又 $c^2\geqslant 0$

$\therefore \quad c^2=0$

即 $c=0$

于是方程 $t^2-6t+9=0$ 有两个相等实根.

$\therefore \quad a=b=3$

故 $a=3, b=3, c=0$ 为所求.

［**解四**］ 设 $a=3+m, b=3-m$ (m 为实数),于是

$$ab=(3+m)(3-m)=9-m^2\leqslant 9$$

又由 $ab-9=c^2\geqslant 0$ 可知 $ab\geqslant 9$

$\therefore \quad ab=9$

又 $a+b=6$

$\therefore \quad a=b=3$

$\therefore \quad c^2=ab-9=0$,即 $\quad c=0$

故 $a=3, b=3, c=0$ 为所求.

[**评注**] 非负数是一个在解题中应用极为广泛的重要概念.以上各种解法中,都充分运用了非负数概念及其性质,其特点是由不等导等.

11. 如果$\{a\}$表示大于 a 的最小整数,如$\{2.5\}=3$,$\{4\}=5$,$\{-1.5\}=-1$,用$[a]$表示不大于 a 的最大整数,如$[2.5]=2$,$[4]=4$,$[-1.5]=-2$,那么方程组

$$\begin{cases}3[x]+2\{y\}=18\\3\{x\}-[y]=4\end{cases}$$

的解是(　　).

(A) $\begin{cases}2<x\leqslant 3\\5\leqslant y<6\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2\leqslant x<3\\5<y\leqslant 6\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2\leqslant x<3\\5\leqslant y<6\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2<x\leqslant 3\\5<y\leqslant 6\end{cases}$

[**思路**] 用代入筛选法解.

[**解一**] 对于(A),取 $x=3$,$y=5.5$,则$[x]=3$,$\{y\}=6$,此时 $3[x]+2\{y\}=3\times 3+2\times 6=21\neq 18$,所以不能选(A).

对于(B),取 $x=2.5$,$y=6$,则$\{x\}=3$,$[y]=6$,此时 $3\{x\}-[y]=3\times 3-6=3\neq 4$,所以不能选(B).

对于(C),$2\leqslant x<3$,$5\leqslant y<6$,则$[x]=2$,$\{x\}=3$,$[y]=5$,$\{y\}=6$,代入有

$$3[x]+2\{y\}=3\times 2+2\times 6=18$$

$$3\{x\}-[y]=3\times 3-5=4$$

故应选(C).

[**思路**] 应用$\{a\}$、$[a]$的性质解.

[**解二**]

将$\{x\}=[x]+1$,$\{y\}=[y]+1$ 代入方程组得

$$\begin{cases}3[x]+2[y]+2=18\\3[x]+3-[y]=4\end{cases}$$

解之，得

$[x]=2,[y]=5$

$\therefore\quad 2\leqslant x<3, 5\leqslant y<6$

故应选(C).

12. 将正方形 $ABCD$ 分割为 n^2 个相等的小方格(n 为自然数)，把相对的顶点 A,C 染成红色，把 B,D 染成蓝色，其它交点任意染成红、蓝两色中的一种颜色. 证明：恰有三个顶点同色的小方格的数目必是偶数. (1991 **年全国初中数学联赛试题**)

[**证一**] 用数代表颜色，将红色记为 0，蓝色记为 1，再将小方格编号，记为 $1,2,3,\cdots,n^2$.

又记第 i 个小方格四个数字之和为 A_i，若恰有三个顶点同色，则 $A_i=1$ 或 $A_i=3$，即 A_i 为奇数，否则 A_i 为偶数.

在 $A_1+A_2+\cdots+A_{n^2}$ 中，有如下事实：

对正方形内部的交点各加了 4 次；原正方形边上非端点的交点各加了 2 次；对原正方形的四个顶点各加 1 次(含两个 0，两个 1).

因此，$A_1+A_2+\cdots+A_{n^2}=4\times$(内部交点相应的数字之和)$+2\times$(边上非端点相应的数字之和)$+2$，必为偶数.

于是，在 $A_1,A_2,\cdots,A_{n^2}$ 中必有偶数个奇数，这就是说，恰有三个顶点相同的小方格有偶数个.

[**证二**] 用数代表颜色，红色记为 1，蓝色记为 -1，将小方格编号，记为 $1,2,3,\cdots,n^2$，记第 i 个小方格四个顶点数字之和为 A_i，若恰有三个顶点同色，则 $A_i=-1$，否则 $A_i=1$.

现在考虑乘积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_{n^2}$，对正方形内部交点相应数重复出现 4 次，边上的不是端点的交点相应的数各出现 2 次，