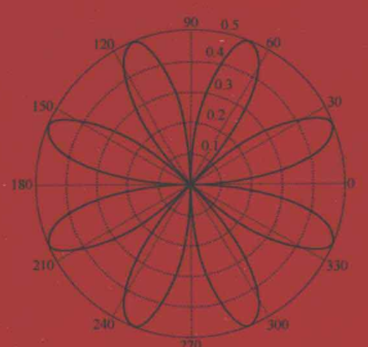
SHUXUE
JIANMO
RUMEN

数学建模入门

焦云芳　编著



冶金工业出版社
Metallurgical Industry Press

数学建模入门

数学建模入门

焦云芳　编著

北　京
冶 金 工 业 出 版 社
2012

内 容 简 介

本书共分三个模块，第一模块包括数学建模的基本概念、原理和步骤，以及全国大学生数学建模竞赛及其论文写法；第二模块介绍了八个案例；第三模块介绍了数学软件 MATLAB 基础知识及其应用。

本书可作为高等数学课程改革数学实验课的教材，也可作为参加建模比赛的同学的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

数学建模入门/焦云芳编著．—北京：冶金工业出版社，2012.4

ISBN 978-7-5024-5873-7

Ⅰ.①数… Ⅱ.①焦… Ⅲ.①数学模型 Ⅳ.①022

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 024698 号

出 版 人 曹胜利
地　　址 北京北河沿大街嵩祝院北巷 39 号，邮编 100009
电　　话 (010)64027926 电子信箱 yjcbs@cnmip.com.cn
责任编辑 尚海霞 美术编辑 李 新 版式设计 葛新霞
责任校对 郑 娟 责任印制 张祺鑫
ISBN 978-7-5024-5873-7
北京百善印刷厂印刷；冶金工业出版社出版发行；各地新华书店经销
2012 年 4 月第 1 版，2012 年 4 月第 1 次印刷
148mm×210mm；5.75 印张；168 千字；173 页
20.00 元

冶金工业出版社投稿电话：(010)64027932 投稿信箱：tougao@cnmip.com.cn
冶金工业出版社发行部 电话：(010)64044283 传真：(010)64027893
冶金书店 地址：北京东四西大街 46 号(100010) 电话：(010)65289081(兼传真)

前　言

全国大学生数学建模竞赛是由教育部高等教育司和中国工业与数学学会共同主办，面向全国在校的所有专业、所有学生的一项规模最大的课外科技活动。近年来，数学建模培训的兴起，推动了高等数学的教学改革。如何把数学建模的思想和方法渗透到教学中去，如何把数学模型和专业课程结合起来，服务于专业，服务于学生，通过建模教学和培训进一步提高学生学习数学的兴趣，提高学生应用数学的意识和能力，是编者所在院系一项已经启动并需要进一步研究的课题，本书就是在该课题的研究下应运而生的。

本书是作者结合数学建模竞赛培训与辅导工作中的经验和体会编写而成。参加竞赛的学生需要具备两方面的能力：第一是数学知识的应用能力；第二是计算机应用能力。本书编写的目的是帮助参加建模的同学解决这两方面的问题，同时，本书也可作为高等数学课程改革实验课的教材。

本书在编写的过程中，充分考虑到高职学生的特点，注重简练明了，讲求基础性、可读性、应用性和趣味性。第一，本书所选案例浅显易懂，学生接受起来不会有难度，同时也适合对建模感兴趣的学生自学。第二，为了让学生能很快适应建模的过程和熟悉建模论文的书写，案例的编写全部按照建模的五个步骤编写。作为入门教材，内容不宜过多和过难，本书共分三个模块，第一模块包括数学建模的基本概念、原理和步骤，以及全国大学生建模竞赛及其论文写法；第二模块介绍了八个案例；第三模块介绍了数学软件 MATLAB 基础知识及其应用。相信这样做可以帮助学

生在数学建模方面有一个切实提高，同时也可以提高学生学数学、应用数学的兴趣。

本书能够出版，首先要感谢学院和系领导以及学院建模小组各位同仁的大力支持。本书参考了一些同类书籍和资料，对这些书籍和资料的作者表示衷心的感谢！在本书的编写过程中，于沁阳给予了大力支持和帮助，在此一并表示感谢！

由于本人水平有限，书中难免存在不足之处，敬请读者批评指正。

编 者

2011年12月于晋城职业技术学院

目　录

第一模块　数学建模基础知识

1.1　基本概念

目前，数学建模在国民经济的各个领域都得到了广泛应用。比如，大型企业集团的技术人员研究用于生产过程中自动控制的数学模型，经济学家经常研究一个国家宏观经济运行模型或某一经济行为的微观数学模型，在生物、军事、环境、医药、人口等领域人们追求定量分析和优化决策，也需要建立数学模型。数学模型也有着不可替代的作用。本节先来介绍数学建模的一些相关概念。

什么是模型？模型是客观实体有关属性的模拟。陈列在橱窗中的飞机模型外形应当像真正的飞机，至于它是否真的能飞则无关紧要；但参加航模比赛的飞机模型则全然不同，如果飞行性能不佳，外形再像飞机，也不能算是一个好的模型。模型不一定是对实体的一种仿照，也可以是对实体的某些基本属性的抽象，例如，一张地质图并不需要用实物来模拟，它可以用抽象的符号、文字和数字来反映出该地区的地质结构。

什么是数学模型（mathematical model）？数学模型是一种模拟，是用数学符号、数学公式、程序、图形等对实际课题本质属性的抽象而又简洁的刻画，它或能解释某些客观现象，或能预测未来的发展规律，或能为控制某一现象的发展提供某种意义下的最优策略或较好策略。数学模型一般并非现实问题的直接翻版，它的建立常常既需要人们对现实问题深入细致地观察和分析，又需要人们灵活巧妙地利用各种数学知识。这种应用知识从实际课题中抽象、提炼出数学模型的过程就称为数学建模（mathematical modeling）。一般来说，数学模型可以描述为：对现实世界的一个特定对象，为了一个特定的目的，根据特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构。如物体做自由落体运动时，其高度 h 与时间 t 的

函数关系式 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 就是一个简单的数学模型。

由于数学建模可以使用所有的数学工具，现实问题又是多种多样的，因此造成数学模型的种类很多，使用不同的分类标准可以得到不同的分类。按照常用的分类标准，数学模型大致可以分为以下几类：

（1）按照模型的应用领域（或所属学科）分，可分为人口模型、交通模型、环境模型、生态模型、城镇规划模型、水资源模型、再生资源利用模型、污染模型等。范畴更大一些，则可按边缘学科分类，如生物数学模型、医学数学模型、地质数学模型等。该种分类侧重于在某一专门领域中用不同的方法建立不同的模型，以解决不同的问题。

（2）按照建立模型所用的数学方法（或所属数学分支）分，可分为初等数学模型、几何模型、微分方程模型、图论模型、马氏链模型、规划论模型等。该分类是用属于不同领域的现成的数学模型来解释某种数学技巧的应用。

（3）按照模型的表现特性又有以下分类方法：

1）确定性模型和随机性模型，取决于是否考虑随机因素的影响。近年来随着数学的发展，又有突变性模型和模糊性模型。

2）静态模型和动态模型，取决于是否考虑由时间因素引起的变化。

3）线性模型和非线性模型，取决于模型的基本关系，如微分方程是否是线性的。

4）离散模型和连续模型，指模型中的变量（主要是时间变量）是离散的还是连续的。

虽然从本质上讲，大多数实际问题是随机性的、动态的、非线性的，但是由于确定性、静态、线性模型容易处理，并且往往可以作为初步的近似来解决问题，因此建模时常先考虑确定性、静态、线性模型。连续模型适合用微积分方法求解，做理论分析，而离散模型适合在计算机上做数值计算，所以用哪种模型要根据具体问题而定。在具体的建模过程中，将连续模型离散化，或将离散变量视为连续变量，这也是常采用的方法。

（4）按照建模目的分，可分为描述模型、分析模型、预报模型、

优化模型、决策模型、控制模型等。

（5）按照对模型结构的了解程度分，可分为白箱模型、灰箱模型、黑箱模型。这是把研究对象比喻成一只箱子里的机关，通过建模来揭示它的奥妙。白箱主要包括用力学、热学、电学等一些原理相当清楚的学科描述的现象以及相应的工程技术问题，这方面的模型大多已经基本确定，还需深入研究的主要是优化设计和控制等问题了。灰箱主要指生态、气象、经济、交通等领域中原理尚不十分清楚的现象，在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多工作要做。黑箱则主要指生命科学和社会科学等领域中一些原理（数量关系方面）很不清楚的现象。有些工程技术问题虽然主要基于物理、化学原理，但由于因素众多、关系复杂和观测困难等原因也常作为灰箱或黑箱模型处理。当然，白、灰、黑之间并没有明显的界限，而且随着科学技术的发展，箱子的“颜色”必然是逐渐由暗变亮的。

根据数学模型的定义和分类，可以看出其具有以下特点：

（1）逼真性。逼真性是指所建数学模型与现实世界或具体问题的接近程度。

（2）可行性。可行性是指所建数学模型在现实世界或具体问题中的可实施程度。

（3）渐进性。复杂的实际问题的建模通常不可能一次性成功，要经过建模过程的反复迭代，包括由简到繁，也包括删繁就简，以获得越来越满意的模型。

（4）强健性。当观测数据（或其他信息）有微小变化时，模型结构和参数也只有微小变化，并且一般也就导致模型求解的结果也只有微小变化。

（5）转移性。模型是对现实对象抽象化、理想化的产物，它不为对象所属领域所独有，可以转移到其他的领域。

（6）非预测性。虽然已建立了许多应用广泛的数学模型，但实际问题是多种多样、千变万化的，不可能要求把各种模型做成预制品供建模时使用。

（7）逻辑性。从建模的角度考虑问题，可以促使人们对对象的分析更全面、更深入、更具条理性，这样即使建立的模型由于种种原

因未达到实用的程度，但对问题的深入研究也是有益的。

(8) 技艺性。建模的方法与其他的数学方法如方程解法、规划解法等是根本不同的，无法归纳出若干条普遍适用的建模准则和技巧。有人认为，目前，建模与其说是一门技术，不如说是一种艺术，是技艺性很强的一门学问。经验、想象力、洞察力、观察力，以及直觉、灵感等在建模过程中起的作用往往比一些具体的数学知识更大。

(9) 局限性。首先，由于数学模型得到的结论虽然具有通用性和精确性，但因为模型是对现实对象简化或者理想化的产物，结论的通用性和精确性只是相对的和近似的。其次，由于人们的认识能力和科学技术本身发展水平的限制，还有不少实际问题很难得到有实用价值的数学模型。最后，还有些领域中的问题今天尚未发展到用数学建模方法寻求数量规律的阶段，如中医诊断过程，目前计算机辅助诊断也是属于总结著名中医的丰富临床经验的专家系统。

1.2 数学建模的方法与步骤

数学模型和建立数学模型简称为模型和数学建模。两者的区别在于，数学模型是已经成形或定形的数学结构，表现形式是静态的；建立数学模型则是利用数学模型寻找或建立新的数学结构，去解决现实世界的具体问题，是一个动态的过程。

建立一个好的、新的数学模型是非常困难的，需要经过多次检验，也就是通过对现实问题的调查研究，经过假设、简化和抽象，建立初步的数学模型。然后再通过具体数据对模型进行检验和评价，从而不断地发现模型的缺陷，不断地改进，得到更好的、新的模型。只有经过多次反复才能得到理想的模型。

建立数学模型的方法并没有固定的模式，但一个理想的模型应能反映系统的全部重要特征：模型可靠性和实用性。

1.2.1 数学建模的一般方法

1.2.1.1 机理分析

机理分析就是根据对现实对象特性的认识，分析其因果关系，找

出反映内部机理的规律，所建立的模型常有明确的物理或现实意义。机理分析方法有：

（1）比例分析法是建立变量之间函数关系的最基本、最常用的方法。

（2）代数方法是求解离散问题（离散的数据、符号、图形）的主要方法。

（3）逻辑方法是数学理论研究的重要方法，在解决社会学和经济学等领域的实际问题时，以及在决策、对策等学科中常用该方法。

（4）常微分方程是解决因变量和自变量之间的变化规律，关键是建立“瞬时变化率”的表达式。

（5）偏微分方程是解决因变量与两个及两个以上自变量之间的变化规律。

1.2.1.2 测试分析方法

测试分析方法就是将研究对象视为一个“黑箱”系统，内部机理无法直接寻求，通过测量系统的输入、输出数据，并以此为基础运用统计分析方法，按照事先确定的准则在某一类模型中选出一个数据拟合得最好的模型。测试分析方法有：

（1）回归分析法用于对函数$f(x)$的一组观测值（x_i，y_i），$i=1, 2, \cdots, n$，确定函数的表达式，由于处理的是静态的独立数据因此称为数理统计方法。

（2）时序分析法处理的是动态的相关数据，又称为过程统计方法。

将这两种方法结合起来使用，即用机理分析方法建立模型的结构，用系统测试方法来确定模型的参数，也是常用的建模方法。在实际过程中用哪一种方法建模，主要是根据对研究对象的了解程度和建模目的来决定。

1.2.1.3 仿真和其他方法

仿真和其他方法还有：

（1）计算机仿真（模拟）实质上是统计估计方法，等效于抽样

试验。离散系统仿真有一组状态变量；连续系统仿真有解析表达式或系统结构图。

（2）因子试验法是在系统上做局部试验，再根据试验结果进行不断分析修改，求得所需的模型结构。

（3）人工现实法是基于对系统过去行为的了解和未来希望达到的目标，并结合考虑系统有关因素的可能变化，人为地组成一个系统。

1.2.2 数学建模的一般步骤

数学建模的一般步骤是：

（1）模型准备。即通过调查研究对实际问题的历史背景和内在规律有深刻的了解，必须对问题进行全面地、深入细致地调查和研究，并收集与问题有关的数据。只有掌握了详细的数据资料，明确问题背景，确切了解建模的目的，才能在脑子里形成一个较清晰的“问题”。

（2）模型假设。在明确建模目的、掌握必要资料的基础上，通过对资料的分析计算，找出起主要作用的因素，经必要的精炼、简化，提出若干符合客观实际的假设，使问题的主要特征凸现出来，忽略问题的次要方面。一般来说，一个实际问题不经过简化假设就很难翻译成数学问题，即使可能，也很难求解。不同的简化假设会得到不同的模型。假设不合理或过分简单，会导致模型失败或部分失败，于是应该修改和补充假设；假设过分详细，试图把复杂对象的各方面因素都考虑进去，可能很难甚至无法继续下一步的工作。通常，做假设的依据，一是出于对问题内在规律的认识，二是来自对数据或现象的分析，也可以是两者的综合。做假设时既要运用与问题相关的物理、化学、生物、经济等方面的知识，又要充分发挥想象力、洞察力和判断力，善于辨别问题的主次，果断地抓住主要因素，舍弃次要因素，尽量将问题线性化、均匀化。经验在这里也常起重要作用。写出假设时，语言要精确，就像做习题时写出已知条件那样。

（3）模型建立。根据所做的假设以及事物之间的联系，利用适当的数学工具去刻画各变量之间的关系，建立相应的数学结构，即建

立数学模型。在建模时应注意：

1）分清变量类型，恰当使用数学工具。如果实际问题中的变量是确定性变量，就多用微积分、微分方程、线性规划、非线性规划、图论与网络、投入与产出、插值与拟合等。如果变量是随机变量，就多用概率、统计、随机性存储论、排队论、对策论、决策论、随机微分方程等。

2）抓住问题本质，简化变量之间的关系。建模的原则是：模型尽可能简单、明了、思路清晰，尽量不采用高深的数学知识，不追求完美，侧重实际应用。

3）建模要有严密推理。在假设的前提下，推理一定要严密，从而保证模型的正确性，否则，会功亏一篑。

4）建模要有足够的精确度。所建模型应能够满足实际问题对精度的具体要求。

（4）模型求解。利用已知的数学方法来求解上一步所得到的数学问题，这时往往还要做出进一步的简化或假设。在难以得出解析解时，也应当借助数学软件如 MATLAB、LINGO 等和计算机对其进行求解。

（5）模型分析。对模型解答进行数学上的分析，有时要根据问题的性质分析变量间的依赖关系或稳定状况，有时是根据所得结果给出数学上的预报，有时则可能要给出数学上的最优决策或控制，不论哪种情况，都常常需要进行误差分析、模型对数据的稳定性或灵敏性分析等。

（6）模型检验。分析所得结果的实际意义与实际情况进行比较，看是否符合实际，如果结果不够理想，应该修改，补充假设或重新建模。有些模型需要经过几次反复才能不断完善。数学建模步骤如图 1-1所示。

（7）模型应用。所建立的模型必须在实际中应用才能产生效益，在应用中才能不断改进和完善。模型应用的方式自然取决于问题的性质和建模的目的。

在掌握了数学建模的定义、分类、特点及建模的方法和步骤之后，还应该注意对经验、想象力、洞察力、直觉和灵感等数学建模能力的培养。