HIT

数学·统计学系列

Theory of Majorization and Analytic Inequalities

受控理论与解析不等式

石焕南 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

HIT

数学·统计学系列

受控理论与解析不等式

Theory of Majorization and Analytic Inequalities

石焕南 编著

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

受控理论，亦称控制不等式理论(majorization theory),是一门有着广泛应用并日趋兴旺的数学学科.本书介绍该理论的基本内容及其新推广(包括Schur几何凸函数,Schur调和凸函数,Schur幂凸函数等),重点介绍受控理论在解析不等式(包括平均值不等式,积分不等式,序列不等式,对称函数不等式等)方面的应用.本书包含了国内外学者(主要是国内学者)近年来所获得的大量研究成果.

本书适合数学研究人员,大学数学系师生,中学数学教师及数学爱好者.

图书在版编目(CIP)数据

受控理论与解析不等式/石焕南著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2012.4

ISBN 978-7-5603-3569-8

Ⅰ.①受…　Ⅱ.①石…　Ⅲ.①不等式-研究　Ⅳ.①O178

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第059710号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　杨万鑫
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张25.5　字数470千字
版　　次　2012年4月第1版　2012年4月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3569-8
定　　价　78.00元

◎前言

“各种不等式就是各种形式的数量或变量之间的相互比较关系或制约关系. 因此,不等式很自然成为分析数学和离散数学诸分支学科中极为重要的工具, 而且早已成为专门研究对象.”

“真正很有价值的不等式理应具有三个条件,即普适性(普遍可应用性)、优美性(简单性)和精确性(不可改进性).”

——摘自徐利治. 评匡继昌著《常用不等式》第3版. 数学研究与评论, 2004, 24(3): 569–570.

“不等式的重要性, 无论怎样强调都不过分.”

——摘自《美国数学评论》对匡继昌著《常用不等式》第2版的评论.

关于数学不等式理论的意义,祁锋教授[245]作了较详细的论述. 匡继昌教授[246]综述了20世纪80年代以来不等式研究在中国的进展.

笔者在欧洲数学文摘数据库(http://www.zentralblatt-math.org/)按摘要中含有“不等式”进行检索,统计了如下时间段国际上涉及不等式的论文篇数:

时间段	篇数
1960年以前	559

1960 年—1969 年	641
1970 年—1979 年	2 184
1980 年—1989 年	7 439
1990 年—1999 年	12 105
2000 年—2009 年	21 080

这些统计数据从一个侧面反映了自 20 世纪 90 年代以来国际不等式研究的迅猛发展.

在中国期刊全文数据库(http://dlib. edu. cnki. net/)做同样的检索,得到如下数据:

时间段	篇数
1979 年以前	214
1980 年—1989 年	1 981
1990 年—1999 年	5 704
2000 年—2009 年	14 855

同样,这些统计数据从一个侧面反映了自 20 世纪 90 年代以来国内不等式研究的蓬勃发展.

不等式研究之所以方兴未艾,得益于不等式的三个特点:(1)"无处不在",(2)"雅俗共赏",(3)"变幻无穷".

1979 年,Marshall 和 Olkin 合作出版了《Inequalities: Theory of Majorization and Its Application》一书,以此为标志,受控理论(亦称控制不等式理论)成为数学的一门独立的新兴学科. 1979 年 9 月至 1981 年 9 月,北京师范大学的王伯英教授在美国加州大学(UCSB)做访问学者,期间学习了这一理论. 回国后于 1984 年在国内率先开设了有关受控理论的硕士研究生课程"矩阵与控制不等式". 1984 年 9 月至 1986 年 1 月,我在北京师范大学数学系助教进修班学习,当时随意选修了这门课,想不到此选择竟决定了我日后的科研方向,至今我已发表了 60 余篇有关受控理论的论文. 1990 年,王伯英教授编著的《控制不等式基础》一书正式出版,该书除精选了 Marshall 和 Olkin 一书中的经典基础理论以外,还包含了不少王伯英教授精彩的独创内容. 在应用部分,该书着重讨论了受控理论在矩阵上的应用.

如王伯英教授所言"控制不等式几乎渗入到各个数学领域,而且处处扮演着精彩角色,原因是它常能深刻地描述许多数学量之间的内在关系,从而便于推得所需的结论;它还能把许多已有的从不同方法得来的不等式用一种统一的方法简便地推导出来,它更是推广已有不等式、发现新不等式的一种强有力手段,控制不等式的理论和应用有着美好的发展前景".

《控制不等式基础》一书的出版极大地推动我国受控理论研究的发展. 截

至目前,我国学者在国内外已发表了二百余篇有关该领域的研究论文,其中有近50篇刊于SCI期刊.已形成了一支在国际上具有一定影响力的研究队伍,其中包括王挽澜、续铁权、石焕南、文家金、张小明、褚玉明、关开中、吴善和、杨镇杭、姜卫东、杨定华、席博彦、马统一、李大矛、夏卫锋等.2011年,Arnold B C, Marshall A M和Olkin I合作出版的《Inequalities: Theory of Majorization and Its Application》(第二版)引用了不少国内学者的论文(包括笔者的五篇).本书力求全面详实地反映国内学者近一二十年在该领域所取得的研究成果.

本书介绍该理论的基本内容和新推广(包括Schur几何凸函数、Schur调和凸函数、Schur幂凸函数、抽象控制不等式等)及其应用,重点介绍受控理论在解析不等式(包括对称函数不等式、序列不等式、积分不等式、平均值不等式等)方面的应用.

本书汇集了我及我与合作者已发表的成果,并改进或完善了其中诸多证明和结论.本书还包含了许多本人未发表的和新创作的论文,以及一些同行好友的新作.

本书的438篇参考文献是我十余年搜集的.其中266篇是该书直接引用的,其余部分是本书未直接引用的国内外受控理论文献.这里不吝赘述,我想是有益于读者的.

作者深切怀念已故的著名数学家胡克教授,胡教授生前关心我的身体健康,关注我的研究工作,并鼓励我撰写专著.本书特此收录了我2009年写的《追念胡克教授》一文.

承蒙全国不等式研究会副理事长匡继昌教授拨冗为拙著作序,深感荣幸!

作者衷心感谢对我的研究给予精心指导和热情帮助的王伯英教授、王挽澜教授、刘证教授、匡继昌教授、续铁权教授、祁锋教授.

感谢张小明教授,席博彦教授花费自己的大量时间和精力审阅了全部初稿,并提出了许多宝贵的修改意见.感谢姜卫东副教授提供了许多宝贵的资料.感谢我的同事顾春、张鉴热心地帮我排版.感谢哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室编辑们的精心编辑.

作者衷心感谢我的家人,1992年我患脑溢血做了开颅手术,没有他们对我的悉心呵护与照料,我是不可能重新投入工作和创作的,自然本书也不可能问世.

本书的出版得到北京市教委科技计划面上项目(KM201011417013)的资助.

作者才疏学浅,首度著书,必有诸多瑕疵,恳请读者不吝赐教,我的电子信箱:http://shihuannan@yahoo.com.cn/和http://sfthuannan@buu.edu.cn/.

石焕南

2011-05-09

⊙ 序

有的读者可能对本书的书名“受控理论与解析不等式”中的“受控理论”有点陌生，但如果讲是“优化理论”，熟悉它的人就多得多. 实际上，它们在英文中都是同一个词：“Majorization theory”. 这是因为“Majorization theory”是一个非常广泛的概念，它涉及许多不同的数学分支，而且在控制论、系统理论等不同的数学分支中以不同的名称出现. 实际上，控制不等式也可以说成是优化不等式. 凸函数则是凸分析中的核心概念. 由凸函数理论发展起来的凸分析，是逼近论、控制论、系统理论、运筹学等数学分支的重要基础之一，现在已发展成为一门独立的数学分支. 由此就不难理解，将受控理论和凸函数理论结合起来所形成的控制不等式理论，必然显示出其很高的理论价值和实用价值. 事实上，在不等式理论的广泛而深入的发展和应用过程中，控制不等式理论的发展尤其迅速. 参与研究的专家和学者越来越多，其中，不仅有不等式的专家，也有研究系统论和控制论等应用领域的专家，所取得的研究成果越来越丰富. 但是，全面系统地总结这方面的研究成果的专著还很少，特别是反映 20 世纪 90 年代以来国内外在该领域内的研究成果的专著基本上还是空白.

石焕南教授从 20 世纪 80 年代以来就一直潜心研究控制不等式理论及其应用，并取得了具有国际水平的非常丰富的研究成果. 石教授将这些研究成果和 20 世纪 90 年代以来国内外

在该领域的研究成果整理成的这本专著,恰好填补了上述空白. 因此,本书有以下几点特色:

第一、本书内容丰富,所收录的文献达431篇,其中作者本人已发表的文献就超过60篇. 在内容题材的广度和深度方面都充分反映了20世纪90年代以来国内外在该领域的研究成果和最新进展.

第二、本书所说的“受控理论”,实际上是指“控制不等式理论”. 本书系统地介绍了控制不等式理论的基本内容及其最新进展,例如抽象控制不等式的理论基础等,还包括凸函数、Schur凸函数及其推广. 这就为初学者进入该研究领域提供了必要的理论基础.

第三、本书还重点介绍了控制不等式理论在解析不等式方面的广泛而深入的应用. 例如各种著名的平均不等式、积分不等式、序列不等式和对称函数不等式等,许多基本的结果都给出了详细的证明. 充分展示了控制不等式理论在推广现有的不等式、发现新的不等式,以及用一种统一的方法证明许多基本不等式方面的强大威力. 本书还通过详细的证明,充分展示了利用控制不等式理论的各种关键性的技巧,例如,如何去发现和建立各种控制关系等. 这些都有助于初学者能较快地进入研究前沿.

第四、本书为控制不等式理论及其应用的进一步研究打开了一条新的思路. 任何一部专著都不可能包罗万象,即都有一定的局限性. 本书也不例外. 例如,本书讲的控制不等式,涉及的基本上是离散量的重排. 自然会想到有没有相应的连续量的重排? 这个问题无疑具有重大的理论意义和实际意义. 事实上,连续量的重排,就是函数的重排. 1934年,Hardy等在他们的名著《Inequalities》中就用了整整一章(第10章)的篇幅来讨论重排方法,其中,既讲了离散量的重排,也讲了连续量的重排,即函数的重排. 与离散量重排的研究相比,对函数的重排的研究似乎还没有引起足够的重视,相应的研究成果也少得多. 事实上,函数的重排是极为有用的分析工具. 这是因为一个可测函数与它的重排函数有相同的分布函数,而原来函数的分布函数与重排函数是比原来函数好处理的对象. 因而,函数的重排就成为发现和证明许多积分不等式的强有力的基本工具. 如果在一般的测度空间上来研究函数的重排,就可以将离散量的重排和连续量的重排统一进行研究. 为此我在《常用不等式》(2010年第4版)第687~691页作了简要介绍. 又如,控制不等式理论在系统论、运筹学和优化理论等实用性较强的学科和工程技术等方面都有重要的应用,例如,本书第4章第4节的Kantorovich不等式在矩阵计算和优化理论中就起着重要的作用. 但总的来说,本书在这些方面涉及得还比较少. 然而,有了本书作为基础,就为所有上述问题的进一步研究打下一个好的基础、开辟新的思路.

综上所述,本书的读者面还是很广泛的,不论是数学研究人员和数学爱好

者,还是工程技术人员,都可以从本书中找到各自感兴趣的有用材料和进一步研究的课题.相信本书的出版,必定会对控制不等式理论及其应用的进一步研究和推广起到积极的促进作用.

湖南师范大学数学系　教授
匡继昌
2011 年　元旦

本书一般记号

这里列出本书常用的记号:

$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 为实数集.

$\mathbf{R}_+=[0,\infty)$ 为非负实数集.

$\mathbf{R}_{++}=(0,\infty)$ 为正实数集.

$\mathbf{R}_-=(-\infty,0]$ 为非正实数集.

$\mathbf{R}_{--}=(-\infty,0)$ 为负实数集.

$\mathbf{N}=\{1,2,\cdots\}$ 为正整数集.

$\mathbf{Z}_+=\{0,1,2,\cdots\}$ 为非负整数集.

I 为实数轴上的开或闭区间.

$\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n_+,\mathbf{R}^n_{++},\mathbf{R}^n_-,\mathbf{R}^n_{--},\mathbf{Z}^n_+,I^n$ 分别表示具有 n 个相应分量的行向量的全体.

$\mathbf{R}^{m\times n},\mathbf{R}^{m\times n}_+,\mathbf{R}^{m\times n}_{++}$ 分别表示具有 n 个相应元素的 m 行 n 列矩阵的全体.

$C(I)$ 表示区间 I 上的连续函数空间.

$f\in C^n(I)$ 表示函数 f 具有 n 阶连续导数.

$f\in C^\infty(I)$ 表示函数 f 具有无穷阶连续导数.

对于 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$

$$A(\boldsymbol{x})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i,\quad G(\boldsymbol{x})=\Big(\prod_{i=1}^n x_i\Big)^{\frac{1}{n}},\quad H(\boldsymbol{x})=\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^{-1}}$$

分别表示 $\boldsymbol{x}$ 的算术平均,几何平均,调和平均. $A(\boldsymbol{x})$ 有时也记作$\bar{\boldsymbol{x}}$.

将 $\boldsymbol{x}$ 的分量排成递减的次序后,记作 $\boldsymbol{x}\downarrow=(x_{[1]},\cdots,x_{[n]})$,即

$$x_{[1]}\geqslant\cdots\geqslant x_{[n]}$$

将 $\boldsymbol{x}$ 的分量排成递增的次序后,记作 $\boldsymbol{x}\uparrow=(x_{(1)},\cdots,x_{(n)})$,即

$$x_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$$

对于 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n),\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$:

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 表示 $x_i=y_i,i=1,\cdots,n$.

$\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y}$ 表示 $x_i\leqslant y_i,i=1,\cdots,n$.

$\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0}$ 表示 $x_i\geqslant 0,i=1,\cdots,n$.

$\boldsymbol{x}\prec\boldsymbol{y}$ 表示 x 被 y 控制或 y 控制 x.

$\boldsymbol{x}\prec\prec\boldsymbol{y}$ 表示 x 被 y 严格控制,或 y 严格控制 x.

$\boldsymbol{x} \prec_w \boldsymbol{y}$ 表示 x 被 y 下(弱) 控制.

$\boldsymbol{x} \prec^w \boldsymbol{y}$ 表示 x 被 y 上(弱) 控制.

记

$$\nabla \varphi(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial \varphi(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right) \in \mathbf{R}^n$$

$$H(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right) \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

组合数 $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$,规定 $\mathrm{C}_n^0 = 1$,当 $k > n$ 时,$\mathrm{C}_n^k = 0$.

$\forall$ 表示对于一切,对于任意的.

$\exists$ 表示存在.

$\Rightarrow$ 表示蕴涵,推出.

$\Leftrightarrow$ 表示充要条件,等价,当且仅当.

$\square$ 表示定理或命题证毕.

本书还常采用如下表示:

设 c, α, β, p 是常数,对于 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$,$\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$.

$c + \boldsymbol{x}$ 表示$(c + x_1, \cdots, c + x_n)$,$\alpha \boldsymbol{x}^p$ 表示$(\alpha x_1^p, \cdots, \alpha x_n^p)$.

$\ln \boldsymbol{x}$ 表示$(\ln x_1, \cdots, \ln x_n)$,$\mathrm{e}^{\boldsymbol{x}}$ 表示$(\mathrm{e}^{x_1}, \cdots, \mathrm{e}^{x_n})$.

$\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}$ 表示$(\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1, \cdots, \alpha x_n + (1-\alpha)y_n)$.

$[\alpha \boldsymbol{x}^{-1} + (\alpha)\boldsymbol{y}^{-1}]^{-1}$ 表示$([\alpha x_1^{-1} + (1-\alpha)y_1^{-1}]^{-1}, \cdots, [\alpha x_n^{-1} + (1-\alpha)y_n^{-1}]^{-1})$.

$\boldsymbol{xy}$ 表示$(x_1 y_1, \cdots, x_1 y_1)$,$\boldsymbol{x}^\alpha \boldsymbol{y}^\beta$ 表示$(x_1^\alpha y_1^\beta, \cdots, x_n^\alpha y_n^\beta)$.

目录

第一章　控制不等式　//1

1.1　增函数与凸函数　//1

1.2　凸函数的推广　//5

1.2.1　对数凸函数　//5

1.2.2　弱对数凸函数　//5

1.2.3　几何凸函数　//6

1.2.4　调和凸函数　//7

1.2.5　*MN* 凸函数　//8

1.3　控制不等式的定义及基本性质　//10

1.4　一些常用控制不等式　//17

1.5　凸函数与控制不等式　//24

第二章　Schur 凸函数的定义和性质　//29

2.1　Schur 凸函数的定义和性质　//29

2.2　凸函数与 Schur 凸函数　//37

2.3　Karamata 不等式的若干应用　//45

2.4　Schur 凸函数的推广　//55

2.4.1　Schur 几何凸函数　//55

2.4.2　Schur 调和凸函数　//59

2.4.3　Schur 幂凸函数　//60

2.5　抽象控制不等式　//64

第三章　受控理论与初等对称函数不等式　//72

3.1　初等对称函数及其对偶式的 Schur 凸性　//72

3.2　初等对称函数商或差的 Schur 凸性　//80

3.2.1　初等对称函数商的 Schur 凸性　//80

3.2.2　初等对称函数差的 Schur 凸性　//86

3.2.3　初等对称函数差或商的复合函数的 Schur 凸性　//93

3.3　初等对称函数的某些复合函数的 Schur 凸性　//94

3.3.1　复合函数 $E_k\left(\frac{x}{1-x}\right)$ 的 Schur 凸性　//94

3.3.2　复合函数 $E_k\left(\frac{1-x}{x}\right)$ 的 Schur 凸性　//95

3.3.3　复合函数 $E_k\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 的 Schur 凸性　//97

3.3.4　复合函数 $E_k\left(\frac{1}{x}-x\right)$ 的 Schur 凸性　//98

3.3.5　复合函数 $E_k(f(x))$ 的 Schur 凸性　//98

3.4　几个著名不等式的证明与推广　//99

3.4.1　Weierstrass 不等式　//99

3.4.2　Adamovic 不等式　//102

3.4.3　Chrystal 不等式　//104

3.4.4　Benoulli 不等式　//106

3.4.5　Popoviciu 不等式　//109

3.4.6　幂平均不等式　//111

第四章　受控理论与其他对称函数不等式　//117

4.1　完全对称函数的 Schur 凸性　//117

4.1.1　完全对称函数的 Schur 凸性　//117

4.1.2　完全对称函数的推广　//123

4.2　Hamy 对称函数的 Schur 凸性　//127

4.2.1　Hamy 对称函数及其推广　//127

4.2.2　Hamy 对称函数的对偶式　//129

4.2.3　Hamy 对称函数对偶式的复合函数　//131

4.3　Muirhead 对称函数的 Schur 凸性及其应用　//137

4.3.1　Muirchead 对称函数的 Schur 凸性　//137

4.3.2　涉及 Muirhead 对称函数的不等式　//141

4.3.3　Jensen-Pe čari ć-Svrtan-Fan 型不等式　//143

4.3.4　含剩余对称平均的不等式　//146

4.4 Kantorovich 不等式的推广 //150
4.5 一对互补对称函数的 Schur 凸性 //154

第五章 受控理论与序列不等式 //162

5.1 凸数列的定义及性质 //162
5.2 各种凸数列 //169
5.3 关于凸序列一个不等式 //173
5.4 杨学枝的一个猜想的证明 //178
5.5 离散 Steffensen 不等式的加细 //180
5.6 凸函数单调平均不等式的改进 //182
5.7 一类跳阶乘不等式 //191

第六章 受控理论与积分不等式 //196

6.1 涉及 Hadamard 积分不等式的 Schur 凸函数 //196
6.2 涉及 Hadamard 型积分不等式的 Schur 凸函数 //203
6.2.1 涉及 Dragomir 积分不等式的 Schur 凸函数 //203
6.2.2 涉及 Lan He 积分不等式的 Schur 凸函数 //213
6.3 涉及 Schwarz 积分不等式的 Schur 凸函数 //218
6.4 涉及 Chebyshev 积分不等式的 Schru 凸函数 //220
6.5 受控型积分不等式 //224
6.6 受控理论与其他积分不等式 //227

第七章 受控理论与二元平均值不等式 //232

7.1 Stolarsky 平均的 Schur 凸性 //232
7.2 Gini 平均的 Schur 凸性 //239
7.3 Gini 平均与 Stolarsky 平均的比较 //253
7.4 广义 Heron 平均的 Schur 凸性 //263
7.5 其他二元平均的 Schur 凸性 //273
7.5.1 广义 Muirhead 平均 //273
7.5.2 Seiffert 型平均 //274
7.5.3 指数型平均 //277
7.5.4 三角平均 //279
7.5.5 Lehme 平均 //280
7.5.6 “奇特”平均 //283
7.5.7 Toader 型积分平均 //287
7.6 某些均值差的 Schur 凸性 //289
7.6.1 某些均值差的凸性和 Schur 凸性 //289

7.6.2 某些均值差的 Schur 几何凸性 I //291
7.6.3 某些均值差的 Schur 几何凸性 II //296
7.7 双参数齐次函数 //305

第八章 受控理论与多元平均值不等式 //315

8.1 第三类 k 次对称平均的 Schur 凸性 //315
8.1.1 第三类 k 次对称平均 //315
8.1.2 第三类 k 次对称平均的函数推广 //317
8.1.3 第三类 k 次对称平均的变形 //322
8.2 n 元加权广义对数平均的 Schur 凸性 //327
8.3 关于幂平均不等式的最优值 //334
8.4 n 元平均商的 p 阶 Schur 幂凸性 //344

参考文献 //347

附录 追念胡克教授 //375

编辑手记 //378

CONTENTS

Chapter 1 Majorization //1

1.1 Increasing functions and convex functions //1

1.2 Generalizations of convex functions //5

1.2.1 Logarithmically convex functions //5

1.2.2 Weakly logarithmically convex functions //5

1.2.3 Geometrically convex functions //6

1.2.4 Harmonic convex functions //7

1.2.5 *MN* convex functions //8

1.3 Definitions and basic properties of majorization //10

1.4 Some common majorization //17

1.5 Convex functions and majorization //24

Chapter 2 Definitions and properties of Schur convex functions //29

2.1 Definitions and properties of Schur convex functions //29

2.2 Convex functions and Schur convex functions //37

2.3 Some applications of Karamata inequality //45

2.4 Generalizations of Schur convex functions //55

2.4.1 Schur geometrically convex functions //55

2.4.2 Schur harmonic convex functions //59

2.4.3 Schur power convex functions //60

2.5 Abstract majorization //64

Chapter 3 Theory of majorization and elementary symmetric function inequalities //72

3.1 Schur-convexity of elementary symmetric functions and dual form //72

3.2 Schur-convexity of quotient or difference for elementary symmetric functions //80

3.2.1 Schur-convexity of quotient for elementary symmetric functions //80

3.2.2 Schur-convexity of difference for elementary symmetric functions //80

3.2.3 Schur-convexity of composite functions of quotient or difference for elementary symmetric functions //93

3.3 Schur-convexity of some composite functions for elementary symmetric functions //94

3.3.1 Schur-convexity of composite functions $E_k\left(\frac{x}{1-x}\right)$ //94

3.3.2 Schur-convexity of composite functions $E_k\left(\frac{1-x}{x}\right)$ //95

3.3.3 Schur-convexity of composite functions $E_k\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ //97

3.3.4 Schur-convexity of composite functions $E_k\left(\frac{1}{x}-x\right)$ //98

3.3.5 Schur-convexity of composite functions $E_k(f(x))$ //98

3.4 Generdizations and proves of several well-known inequalities //99

3.4.1 Weierstrass's inequality //99

3.4.2 Adamovic's inequality //102

3.4.3 Chrystal's inequality //104

3.4.4 Bernoulli's inequality //106

3.4.5 Popoviciu's inequality //109

3.4.6 Power mean inequality //111

Chapter 4 Theory of majorization and other symmetric function inequalities //117

4.1 Schur-convexity of complete symmetric functions //117

4.1.1 Schur-convexity of complete symmetric functions //117

4.1.2 Generalizations of complete symmetric functions //123

4.2 Schur-convexity of Hamy symmetric functions //127

4.2.1 Hamy symmetric function and its Generalizations //127

4.2.2 Dual form of Hamy symmetric functions //129

4.2.3 Composite functions of dual form for Hamy symmetric functions //131

4.3 Schur-convexity of Muirhead symmetric functions and its applications //137

4.3.1 Schur-convexity of Muirhead symmetric functions //137

4.3.2 Inequalities related to Muirhead symmetric functions //141

4.3.3 Jensen-Pečarić-Svrtan-Fan type inequlity //143

4.3.4 Inequalities involving surplus symmetric mean //146