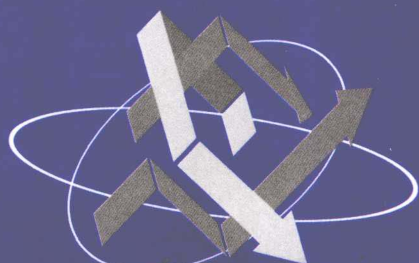
SHUXUE JIANMO JIQI
CHANGYONG SHUXUE RUANJIAN

数学建模及其常用数学软件

耿秀荣 王彦辉 吴果林 主编



SHUXUE JIANMO JIQI
CHANGYONG SHUXUE RUANJIAN

数学建模及其常用数学软件

耿秀荣 王彦辉 吴果林 主编

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社
·桂林·

图书在版编目（CIP）数据

数学建模及其常用数学软件 / 耿秀荣，王彦辉，吴果林主编．—桂林：广西师范大学出版社，2012.6
ISBN 978-7-5495-2166-1

Ⅰ．数… Ⅱ．①耿… ②王… ③吴… Ⅲ．数学模型 Ⅳ．O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 130795 号

广西师范大学出版社出版发行
（广西桂林市中华路 22 号　邮政编码：541001
网址：http://www.bbtpress.com）
出版人：何林夏
全国新华书店经销
桂林日报印刷厂印刷
（广西桂林市八桂路 2 号　邮政编码：541001）
开本：787 mm × 1 092 mm　1/16
印张：16.75　　字数：306 千字
2012 年 6 月第 1 版　2012 年 6 月第 1 次印刷
印数：0 001~2 500 册　定价：27.00 元

前　言

20 多年来，大学生数学建模竞赛活动在我国蓬勃发展. 数学建模是用数学观点去解决实际生活中的问题. 在数学建模过程中，学生提高了数学素质，增强了数学应用能力和创新能力. 显然，这对数学教学改革和高素质人才培养起到了巨大的推动作用. 开展数学建模活动，提高学生的数学应用能力，是高等院校培养应用型人才、增强学生就业竞争力的有效途径.

为了配合数学建模课程，为了帮助学生熟练运用数学建模中的常用数学软件，为了提高数学建模队员的竞技水平，针对学生的实际情况和现实需求，我们结合多年的数学建模竞赛指导与授课经验，精心编纂了这本《数学建模及其常用数学软件》教材.

本书分为两大部分：

第一编 数学建模. 该编共分八章，主要介绍数学建模所涉及的数学基础和基本方法，包括建模原理的应用，以及诸如初等数学模型、图论模型、优化问题模型、微分方程模型、层次分析模型、统计分析模型等常见数学模型. 同时，介绍数学建模论文写作的基本方法，并为读者提供 7 篇优秀的数学建模论文作为样例. 当然，通过阅读这些数学建模论文，除了能够体会数学建模论文写作的格式和方法外，读者还能感受到数学建模的魅力，以及数学建模过程中一丝不苟、精益求精的治学精神和严谨态度.

第二编 数学建模中的常用数学软件. 该编共分四章，主要介绍数学建模中的常用软件：数学公式编辑器、Mathematica、MATLAB 与 LINGO. 它们为人们运用计算机解决数学建模问题提供必要、方便的求解手段.

本书强调实用性、有效性和可操作性，旨在解决实际问题. 因此，本书不对高深、系统的数学知识和计算机知识进行阐述，只介绍一些与数学建模密切相关的数学知识、计算机理论与方法.

本书由桂林航天工业学院耿秀荣、王彦辉和吴果林三位老师担任主编. 全书由耿秀荣统一审订.

本书可作为数学建模的课程教材、大学生数学建模竞赛选手的培训材料，也可以作为数学建模爱好者的学习、参考资料.

由于编者水平有限，不妥与错误之处，在所难免，敬请广大读者批评、指正.

编者
2012 年 5 月于桂林

目录

CONTENTS

第一编：

数学建模

第1章　数学建模基础

1.1　数学模型的基本概念

数学模型是人们为了认识客观对象在数量方面的特征，定量地分析对象的内在规律并用数学的语言和符号去近似地刻画要研究的那一部分现象时，所得到的一个数学表述. 人们在认识和研究现实世界的客观对象时，常常不是直接面对对象本身，而是设计构造它的各种各样的简化模型，如玩具模型、地球模型(地球仪) 等. 这些模型都是人们为了一定的目的，对客观事物的某一部分进行简化、抽象、提炼出来的代替物.

建立数学模型的过程称为数学建模.

1.1.1　原型与模型

原型(Prototype) 和模型(Model) 是一对对偶体. 原型指人们在现实世界里关心、研究或者从事生产、管理的实际对象. 现实对象、研究对象、实际问题等均指原型. 在科技领域通常使用系统(System)、过程(Process) 等词汇，如机械系统、电力系统、生态系统、生命系统、社会经济系统，又如钢铁冶炼过程、导弹运行过程、化学反应过程、污染扩散过程、生产销售过程、计划决策过程等. 模型则指为了某个特定目的将原型的某一部分信息简缩、提炼而构造的原型替代物，是原型的模拟仿真.

1.1.2　数学模型的基本属性

实际需要 —— 数学建模的研究对象　数学建模反映的主体是客观世界，是人们在实际生活中遇到的问题. 这些问题既包括生产劳动中遇到的，也包括理论研究中遇到的，是真实的、亟待解决的实际问题. 可以说，数学建模研究的对象就是问题，就是需要. 其次，每一个数学模型都是针对某一个实际问题而建立的，任何一个数学模型都只能研究一部分问题；即使具体到同类问题，数学模型也只能描述该类问题的某些特定属性.

简化 —— 数学建模的必由之路　现实世界的任何一个问题，无论看上去多么简单，若细究起来，都是非常复杂的. 数学模型则是比较理想化，相对简单得多. 所以，在把现实世界转换成数学模型的过程中，不可避免地要对现实世界做一些抽象、简化，抓住主要矛盾，略去次要因素. 若是不分主次地面面俱到，则任何一个实用的模型也建不起来. 而如何判定哪些是主要因素哪些是次要因素，则要根据具体问题做出具体的分析. 如牛顿在研究万有引力的时候，对地球做了大胆的简化，忽略了地球的形状和大小，仅仅抓住“质量”这一主要属性，最终成功解

决了问题.

数学参与——数学建模的核心 既然称之为数学建模,其中必然包含着大量的数学因素.首先,模型的建立过程要运用到数学的思想方法;其次,模型的表现形式要具有鲜明的数学特征,如公式、图表、符号等;最后,模型的求解过程要用到数学理论或数学计算工具,如电子计算机.只有融入了数学思想的模型,才能称之为数学模型.

1.1.3 数学模型的主要特点

数学模型的可行性 数学模型是原型的仿真,但数学建模一般不能考虑原型全部的因素,进行所有因素的仿真.即使这样做技术上可行,也可能由于费用太高而导致经济上不可行.一般做法是对问题进行简化、抽象,提出合理假设,突出主要问题,略去次要问题.虽然模型得到的解是实际问题的近似,但也要能够解决主要问题,达到"费用"与"收益"的一个平衡效益.

数学模型的渐近性 对稍微复杂的实际问题,不可能通过一次数学建模解决问题,而是要经过反复迭代,循序渐进.从简单的数学模型入手,不断深入研究,逐渐建立更为复杂,与实际问题更"逼近"的数学模型,问题逐渐得到满意解答.纵观科学发展史,各门科学中的数学模型不断推陈出新就是数学模型渐近性的例证.

数学模型的稳定性 模型的结构和参数一般是由对象的信息(如观测数据)确定的,而观测数据是有误差的.因此,一个好的数学模型应该具有:当数据有小小的改变时,不会引起模型结构的改变,更不会引起解的大变动.

数学模型的通用性 模型是现实的抽象,是理想化的.它不为具体的对象所特有,因此,不同领域的数学模型经常互为借鉴,甚至通用.例如,在生态、经济、社会等领域内建模就常常借用物理领域中的模型.这一属性也体现了数学模型应用的广泛性.

数学模型知识综合性 数学模型与任何科学领域都是相结合的,在具体数学建模工作中,必须要有一定实际问题的背景知识,常常还需要熟悉问题相关领域科学知识.为了求得数学模型的解,一般问题都需要计算机辅助.因此,数学建模需要综合的知识和能力,有时需要团队的合作.

数学模型的局限性 数学模型是实际问题的抽象、简化,因此由数学模型得到的结果常是问题的近似解,把它代回到实践中去时,就要考虑忽略掉的那些因素的影响.由于人们认识能力和科学发展水平的限制,许多现实的问题还不能完全用数学模型来描述.

1.1.4 数学模型的分类

按照不同的分类标准,数学模型可以分成不同的类别,下面介绍常用的几种.

按照模型的应用领域(或所属学科) 如人口模型、交通模型、环境模型、生态模型、城镇规划模型、水资源模型、再生资源利用模型、污染模型等.范畴更大一些则形成许多边缘学科,如生物数学、医学数学、地质数学、数量经济学、数学社会学等.

按照建立模型的数学方法(或所属数学分支) 如初等数学模型、几何模型、微分方程模型、图论模型、马氏链模型、规划论模型等.按第一种方法分类的数学模型教科书中,着重于某一专门领域中用不同方法建立模型,而按第二种方法分类的书里,是用属于不同领域的现成的数学模型来解释某种数学技巧的应用.

按照模型的表现特性 确定性模型和随机性模型:取决于是否考虑随机因素的影响;近年来随着数学的发展,又有所谓突变性模型和模糊性模型;静态模型和动态模型:取决于是否

考虑时间因素引起的变化;线性模型和非线性模型:取决于模型的基本关系;离散模型和连续模型:指模型中的变量(主要是时间变量)取为离散还是连续的.

按照建模目的 描述模型、分析模型、预报模型、优化模型、决策模型、控制模型等.

按照对模型结构的了解程度 白箱模型、灰箱模型、黑箱模型.这是把研究对象比喻成一只箱子里的机关,要通过建模来揭示它的奥妙.白箱主要包括用力学、热学、电学等一些机理相当清楚的学科描述的现象以及相应的工程技术问题,这方面的模型大多已经基本确定,还需深入研究的主要是优化设计和控制等问题.灰箱主要指生态、气象、经济、交通等领域中机理尚不十分清楚的现象,在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多工作要做.黑箱则主要指生命科学和社会科学等领域中一些机理(数量关系方面)很不清楚的现象.

1.2 数学建模的一般步骤

1.2.1 数学建模一般步骤

数学建模要经过哪些步骤,其实并没有一个固定的模式.这与实际问题的性质、建模的目的等因素有关.数学建模只有一个相对稳定的流程:模型准备、模型假设、模型构成、模型求解、模型评价、模型检验和模型应用几个阶段.数学建模正是通过这些阶段完成从现实对象到数学模型,再从数学模型回到现实对象的循环.数学建模的一般步骤如图 1-1 所示.

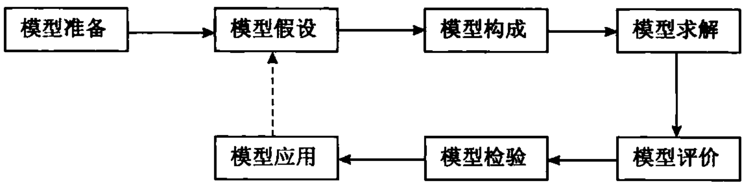


图 1-1

模型准备 首先要了解问题的实际背景,明确建模的目的,搜集建模必需的各种信息如现象、数据等,尽量弄清对象的特征,由此初步确定用哪一类模型.情况明才能方法对,这一步一定不能忽视,碰到问题要虚心向从事实际工作的同志请教,尽量掌握第一手资料.要澄清什么是已知的,什么是要求的,是确定型的还是随机型的问题,等等.根据建模的对象和目的充分发掘解题的信息,如事实、资料等,并按要求收集必要的数据,数据必须符合所要求的精确度,在澄清问题的同时要着手对问题进行抽象和简化.

模型假设 根据对象的特征和建模的目的,对问题进行必要的、合理的简化,用精确的语言作出假设,可以说是建模的关键一步.一般地,一个实际问题不经过假设简化就很难翻译成数学问题,即使可能,也很难求解.不同的简化假设会得到不同的模型.假设作得不合理或过于简单,会导致模型失败或部分失败,于是应该修改和补充假设;假设作得过分详细,试图把复杂对象的各方面因素都考虑进去,可能很难甚至无法继续下一步的工作.通常,作假设的依据,一是出于对问题内在规律的认识,二是来自对数据或现象的分析,也可以是两者的综合.作假设时既要运用与问题相关的物理、化学、生物、经济等方面的知识,又要充分发挥想象力、洞察力和判断力,善于辨别问题的主次,果断地抓住主要因素,舍弃次要因素,尽量将问题线性化、均匀化.经验在这里也常起重要作用.写出假设时,语言要简洁明确没有歧义,就像做习题时写出已知条件一样.

模型构成 根据所作的假设分析对象的因果关系，利用对象的内在规律和适当的数学工具，构造各个量（常量和变量）之间的等式（或不等式）关系或其他数学结构. 这里除需要一些相关学科的专门知识外，还常常需要较广阔的应用数学方面的知识，以开拓思路. 当然不能要求对数学学科门门精通，而是要知道这些学科能解决哪一类问题以及大体上怎样解决. 建模时还应遵循的一个原则是，尽量采用简单的数学工具，因为你建立的模型总是希望能有更多的人了解和使用，而不是只供少数专家欣赏.

模型求解 可以采用解方程、画图形、证明定理、逻辑运算、数值计算等各种传统的和近代的数学方法，特别是计算机技术求解. 值得注意的是许多数学模型往往是很复杂、很难的. 要根据实际情况对模型做简化，使得解析或数值求解成为可能.

模型分析 对模型解答进行数学上的分析，有时要根据问题的性质分析变量间的依赖关系或稳定状况，有时是根据所得结果给出数学上的预测，有时则可能要给出数学上的最优决策或控制，不论哪种情况还常常需要进行误差分析、模型对数据的稳定性或灵敏性分析等.

模型检验 把数学上分析的结果翻译回到实际问题，并用实际的现象、数据与之比较，检验模型的合理性和适用性. 这一步对于建模的成败是非常重要的，要以严肃认真的态度来对待. 模型检验的结果如果不符合或者部分不符合实际，问题通常出在模型假设上，应该修改、补充假设，重新建模. 有些模型要经过几次反复，不断完善，直到检验结果获得某种程度上的满意. 如果模型与实际问题差异较大，就要重新分析假设的合理性，将合理部分保留，不合理部分修改，对实际问题中的主次因素再次分析. 如果某一因素因被忽略而使前面部分失败，则再建立模型时把它考虑进去. 有时可能要去掉一些变量，改变一些变量的性质，如把变量看成常量，连续变量看成离散变量，离散变量看成连续变量. 或改变变量之间的函数关系，如线性改为非线性，非线性改为线性. 有时还需要改变约束条件（增加、减少或修改约束条件）.

模型应用 经过检验与完善的数学模型可以投入应用，而应用的方式自然取决于问题的性质和建模的目的. 数学模型常用于分析和优化现有系统，或者用于预测与控制未来系统. 一般来说，建模是预测的基础，而预测又是决策与控制的前提.

应当指出，并不是所有建模过程都要经过这些步骤，有时各步骤之间的界限也不那么分明. 建模时不应拘泥于形式上的按部就班，有时候会跳过其中的某些步骤，或者增加一些步骤.

1.2.2 一个具体的数学建模实例——人口增长模型

问题描述

目前，人口问题已成为人类面临的首要问题. 人口增长过快，尤其是 20 世纪 70 年代到 80 年代，世界人口增加 10 亿仅仅用了 12 年，而地球上可供人类利用的资源是十分有限的. 有人预计，到 21 世纪中叶，世界人口将超过 100 亿. 人口的迅速膨胀，特别是发展中国家过高的人口增长率成为非常严重的问题. 面临这样的现实问题，人类必须进行自我控制，采取必要的措施抑制过快的人口增长率. 人口的基数、出生率和死亡率的相对高低、男女的比例、人口的年龄组成、工农业生产力水平、营养、医疗、人口素质和环境保护状况等诸因素都是影响人口增长的因素. 试建立一个数学模型，对某一国或世界人口做出增长预测，为正确的人口政策提供科学的依据.

模型 I—— 简单模型

模型的假设与符号说明 —— 简单模型

从问题的描述中可以看出，人口增长是一个非常复杂的问题，与许多因素有关. 如果把这些因素都考虑在内的话，所建立的数学模型将是十分复杂的. 数学建模的关键就在于把复杂的问题进行合理地简化，寻找主要矛盾，抓住主要因素，舍弃次要因素，在一定假设的基础上运用所掌握的数学知识或工具建立数学模型.

经分析，假设人口增长仅与人口基数和增长率有关，这两项即为主要因素，暂时不考虑其他因素. 符号说明如下：

N_0：当年的人口基数；

r：人口的年增长率，且在一定的时期内保持不变；

N_k：k 年后的总人口.

模型的建立 —— 简单模型

使用初等数学方法，根据上面的假设可建立下面的数学模型：

$$N_k = N_0 \cdot (1 + r)^k$$

模型的求解 —— 简单模型

本例中模型已经是计算总人口的最终表达式，无需再求解.

模型的分析与检验 —— 简单模型

在本例中，要想对模型进行检验，必须搜集和获得足够的数据. 可以通过网络或者相关的档案资料查阅. 以我国人口问题为例：根据人口部门普查的数据，1990 年 7 月 1 日，我国人口为 11.6 亿，即 $N_0 = 11.6$. 汇总过去 8 年的历史数据知 $r = 1.48\%$. 由上述模型计算知，10 年后，即 2000 年 7 月 1 日，我国的总人口应为：

$$N_{10} = 11.6 \times (1 + 0.0148)^{10} = 13.44(亿)$$

但是，根据人口普查的实际数据，在 2000 年我国总人口为 12.9533 亿.

模型的评价与应用 —— 简单模型

简单模型的理论计算结果和实际的人口普查数据不符，说明所建的简单模型不能用于我国人口的精确预测，模型的假设阶段可能出了问题. 经仔细分析可知，问题在于把人口年增长率 r 当成固定不变的！实际上，人口增长率 r 会随着时间或政策而改变. 例如，我国实行的计划生育政策就会抑制 r 的快速增长.

因此，上述简单模型并不能很好地预测人口，需要修改假设，重新建模. 于是有下面的数学模型.

模型 II—— 马尔萨斯(Malthus) 模型

模型假设与符号说明 —— 马尔萨斯(Malthus) 模型

与上一个简单模型一样，仍然认为人口增长与人口基数和增长率有关，这两项为主要因素. 但人口增长率不是常量，而是与时间有关的变量.

因为人口的总数很大，可以近似地认为人口的变化是时间的连续可微函数. 故可以用微分方程来描述人口的增长过程（在实际建模的过程中，经常需要把离散的问题连续化，或是把连续的问题离散化）. 符号说明如下：

$N(t)$：t 时刻的人口总数；

$r(t, N(t))$：t 时刻人口的增长率，它与时刻 t 及该时刻的人口有关.

模型的建立 —— 马尔萨斯(Malthus)模型

因为只考虑人口的基数和增长率，其他因素的影响暂不考虑，所以在 t 到 $t+\Delta t$ 的时间内人口总数增长为

$$N(t+\Delta t)-N(t)=r(t,N(t))\cdot N(t)\cdot \Delta t$$

方程两端同除以 Δt，并令 $\Delta t\to 0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=r(t,N(t))\cdot N(t) \tag{1.1}$$

英国人口统计学家 Malthus(1766－1834) 在查看了 100 多年来人口资料后发现，人口的出生率和死亡率几乎都可以看成常数，因而两者之差即人口的增长率 $r(t,N(t))$ 也可以看成常数. 于是他在《人口原理》中提出了闻名于世的Malthus人口模型. 在该模型中，Malthus令 $r=r(t,N(t))$ 为常数：

$$\begin{cases}\dfrac{dN(t)}{\mathrm{d}t}=r\cdot N(t)\\ N(t)\mid_{t=t_0}=N_0\end{cases} \tag{1.2}$$

模型求解 —— 马尔萨斯(Malthus)模型

可以用分离变量的方法求解，也可以借助专门的数学软件(如 Mathematica 求解) 方程(1.2)，如下所示：

```
In[9]:= DSolve[{y'[x] = r y[x], y[t0] = N0}, y, x]

Out[9]= {{y → Function[{x}, e^(r x-r t0) N0]}}
```

即，求解的结果为

$$N(t)=N_0e^{r(t-t_0)} \tag{1.3}$$

该式是个指数方程，称为 Malthus 的人口增长模型. 这个人口增长模型表明，人口将以公比为 e^r 的等比级数的速度增长. 当 $r>0$ 时，人口按照指数规律无限增长，故又称指数增长模型.

模型的分析与检验 —— 马尔萨斯(Malthus)模型

比较历年的人口统计资料，可以发现人口增长的实际情况与马尔萨斯模型的计算结果基本吻合. (1.3) 式的一个重要特征是人口增长一倍所需要的时间是一个常数. 如设 $t=t_0$ 时人口为 x_0，且 $t=t_0+T$ 时人口增长到 $2x_0$，则由 $x_0e^{rT}=2x_0$ 解得 $T=\dfrac{\ln 2}{r}$. T 即为人口增长一倍所需要的时间. 据估计，1926 年世界人口为 15 亿，在 1926 年至 1961 年期间人口的增长率约为 2%，用(1.3) 式计算得 1961 年世界人口应为 $N(35)=15\times e^{0.02\times 35}\approx 30.2063$(亿). 而实际统计表明，1961 年世界人口为 30.6 亿. 模型和实际情况吻合得较好.

但是，马尔萨斯模型很明显是一个没有上限、无限增长的人口模型. 地球上有限的资源不可能供养无限膨胀的人口，这个模型在预测人口的长期变化时肯定是行不通的.

模型 III——Logistic 模型

模型假设与符号说明 ——Logistic 模型

在人口稀少而资源相对比较丰富时，人口增长得较快，在短时间内人口增长率基本上是一个常数，Malthus 模型在这种情况下是适用的. 但当人口总数发展到一定水平后，会产生许多新的问题，如食物短缺、环境恶化、疾病传播等，导致死亡率增加，于是人口的增长率(出生

率减去死亡率）反而会降低．符号说明如下：

r：人口的内禀增长率；

K：环境可容纳的人口的最大数量；

$r\cdot\left(1-\frac{N}{K}\right)$：人口的增长率，该增长率与人口 N 有关，也与 K 有关．

模型建立 ——Logistic 模型

人口的增长率 $r\cdot\left(1-\frac{N}{K}\right)$ 是人口 N 的减函数，当人口 $N=K$ 时，人口达到最大数量，$r\cdot\left(1-\frac{N}{K}\right)=0$，人口停止增长．于是有

$$\begin{cases}\dfrac{dN(t)}{\mathrm{d}t}=r\cdot N(t)\cdot\left(1-\dfrac{N}{K}\right)\\ N(t)\mid_{t=t_0}=N_0\end{cases}\tag{1.4}$$

模型求解 ——Logistic 模型

仍用 Mathematica 软件求解方程(1.4)，结果如下：

```
In[18]:= DSolve[{y'[x] == r*y[x]*(1-y[x]/K), y[t0] == x0}, y, x]

    Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions
      may not be found; use Reduce for complete solution information. More…

Out[18]= {{y → Function[{x}, e^(r x) K x0 / (e^(r t0) K + e^(r x) x0 - e^(r t0) x0)]}}
```

整理可得：

$$N(t)=\frac{K}{1+\left(\dfrac{K}{N_0}-1\right)e^{-r(t-t_0)}}\tag{1.5}$$

模型检验 ——Logistic 模型

对 Logistic 模型做理论分析，可以得出下列结论：

(1) $\lim\limits_{t\to\infty}N(t)=K$ 即不管开始时人口处于什么状态，随着时间的推移，人口总数最终都将趋于其环境的最大容量．

(2) 当 $N(t)<K$ 时，$r\cdot\left(1-\frac{N}{K}\right)>0$．人口保持增长的态势；当 $N(t)=K/2$ 时，人口增长率最大，此后人口增长率逐渐减小趋于零，总人口也随之趋于稳定．

1945 年克朗皮克（Crombic）做了一个人工饲养小谷虫的实验，数学生物学家高斯（E. F. Gauss）也做了一个原生物草履虫实验，实验结果都和 Logistic 模型十分吻合．大量的实验资料表明用 Logistic 模型来描述种群数量的变化，效果还是相当不错的．

1.3　数学建模对学生能力的培养

开设数学建模课程的主要目的并不是简单地传授数学知识，而是为了提高学生的综合素质，增强他们应用数学知识解决实际问题的能力．数学建模的每一步中都蕴含着对学生的锻炼．在调查研究阶段，需要用到观察能力、分析能力和数据处理能力；在提出假设阶段，需要用到想象力和归纳简化的抽象思维能力；模型求解阶段，要用到计算机工具的应用能力；撰写论文阶段，要用到写作能力，等等．数学建模竞赛的时间有限，如果其中用到了学生以前没有学

习过的知识，要想在最短的时间内迅速掌握这些知识的关键内容并成功运用，对学生的学习能力是个极大的考验．在所有的能力中，最重要的应该是变通的能力．总有例外的现象，总有意想不到的问题，当一条路走不通时，能不能灵活变通，换一条路，采用另外一种方法解决问题，这才是个人综合素质高低的最终评判．

例 1　某人平时下班后，总在固定的时间到达车站．他妻子每日在固定的时间从家里出发，到达该车站接他回家．有一天，他比平时提前 30 分钟到达车站，于是此人就沿着平时妻子来接他的方向步行回家，在途中遇到妻子后乘车到家．这一天，此人比平时提前了 10 分钟到家．问：此人当日总共步行了多长时间？

【分析】假如妻子当日在途中遇到他后，载着他仍旧开往车站，然后再一同回家，那么此人就不会比平时提前到家．提前的10分钟时间从何而来？显然是由于节省了从他们的相遇点到车站，又从车站到相遇点的车行时间．往返需要 10 分钟，所以从相遇点到车站需要 5 分钟．而此人提前 30 分钟到达车站，故相遇时他已经步行了 30 － 5 ＝25 分钟．

假定此人平时于 8:00 到达车站．妻子每日早 7:00 从家里出发，正好 1 小时后达到车站．然后两人一同回家，到家时应该为 9:00．如果当日提前 10 分钟到家，则妻子从家里出发后，于 7:55 在途中遇到此人．此人当日提前 30 分钟到达车站，故应于 7:30 到达车站，所以在遇到妻子之前，此人已经步行了 7:55 － 7:30 ＝25 分钟．

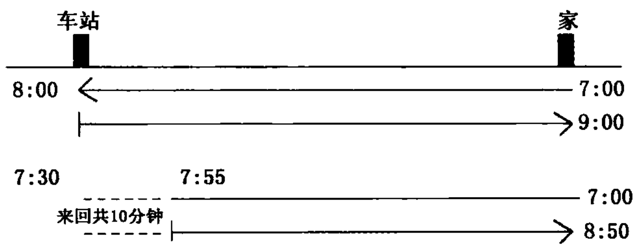


图 1-2

例 2　某种池塘浮萍生长速度极快，温度适宜时，每一天都能把其在池塘中的覆盖面积扩大为前一天的 2 倍．已知从发现有浮萍开始，64 天后该浮萍正好铺满了整个池塘．问：铺满 1/2 池塘需要几天？

答：63 天．

例 3　勾股定理证明．加菲尔德是美国第 20 届总统，在一次国会会议的休息期间，突发奇想，用直角三角形证明了勾股定理，并被公认为迄今为止最简单的证明．

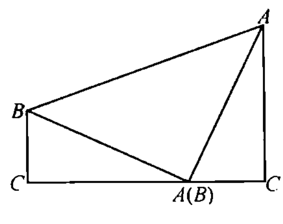


图 1-3

证明　将直角三角形 ABC 绕直角 C 翻转 90 度后如图 1-3 拼接．记直角边 $BC=a$，$AC=b$，斜边 $AB=c$．则直角三角形的面积为 $S=\frac{1}{2}ab$．图 1-3 外框梯形的面积为$\frac{1}{2}(BC+AC)(AC+BC)=S_{\triangle 1}+S_{\triangle 2}+S_{\triangle 3}$，于是有

$$\frac{1}{2}(a+b)\cdot(b+a)=\frac{1}{2}a\cdot b+\frac{1}{2}a\cdot b+\frac{1}{2}c\cdot c$$

整理后得：

$$a^2+b^2=c^2$$

例 4　餐馆每天都有大量的盘子需要清洗．为了保证洗涤效果，需要先用冷水粗洗一次，