

二十一世纪高职高专规划教材

建筑工程计价数学基础

主编 孔亚仙 徐仁旭



JIANZHUGONGCHENGJJIASHUXUEJICHU

湖南师范大学出版社

二十一世纪高职高专规划教材

建筑工程计价数学基础

主编 孔亚仙 徐仁旭

JIANZHUGONGCHENGJIJIASHUXUEJICHU

常州大学图书馆
藏书章

湖南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

建筑工程计价数学基础 / 孔亚仙, 徐仁旭主编. —长沙: 湖南师范大学出版社, 2011. 6
ISBN 978 - 7 - 5648 - 0575 - 5

I. ①建… II. ①孔…②徐… III. ①建筑 - 数学 - 计价数学

IV. ①B844. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 001668 号

建筑工程计价数学基础

主编: 孔亚仙 徐仁旭

◇全程策划: 刘 伟

◇组稿编辑: 李小金

◇责任编辑: 蒋旭东

◇责任校对: 胡亚兰

◇出版发行: 湖南师范大学出版社

地址/长沙市岳麓山 邮编/410081

电话/0731. 88853867 88872751 传真/0731. 88872636

网址/http: //press. hunnu. edu. cn

◇经销: 全国新华书店 北京志远思博文化有限公司

◇印刷: 北京百善印刷厂

◇开本: 787 × 1092 1/16

◇印张: 11

◇字数: 450 千字

◇版次: 2011 年 6 月第 1 版 2011 年 6 月第 1 次印刷

◇书号: ISBN 978 - 7 - 5648 - 0575 - 5

◇定价: 28.00 元

高等院校教育

教材研究与编审委员会

主 任: 陈德怀

常务委员: 胡宝华 李 雷 潘力锐 龚 波
夏 巍 丽 平 刘铁明 朱志峰

委 员: (排名不分先后)

江 敏	吴志全	刘庚碧	邓有林	朱长元
黄 海	韩丽莎	刘仁芬	张叶栩	刘志东
阳 源	初秀伟	李以渝	刘建国	徐春桥
禹利萍	周启胜	万智勇	李建宁	熊 婷
刘 涛	高 进	吴志明	郑 晖	叶春辉
李裕民	夏洁云	吴立炎	黄伟祥	钟建坤
喻凤生	侯德宏	武怀军	赵锦权	冯国敏
吴士田	彭继玲	李友云	蔡映红	郑明娥
陈灵仙	丁良南	刘 永	张洪雷	绳传冬
杨中纲	李庆东	田 嘉	李丰雪	张 华
赵海燕	王 军	郭伟伟	刁 俊	吴 坤
郑 涛	杨 耘	齐振东	顾美君	陈华平
张宏旭	姜胜中	霍义平	李志敏	诺 敏
龚云平	李 梅	沈易娟	袁 芬	魏 宁
郑 聪	刘 延	汤伟光	张海彬	李 霞
王志强	彭晓娟	那仁图亚		

前 言

根据教育部、财政部关于建立“国家示范性高等职业院校建设计划”骨干高职院校相关文件精神，在高职院校工学结合的大背景下，结合浙江建设职业技术学院建筑经济管理类专业的课程改革，作了认真的调查、分析、研究，并参考专业老师的建议。我们对在适用多年的教材《应用高等数学》进行了较大幅度的修改，力求完善，编写完成此教材《建筑工程计价数学基础》。

本教材的内容可分为，初等数学、一元函数微积分、概率统计三部分。其中初等数学重点结合建筑工程经济管理类专业的需求，安排三角函数、三角形、面积、体积的计算。一元函数微积分内容包含函数的极限、导数及其应用、积分及其应用。概率统计部分内容包含概率论和数理统计。

本书在编写过程中，力求体现以下特点：

1) 适合高职高专学生使用。针对高职学生的学习特点，对教学内容予以不同程度的精简与优化。对定理、性质等以解释清楚为度，不追求理论上的严密性与系统性。在淡化理论的同时也适度考虑一些必要的证明，意在培养学生必要的逻辑推理能力。

2) 重视直观化描述。对常用数学概念和结论的引入与叙述，尽可能用实际案例或配以几何图形直观描述。力求使抽象的数学概念形象化，以降低学习难度，有助于学生更好地掌握数学知识。

3) 紧密结合建筑经济管理专业人才培养的目标。根据专业的需要确定教学内容，安排了很多来自建筑工程实际的例题和习题，体现了数学知识尽量与专业知识相结合的原则。为学生学习专业知识打下坚实的理论基础。

4) 突出应用性，体现新颖性。学以致用，有利于提高学生数学知识的应用意识与学习兴趣。使之具有一定的把实际问题转化为数学模型的能力。

由于编者水平有限，书中误漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者

2011年6月

目 录

第一章 初等数学	(1)
§ 1-1 解三角形	(1)
§ 1-2 三角函数	(4)
§ 1-3 反三角函数	(7)
§ 1-4 面积的计算	(10)
§ 1-5 体积的计算	(14)
本章小结	(17)
复习题一	(17)
第二章 极限	(19)
§ 2-1 初等函数	(19)
§ 2-2 极限的概念	(22)
§ 2-3 极限运算	(26)
§ 2-4 两个重要极限 无穷小的比较	(28)
§ 2-5 函数的连续性	(31)
本章小结	(34)
复习题二	(34)
第三章 导数与微分	(36)
§ 3-1 导数的概念	(36)
§ 3-2 导数运算	(40)
§ 3-3 隐函数导数 高阶导数	(42)
§ 3-4 微分	(45)
本章小结	(49)
复习题三	(50)
第四章 导数的应用	(52)
§ 4-1 微分中值定理	(52)
§ 4-2 洛必达法则	(54)
§ 4-3 函数的单调性与最值	(56)
§ 4-4 曲线的凹向与曲率	(63)
本章小结	(68)
复习题四	(68)



第五章 积分	(70)
§ 5-1 定积分概念	(70)
§ 5-2 不定积分概念与积分基本定理	(74)
§ 5-3 积分性质	(78)
§ 5-4 换元积分法	(81)
§ 5-5 分部积分法	(87)
§ 5-6 广义积分	(91)
§ 5-7 定积分应用举例	(94)
本章小结	(99)
复习题五	(99)
第六章 概率论	(101)
§ 6-1 随机事件	(101)
§ 6-2 随机事件的概率	(105)
§ 6-3 条件概率	(109)
§ 6-4 全概率公式和贝叶斯公式	(111)
§ 6-5 事件的独立性和伯努利概型	(114)
§ 6-6 随机变量的概念	(117)
§ 6-7 离散型随机变量及其概率分布	(118)
§ 6-8 连续型随机变量及其概率分布	(124)
§ 6-9 正态分布	(129)
§ 6-10 随机变量的数学期望	(132)
§ 6-11 随机变量的方差	(136)
本章小结	(139)
复习题六	(142)
第七章 数理统计	(144)
§ 7-1 总体与样本	(144)
§ 7-2 参数估计	(149)
§ 7-3 假设检验	(153)
本章小结	(158)
复习题七	(158)
附录一 泊松分布数值表	(160)
附表二 标准正态分布表	(162)
附表三 t 分布临界值表	(164)
附表四 χ^2 分布临界值表	(166)

第一章 初等数学

§ 1-1 解三角形

由于三角形具有一个很重要的力学性质——稳定性,所以三角形成了建筑物中最为常见的一个几何图形。如屋架、支架、支撑等都是由三角形构成的。对于以建筑业为其专业背景的我们来说,很好地掌握解三角形的知识,以适应实际工作的需要,就显得非常重要。

一、三角形的性质

1. 三角形的分类

按边分:不等边三角形、等腰三角形、等边(正)三角形。

按角分:锐角三角形、直角三角形、钝角三角形。

2. 构成三角形的条件

两边之和大于第三边,两边之差小于第三边。

3. 三角形的内角

内角和为 180° , 三角形的一个外角等于它不相邻的两内角之和。

4. 三角形的边角关系

在同一三角形中,边相等则所对的角相等;大边对大角,反之也成立。

5. 三角形的四心

垂心(三条高的交点)、重心(三条中线的交点)、内心(三条角平分线的交点)、外心(三条边的垂直平分线交点)。

6. 三角形的面积公式: $S = \frac{1}{2}ah_a$ (图 1-1)。

二、解三角形

1. 直角三角形的边角计算(如图 1-2):

勾股定理: $c^2 = a^2 + b^2$

三角比(锐角三角函数): $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$, $\tan A = \frac{a}{b}$, $\cot A = \frac{b}{a}$

2. 斜三角形的边角计算(如图 1-1)

正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 为三角形外接圆半径)

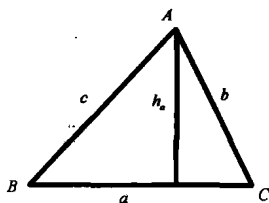


图 1-1

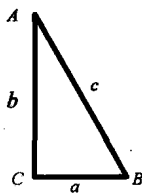


图 1-2

余弦定理: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

三、知识应用

例 1 桅杆式起重机最大起吊高度和最远起吊距离的计算. 某工地为安装设备, 需安装一台大型桅杆式起重机(如图 1-3). 拔杆长 59.5m, 拔杆下端与主桅杆铰接在离地面 0.4m 处, 偏离主桅杆中心 0.42m; 拔杆的倾角 α 可以从 15° 转到 80° ; 起重机吊钩、滑轮、索具的高度为 2.5m. 求起重机工作时吊钩离地面的最大高度和最大水平距离.

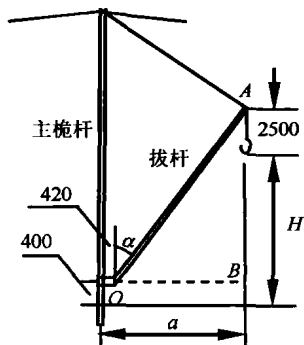
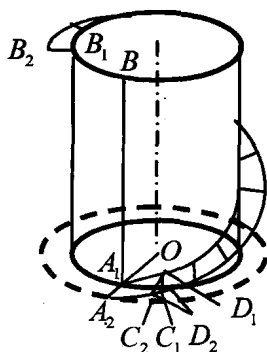
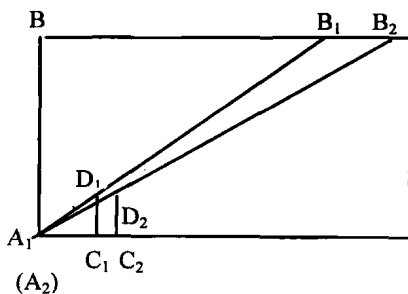


图 1-3



(a)



(b)

图 1-4

解 如图 1-3, 在倾角为 α 时 ($\alpha \in [15^\circ, 80^\circ]$), 起吊高度为 $H = AB + 0.4 - 2.5$, 水平距离为 $a = OB + 0.42$, 所以考虑直角三角形 AOB , 有

$$AB = OA \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = OA \cdot \cos \alpha$$

$$OB = OA \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = OA \cdot \sin \alpha$$

要使起吊高度 H 达到最大, 则 AB 最大, 此时取 $\alpha = 15^\circ$, 所以最大起吊高度为

$$H = 59.5 \cdot \cos 15^\circ + 0.4 - 2.5 = 55.4(\text{m})$$

要使水平距离 a 达到最大, 则 OB 达到最大, 此时取 $\alpha = 80^\circ$, 最大水平距离为

$$a = 59.5 \cdot \sin 80^\circ + 0.42 = 59.0(\text{m})$$

例 2 有一个高度为 $A_1B = 6\text{m}$, 半径 $OA_1 = 1.5\text{m}$ 的圆柱形构筑物, 沿着圆柱外周设置一个宽度 $A_1A_2 = 70\text{cm}$ 的旋转梯(图 1-4a), 其中 A_1B_1 为旋转梯的内沿边, A_2B_2 为旋转梯的外沿边, D_1D_2 为旋转梯的横档(踏步). 若将旋转梯的内沿边和外沿边展开后放在同一平面上(图 1-4b), 经测量第一个踏步有关尺寸为: $D_1C_1 = D_2C_2 = 20\text{cm}$,

$A_1C_1 = 30\text{cm}$, $A_1C_2 = 44\text{cm}$, 试求旋转梯从地面到构筑物顶部的内沿边 A_1B_1 与外沿边 A_2B_2 的长度.

解 由平面展开图, 在直角三角形 $A_1D_1C_1$ 中

$$\tan \angle D_1A_1C_1 = \frac{D_1C_1}{A_1C_1} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

在直角三角形 BA_1B_1 中得内沿边长

$$A_1B_1 = \frac{A_1B}{\cos \angle BA_1B_1} = \frac{A_1B}{\cos(90^\circ - \angle D_1A_1C_1)} = \frac{6}{\sin \angle D_1A_1C_1} \approx 10.81(\text{m})$$

同理可得外沿边长为 14.61m .

例3 如图1-5所示的屋架, 根据所给的尺寸, 计算三角形 ABC 三边 AB 、 BC 、 CA 的长度及三内角 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的大小.

解 由勾股定理计算杆的长度

在直角三角形 ABA_1 中

$$AB = \sqrt{(AA_1)^2 + (A_1B)^2} = \sqrt{(3.0)^2 + (2.0)^2} \approx 3.61(\text{m})$$

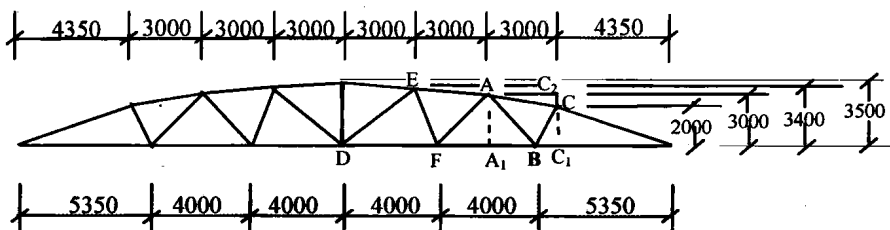


图 1-5

在直角三角形 BCC_1 中

$$BC = \sqrt{(BC_1)^2 + (C_1C)^2} = \sqrt{(5.35 - 4.35)^2 + (2.0)^2} \approx 2.24(\text{m})$$

在直角三角形 ACC_2 中

$$AC = \sqrt{(AC_2)^2 + (C_2C)^2} = \sqrt{(3.0)^2 + (3.0 - 2.0)^2} \approx 3.16(\text{m})$$

在三角形 ABC 中, 由余弦定理

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{(3.61)^2 + (2.24)^2 - (3.16)^2}{2 \times 3.61 \times 2.24} \approx 0.4960$$

$$\angle B = 60^\circ 16'$$

又用正弦定理 $\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$

$$\text{所以 } \sin A = \frac{BC}{AC} \sin B = \frac{2.24}{3.16} \times 0.8682 = 0.6151$$

$$\angle A = 37^\circ 59'$$

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 81^\circ 45'$$

习题 1-1

1. 如图 1-6, 为了防止屋面积水, 某大型公共建筑屋的网状屋顶的倾斜度为 1° , 已知该建筑物跨度为 138.2m, 求屋顶中央处的高度 BD.

2. 如图 1-7 某房屋跨度为 4.8m, 房屋倾角为 $26^\circ 34'$, 房屋长度为 7.8m, 如果每平方米屋面铺机瓦 15 张, 问该房屋屋面共铺多少张瓦?

3. 某轻钢屋架如图 1-8 所示, 求各杆的长度及它们间的夹角.

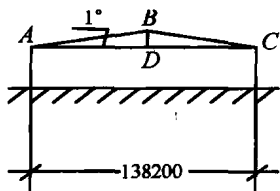


图 1-6

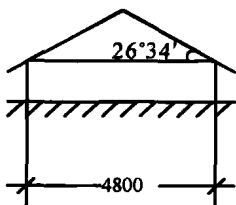


图 1-7

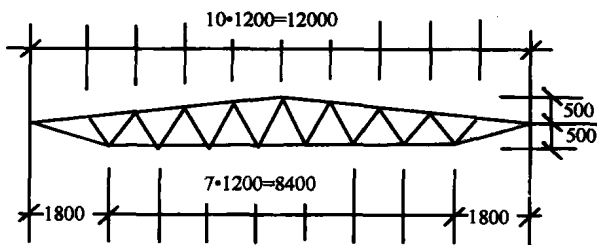


图 1-8

§ 1-2 三角函数

一、三角函数的概念

当角的度量单位为弧度制时, 角的集合与实数集合之间建立了一一对应关系, 而一个确定的角又对应着一个三角比. 这样就产生了一个新函数——三角函数. 不同的三角比对应不同的三角函数, 它们分别为正弦函数 $y = \sin x$ 、余弦函数 $y = \cos x$ 、正切函数 $y = \tan x$ 、余切函数 $y = \cot x$ 、正割函数 $y = \sec x$ 、余割函数 $y = \csc x$.

1. 三角函数的定义域、值域、性质

表 1-1

函数	定义域	值域	奇偶性	周期	单调性
$y = \sin x$	$x \in \mathbf{R}$	$[-1, 1]$	奇	2π	$[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi], \nearrow$ $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi], \searrow$ $k \in \mathbf{Z}$
$y = \cos x$	$x \in \mathbf{R}$	$[-1, 1]$	偶	2π	$[2k\pi, (2k+1)\pi], \searrow$ $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi], \nearrow$ $k \in \mathbf{Z}$

函数	定义域	值域	奇偶性	周期	单调性
$y = \tan x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},$ $k \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	奇	π	$(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$
$y = \cot x$	$x \neq k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	奇	π	$(k\pi, (k+1)\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$
$y = \sec x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},$ $k \in \mathbb{Z}$		偶	2π	
$y = \csc x$	$x \neq k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$		奇	2π	

其中正弦函数 $y = \sin x$ 、余弦函数 $y = \cos x$ 和正切函数 $y = \tan x$ 的图象分别为

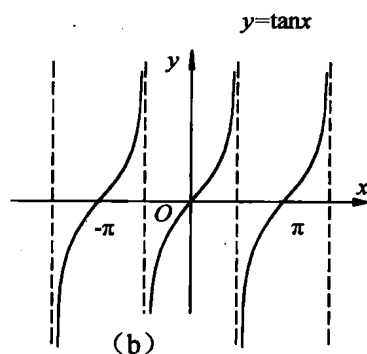
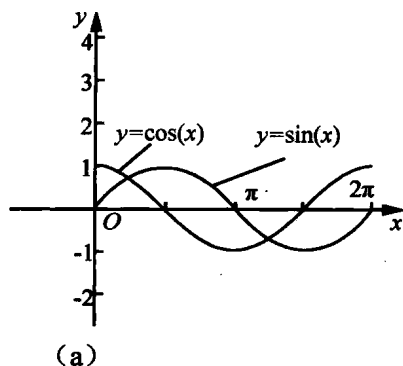


图 1-9

2. 常用的三角公式

(1) 同角三角函数关系

平方关系: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, 1 + \tan^2 x = \sec^2 x, 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

商式关系: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

倒数关系: $\sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x}, \cot x = \frac{1}{\tan x}$

(2) 二倍角公式

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

(3) 两角和与差的公式

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

二、知识应用

例 1 若 $\tan x = m$, 且 x 为第三象限角, 求 $\cos x$ 的值.

解 由 $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, x 为第三象限角, 所以

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} = -\frac{\sqrt{1 + m^2}}{1 + m^2}$$

例 2 求下列函数的最大值与最小值, 并求对应的 x 值.

$$(1) y = \sin x + \sqrt{3} \cos x; \quad (2) y = -2\cos^2 x + 2\sin x + \frac{3}{2}$$

$$\text{解} \quad (1) y = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

而 $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \leq 1$, 所以 $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 的最大值是 2, 此时

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

最小值为 -2, 此时 $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

注意: 通常 $a\sin\omega x + b\cos\omega x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega x + \varphi)$, 其中 $\tan\varphi = \frac{b}{a}$, 这公式在建筑结构的振动分析中, 常常遇到. 还可用于求最值、周期等.

$$(2) y = -2\cos^2 x + 2\sin x + \frac{3}{2} = 2\sin^2 x + 2\sin x - \frac{1}{2} = 2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

当 $\sin x = 1$ 时, 即 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, y 达到最大, 最大值为 $\frac{7}{2}$;

当 $\sin x = -\frac{1}{2}$ 时, 即 $x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$, 或 $x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$, y 达到最小, 最小值为

-1.

习题 1-2

1. 已知 $\cos x = \frac{5}{13}$ ($\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$), 求 $\tan \frac{x}{2}$ 的值.

2. 求函数 $y = \sqrt{\sin(\cos x)}$ 的定义域.

3. 化简下列各式

$$(1) \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ$$

$$(2) \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta$$

4. 求下列函数的最值, 及相应的 x 值

$$(1) y = 3\sin 2x + 4\cos 2x$$

$$(2) y = 3\sin^2 x + 6\sin x - 4$$

§ 1-3 反三角函数

一、反函数

定义 1.1 设函数 $y = f(x)$, 其定义域为 D , 值域为 M . 如果对于每一个 $y \in M$, 有惟一的一个 $x \in D$ 与之对应, 并使 $y = f(x)$ 成立, 则得到一个以 y 为自变量, x 为因变量的函数, 称此函数为 $y = f(x)$ 的反函数, 记作

$$x = f^{-1}(y)$$

显然, $x = f^{-1}(y)$ 的定义域为 M , 值域为 D . 由于习惯上自变量用 x 表示, 因变量用 y 表示, 所以 $y = f(x)$ 的反函数可表示为

$$y = f^{-1}(x)$$

反函数存在的条件是一一对应. 如指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是一一对应的, 其值域为 $(0, +\infty)$. 所以有反函数, 它的反函数是对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$. 相应的定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$.

如 $0 < a < 1$ 时的图形(见图 1-10).

$$0 < a < 1$$

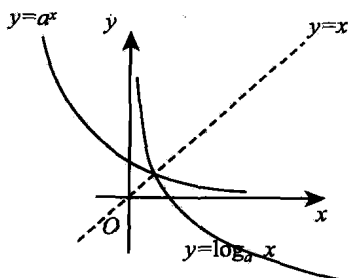


图 1-10

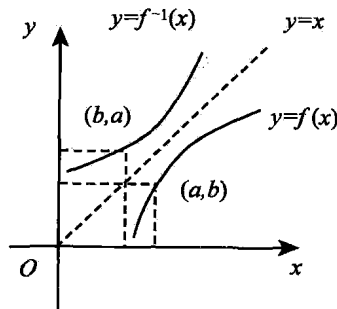


图 1-11

在同一直角坐标系中, 函数 $y = f(x)$ 和其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称. 如图 1-11 所示.

二、反三角函数

1. 概念

三角函数知识告诉我们, 在整个定义域上没有一个三角函数是一一对应的, 所以在定义域内是没有反函数. 但注意到每个三角函数都有单调区间. 考虑单调区间上的反函数, 因此定义反三角函数. 正弦函数 $y = \sin x$ 、余弦函数 $y = \cos x$ 、正切函数 $y = \tan x$ 和余切函数 $y = \cot x$ 的反函数分别称为反正弦函数 $y = \arcsin x$ 、反余弦函数 $y = \arccos x$ 、反正切函数 $y = \arctan x$ 和反余切函数 $y = \text{arccot} x$. 具体定义见表 1-2.

表 1-2

反三角函数	定义域	值域
$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = \arctan x$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$y = \operatorname{arccot} x$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, \pi)$

2. 性质与图象

性质(表 1-3)

表 1-3

函数	单调性	恒等式	正负值关系
$y = \arcsin x$	增函数	$\sin(\arcsin x) = x$	$\arcsin(-x) = -\arcsin x$
$y = \arccos x$	减函数	$\cos(\arccos x) = x$	$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
$y = \arctan x$	增函数	$\tan(\arctan x) = x$	$\arctan(-x) = -\arctan x$
$y = \operatorname{arccot} x$	减函数	$\cot(\operatorname{arccot} x) = x$	$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$

图象(图 1-12)

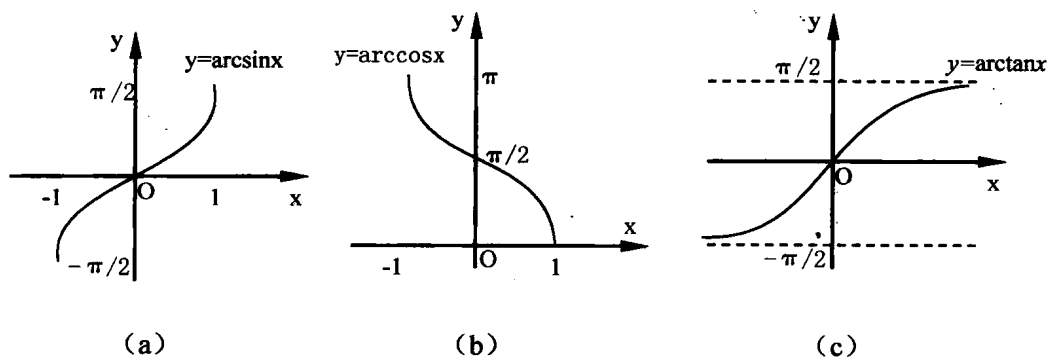


图 1-12

例 1 求下列函数的定义域

(1) $y = \frac{1}{4} \arcsin(2x - 5)$; (2) $y = \arccos(x^2 - x)$

解 (1) 由 $-1 \leq 2x - 5 \leq 1$, 得 $2 \leq x \leq 3$, 定义域为 $[2, 3]$

(2) 由 $-1 \leq x^2 - x \leq 1$, 得 $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 定义域为 $[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$

例 2 求反三角函数的值

(1) $\arcsin \frac{1}{2}$; (2) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$;

$$(3) \arctan(\tan \frac{8\pi}{7}); \quad (4) \arcsin \frac{4}{\sqrt{41}} + \arccos \frac{9}{\sqrt{82}}$$

解 (1) 设 $\alpha = \arcsin \frac{1}{2}$, 则 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $\arcsin \frac{1}{2} = \alpha = \frac{\pi}{6}$;

(2) 设 $\alpha = \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$, 则 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha \in [0, \pi]$

所以 $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \alpha = \frac{5\pi}{6}$.

$$(3) \arctan(\tan \frac{8\pi}{7}) = \arctan[\tan(\pi + \frac{\pi}{7})] = \arctan(\tan \frac{\pi}{7}) = \frac{\pi}{7}$$

$$(4) \text{ 设 } \alpha = \arcsin \frac{4}{\sqrt{41}}, \beta = \arccos \frac{9}{\sqrt{82}},$$

则 $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$, $\cos \beta = \frac{9}{\sqrt{82}}$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{4})$, 所以

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{5}{\sqrt{41}}, \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{1}{\sqrt{82}}$$

$$\text{故 } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{\sqrt{41}} \cdot \frac{9}{\sqrt{82}} + \frac{5}{\sqrt{41}} \cdot \frac{1}{\sqrt{82}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

又 $\alpha + \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$

$$\text{即 } \arcsin \frac{4}{\sqrt{41}} + \arccos \frac{9}{\sqrt{82}} = \frac{\pi}{4}$$

注意: 求反三角函数的值时, 首先考虑用反三角函数定义与性质; 其次通常设辅助角, 转为原函数的恒等变形来解决问题. 其一般步骤是: 设辅助角 —— 化原函数 —— 计算求值.

三、简单的三角方程

定义 1.2 含有未知数的三角函数的方程, 称为三角方程.

最简单三角方程的解

表 1-4

方程	a 的值	通解	解集
$\sin x = a$	$ a < 1$	$x = k\pi + (-1)^k \arcsin a (k \in \mathbf{Z})$	$\{x \mid x = k\pi + (-1)^k \arcsin a, k \in \mathbf{Z}\}$
	$ a = 1$	$x = 2k\pi + \arcsin a (k \in \mathbf{Z})$	$\{x \mid x = 2k\pi + \arcsin a, k \in \mathbf{Z}\}$
	$ a > 1$	ϕ	ϕ
$\cos x = a$	$ a \leq 1$	$x = 2k\pi \pm \arccos a (k \in \mathbf{Z})$	$\{x \mid x = 2k\pi \pm \arccos a, k \in \mathbf{Z}\}$
	$ a > 1$	ϕ	ϕ
$\tan x = a$	$a \in \mathbf{R}$	$x = k\pi + \arctan a (k \in \mathbf{Z})$	$\{x \mid x = k\pi + \arctan a, k \in \mathbf{Z}\}$



例3 解下列三角方程

(1) $2\sin 2x = 1$; (2) $\cos^2 x - 4\cos x + 2 = 0$; (3) $\tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0$

解 (1) 由 $2\sin 2x = 1$, 得 $\sin 2x = \frac{1}{2}$, 因为 $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, 所以

$$2x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}, \text{原方程的解为 } x = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$$

(2) 先解二次方程得 $\cos x = 2 \pm \sqrt{2}$, 因为 $2 + \sqrt{2} > 1$, 所以 $\cos x = 2 + \sqrt{2}$ 无解
由 $\cos x = 2 - \sqrt{2}$ 得 $x = 2k\pi \pm \arccos(2 - \sqrt{2}), k \in \mathbf{Z}$

(3) 分解因式 $(\tan x + 1)(\tan^2 x - 3) = 0$ 得 $\tan x = -1, \tan x = \pm\sqrt{3}$

由 $\tan x = -1, x = k\pi - \frac{\pi}{4}, (k \in \mathbf{Z})$; 由 $\tan x = \pm\sqrt{3}, x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, (k \in \mathbf{Z})$

结论: 解三角方程的基本思路是通过代数或三角的变换, 将一个三角方程化为一个或多个最简单的三角方程, 从而求出其解。

习题 1-3

1. 求函数的定义域

(1) $y = \arccos(1 - 5x)$;

(2) $y = \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$

2. 求下列各式的值

(1) $\arcsin(-1)$;

(2) $\arccos(-\frac{1}{2})$;

(3) $\arctan \sqrt{3}$;

(4) $\cos[\arcsin(-\frac{1}{2})]$;

(5) $\arcsin(\sin \frac{7\pi}{6})$;

(6) $\arcsin \frac{1}{5} + \arccos \frac{1}{5}$.

3. 解三角方程

(1) $1 + \sqrt{2}\cos x = 0$;

(2) $2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$;

(3) $\tan x + \cot x = 2$

§ 1-4 面积的计算

在建筑工地上, 为了做材料预算、编制施工进度及下达施工任务等, 需要根据设计图纸对建筑构件按平方米计算工程量, 即计算建筑构件的截面积、表面积等。本节先介绍面积的计算公式, 再进行相应的面积计算。

一、面积的计算公式

所谓平面图形的面积, 就是一个平面封闭图形所在平面部分的大小。要计算平面图