统一书号： 13093・64
定 价： 0.82 元

# 数学解题技巧

（第三卷 下册）

〔日〕 矢野健太郎 著

安永德 马宝珊 译

黑龙江人民出版社

1983年·哈尔滨

责任编辑：田兆民　孙怀川
封面设计：蒋　明

数学解题技巧
（第三卷　下册）
〔日〕矢野健太郎　著
安永德　马宝瑚　译

黑龙江人民出版社出版
（哈尔滨市道里森林街42号）
黑龙江新华印刷厂印刷　黑龙江省新华书店发行
开本 787×1092 毫米 1/32 · 印张 10 2/16 · 字数 187,000
1983年8月第1版　　1983年8月第1次印刷
印数 1－16,300

统一书号：13093 · 64　　定价：0.82 元

# 译者的话

本书译自日本东京工业大学名誉教授、理学博士矢野健太郎著《解法のテクニック》一书1979年三订版。

原书是根据日本现行高中数学的全部内容，按解题技巧加以分类、整理而编成的一部供高中学生系统复习和准备高考用的完备的参考指南。全书分3卷（数学Ⅰ、数学$\mathrm{II}_B$、数学Ⅲ）28章127节，共精选出782个典型问题及约2000道习题，并给出了详细解答。这些问题及习题包括了所能想到的各种数学问题及其解题技巧。它对学生熟练地运用数学基础知识、提高数学解题能力十分有益，确实是广大高中学生、中学数学教师以及数学爱好者不可多得的一部内容丰富的好参考书。

为了使读者能够有效而全面地掌握数学解题技巧，作者通过精心的协调和安排，以条理清晰的形式，将有关的基础知识及其应用方法展示给读者，为此在各章的每节中都安排了如下内容：

首先介绍基础知识(Fundamentals)，简明扼要地分条列出该节有关的基本定义、公式、定理等，并指出了注意事项。

其次将该节的具体内容编排成一个一个的典型问题，并详细阐述解答问题的思路和方法。对于解题中出现的，对其

它问题也有普遍应用价值的常用技巧，冠以“关键”(Technique)字样；对于解题时要用到的，有普遍意义的公式、定理等，冠以“理论”(Theory)字样。凡“关键”和“理论”部分，一律用简洁的语言或公式表示出来，以便于读者的复习和记忆。

在阐明解题的思路和方法的基础上，给出了问题的完整的解答过程。其中对于容易出错的地方，冠以“当心”(Remark) 字样，以提醒读者注意。对于解题过程中所依据的公式、计算方法和论证等，通过反向箭头“←”列在相应步骤的右边。

在每一问题的后面配备了若干同类型的习题，以供练习之用。对于个别较难的习题，标上“*”号，以示区别，初读时可以略过。这些习题的解题技巧与解答附于书末。

由于原书是按照日本高中数学大纲编写的，所以有个别章节（如空间坐标和向量、矩阵、概率分布、统计推断、微分方程、平面几何公理的构成、映射等）超过了我国现行中学数学教学大纲范围。但是，考虑到这些内容有的将陆续纳入我国三年制高中数学教学大纲，有的对中学教师和广大数学爱好者有一定的参考价值，因此，中译本将原书全部内容译出，以保持其完整性和系统性。

原书中冠有“关键”、“理论”、“当心”字样的部分，都是以醒目的红蓝套色印刷的，中译本则一律用黑体字排出。对原书中数字和符号上的个别印刷错误，我们已作纠正，不再一一注出。

本书中译本改为三卷六分册(每卷分上、下两册)出版。

译者分工如下：第一卷上册由马宝珊、李俊杓、安永德译，下册由李俊杓、安永德译；第二卷上册由颜秉海、颜建设译，下册由李开成译；第三卷上册由张卓澄、马宝珊、李俊杓译，下册由安永德、马宝珊译。李诵权、周师颖承担了第一、三卷各册的部分校对工作，林龙威承担了第二卷下册的校对工作。全书由颜秉海、李开成担任总审校。

在此谨向原著者、东京工业大学名誉教授矢野健太郎先生及黑龙江人民出版社表示感谢。

由于译者水平有限，难免出现缺点和错误，欢迎各位读者批评指正。

黑龙江大学数学系　颜秉海

1981月11日

# 目　　录

## 第五章　积 分 法

## 第六章　积分的应用

## 第七章 概率分布



## 第八章 统计推断

# 第五章　积 分 法

## §16　不 定 积 分

### 基 础 知 识

**1. 不定积分（原函数）**

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)\rightleftharpoons\int f(x)\,dx=F(x)$$

积分

微分

**2. 重要的不定积分（$C$ 表示积分常数）**

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\ (n\text{ 是有理数，}n\neq-1).$$

$$\int x^{-1}dx=\ln|x|+C\quad(\text{底 }e=2.71828\cdots)$$

$$\int e^x dx=e^x+C,\qquad \int \ln x\,dx=x\ln x-x+C$$

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C,\qquad \int \cos x\,dx=\sin x+C$$

$$\int \sec^2 x\,dx=\operatorname{tg}x+C,\qquad \int \csc^2 x\,dx=-\operatorname{ctg}x+C$$

**3. 不定积分的计算**

$$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx\quad(k\text{ 是常数})$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

(复号顺序相同)

**4. 分部积分**

$$\int f(x) g(x)\, dx = \overset{\text{积分}}{F(x)}\, g(x) - \int \overset{\text{积分}}{F(x)}\, \overset{\text{微分}}{g'(x)}\, dx$$

**5. 换元积分**

$$\int f(x)\, dx = \int f[g(t)] g'(t)\, dt \, [x = g(t),$$

$dx = g'(t)\, dt]$

$$\int f[g(x)] g'(x)\, dx = \int f(t)\, dt \, [g(x) = t,$$

$g'(x)\, dx = dt]$

特殊情况是一次换元积分

$$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} \int f(t)\, dt \,(ax + b = t,\ a dx = dt)$$

在进行不定积分的验算时，可先作微分试看能否变为被积函数。例如，分部积分公式之所以正确，是由于

$$\frac{d}{dx}\left[F(x) g(x) - \int F(x) g'(x)\, dx\right]$$

$$= f(x) g(x) + F(x) g'(x) - F(x) g'(x) = f(x) g(x)$$

133. $\int x^n dx \,(n \neq -1)$

**问　题**　试求下列不定积分：

(1) $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$　　(2) $\int \frac{x + \sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x}} dx$

【技巧】 因$\frac{1}{x^2}=x^{-2}$、$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$、$\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$等可化为$x^n$形式，故可进行不定积分，并可通用

$$\textbf{理论：}\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\,(n\neq-1).$$

要记住右边$x$的指数与分母相同.

【解答】 (1) $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx=\int(x+x^{-1})^2dx$

$=\int(x^2+2+x^{-2})dx$ ←化为$x^n$形式.

$=\int x^2dx+2\int dx+\int x^{-2}dx$ ←各项分别积分，系数提到前面.

$=\frac{x^3}{3}+2x+\frac{x^{-1}}{-1}+C$ ←$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$.

$=\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{x}+C$ ←作微分并验算.

(2) $\int\frac{x+\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{x+x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$

$=\int(x^{1-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})dx$ ←$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.

$=\int(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{6}}-x^{-\frac{1}{2}})dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+C$ ←系数是指数的倒数.

【注意】 (2) 的答案也可写成$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+C$. 一般取指数形式便于验算.在计算过程中,脱掉$\int$号时要加$C$.

**当心：对不定积分的答案——→要作微分并验算.**

## 习 题 133

1. 试求下列不定积分：

(1) $\int(1-\sqrt{x})^2dx$　　(2) $\int\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx$

(3) $\int\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$

2. 假定对于应作积分的某函数 $f(x)$ 误作了微分并得 $\frac{1}{x\sqrt{x}}$，试求正确答案（但已知 $f(1)=-2$）。

## 134. $\int(ax+b)^n dx$

**问　题**　试求下列不定积分：

(1) $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$　　(2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

**【技巧】**　(一次式)$^n$ 的积分可应用

**理论：** $\int(\boldsymbol{ax+b})^n\boldsymbol{dx}=\frac{1}{\boldsymbol{a}}\cdot\frac{(\boldsymbol{ax+b})^{n+1}}{\boldsymbol{n}+1}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{n}\neq-1)$。

与 $x^n$ 的积分相比较，形式类似，但需除以 $a$。

**【解答】**　(1) $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x}}=\int(5-4x)^{-\frac{1}{2}}dx$

$=\frac{1}{-4}\times2(5-4x)^{\frac{1}{2}}+C$ ←$\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C$。

$=-\frac{1}{2}\sqrt{5-4x}+C$　　←作微分并验算。

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}dx$$ ←将分母有理化。

$$= \frac{1}{2}\left[\int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx - \int (x-1)^{\frac{1}{2}}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right] + C$$ ←在 $ax+b$ 中 $a=1$。

$$= \frac{1}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}}\right] + C$$

**【研究】** 设 $ax+b=t$，则 $adx=dt$， $\therefore\quad dx=\frac{1}{a}dt$

$$\therefore\quad \int (ax+b)^n dx = \int t^n\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}\int t^n dt$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

这叫换元积分。

## 习　题　134

1. 试求下列不定积分：

(1) $\int \sqrt{\frac{1}{3}x-2}\,dx$　(2) $\int (\sqrt{1-x}+1)^2 dx$

(3)* $\int x\sqrt{x-1}\,dx$

2. 试求满足下列条件的函数 $f(x)$：

(1) $f'(x)=\sqrt{2x+1}$, $f(0)=1$

(2) $f''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $f(0)=0$, $f'(0)=-1$

135. $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx$

**问　题**　试求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{(2x+1)^2}{x}dx$　　　(2) $\displaystyle\int\frac{x}{(2x+1)^2}dx$

**【技巧】** (1) 若（分子的次数）≥（分母的次数），则作除法运算，化成带分数形式，并根据下述理论求解。

**理论：** $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$.

(2) 将分子变换成$\dfrac{1}{2}[(2x+1)-1]$（与习题 134 的 1.(3)相同），然后要利用下述理论求解。

**理论：** $\displaystyle\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\cdot\ln|ax+b|+C$.

**【解答】** (1) $\displaystyle\int\frac{(2x+1)^2}{x}dx=\int\frac{4x^2+4x+1}{x}dx$

$$=\int\left(4x+4+\frac{1}{x}\right)dx \qquad \leftarrow（分子）\div（分母）.$$

$$=2x^2+4x+\ln|x|+C \qquad \leftarrow\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C.$$

(2) $\displaystyle\int\frac{x}{(2x+1)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)-1}{(2x+1)^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{2x+1}-\int\frac{dx}{(2x+1)^2}\right) \qquad \leftarrow（分子）\div（分母）.$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln|2x+1|+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2x+1}\right)+C$$

$\leftarrow \int (ax+b)^n dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C$ $(n\neq-1)$ $=\frac{1}{a}\cdot\ln|ax+b|+C$ $(n=-1)$。

$$=\frac{1}{4}\left(\ln|2x+1|+\frac{1}{2x+1}\right)+C$$

**【注意】** 对 $\int x^n dx$ 与 $\int (ax+b)^n dx$，当 $n$ 作为变量时，必须对 $n\neq-1$ 与 $n=-1$ 两种情况分别作出解答。

## 习 题 135

1. 试求下列不定积分：

(1) $\int\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$ (2) $\int\frac{2x-1}{2x+1}dx$ (3) $\frac{x^3}{x+1}dx$

2. 试求 $\int\frac{x^2-1}{x^n}dx$ ($n$ 是有理数)。

3.* 当 $F(x)=\int\frac{x^3-a}{x-a}dx$ 为 $x$ 的整式时，试求 $a$ 值与 $F(x)$。

## 136. 部分分式

**问 题** (1) 试求使恒等式 $\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}$ 成立的常数 $A$、$B$、$C$；

(2) 试求 $\int\frac{dx}{x^2(x-1)}$。

**【技巧】** (1) 使去掉分母的式子成为恒等式即可。

$$1=A(x-1)+Bx(x-1)+Cx^2$$