



航 / 天 / 动 / 力 / 学 / 研 / 究 / 丛 / 书

ORBIT DETERMINATION
AND CONTROL FOR
DEEP SPACE EXPLORATION

深空探测 轨道测定与控制



航天飞行动力学技术重点实验室 编著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

《航天动力学研究》丛书

深空探测轨道测定与控制

航天飞行动力学技术重点实验室 编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

《航天动力学研究》丛书汇集了航天飞行动力学技术重点实验室在航天动力学领域开展科研试验、预先研究、学术交流、对外合作等活动过程中所产生出的优秀成果。本书为该丛书第一辑,以“深空探测轨道测定与控制”为主题,共收录 21 篇论文,来源于“嫦娥二号”、“萤火一号”等深空探测任务以及实验室与南京大学、国防科技大学、东南大学、维也纳科技大学等国内外一流高校合作开展的研究项目,内容涵盖深空探测航天器的轨道特征分析、优化设计和控制、深空探测测控技术等方面的理论分析结果和工程应用成果。

本书可供从事航天动力学技术研究的科研人员使用,也适合高校航天相关专业研究生使用。

图书在版编目(CIP)数据

深空探测轨道测定与控制/航天飞行动力学技术重点实验室编著. —北京:国防工业出版社,2011.12
(航天动力学研究丛书)
ISBN 978-7-118-07907-4

I. ①深... II. ①航... III. ①航天器轨道-测量 ②航天器轨道-控制 IV. ①V556.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 252416 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京嘉恒彩色印刷有限责任公司

新华书店经售

*

开本 889×1194 1/16 印张 8½ 字数 236 千字

2011 年 12 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 定价 38.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

《航天动力学研究》丛书编审委员会

名誉主任 沈荣骏(院士)

主任 陈宏敏

副主任 麻永平 童斌

顾问 李济生(院士) 余梦伦(院士) 魏奉思(院士)

于起峰(院士) 李泽椿(院士) 吴一戎(院士)

陈炳忠 隋起胜 周建平 吴伟仁 刘林

秘书长 贺军

委员(按姓氏笔画排序)

万卫星 王赤 王飞雪 王劲松 平劲松 朱民才

李广云 李革非 张继贤 罗建军 周建华 房建成

孟桥 赵长印 胡军 胡松杰 皇甫堪 袁建平

郭树人 曹喜滨 葛林林(澳大利亚) 董光亮 韩崇昭

谢剑锋 廖新浩 濮祖荫

《航天动力学研究》丛书编辑委员会

主 编 唐歌实

主 任 周 率

编 辑 李 黎 刘荟萃 韩松涛

李 颢 曹建峰 陈 略

编 务 王 美 王 健 李 斌

序 言

航天动力学是研究航天器和运载器在飞行中所受的力及其在力作用下的运动的学科。航天动力学是我国航天事业发展的一个重要支撑学科,随着载人航天、月球探测、交会对接和深空探测等航天任务的展开,我国的航天动力学研究取得了一个又一个的成就,也遇到了越来越多的挑战。航天动力学是一个需要持续推动、不懈探索的学术领域,需要广大航天科技工作者承担起历史赋予的使命,夯实基础,脚踏实地,开拓创新,推动我国的航天事业向着世界科技高峰不断攀登。

《航天动力学研究》丛书将提炼航天飞行动力学技术重点实验室在航天动力学领域开展科研试验、预先研究、学术交流、对外合作等活动过程中的优秀成果,以论文、研究报告等形式进行展示交流,这是该实验室在开放交流方面走出的十分重要的一步。该丛书拟设置十个专题:深空探测轨道测定与控制,交会对接,视觉导航与遥操作,轨道与姿态动力学,深空探测信号处理,精密定轨,空间天气及航天应用,火星探测,航天任务规划与控制,小卫星探测与轨道测定。

《航天动力学研究》丛书的陆续出版,将为航天动力学领域的研究人员提供良好的展示与交流平台,并将大力促进科学研究成果尽快向我国航天工程应用的转化。它不仅是航天领域最新工程任务和科研技术进展的直播窗口,也是相关专业科技工作者学术工作的展示舞台,同时还是国内外科研机构相互学习的交流基地。

祖国航天事业的蓬勃发展赋予了我们光荣而艰巨的历史重任,希望《航天动力学研究》丛书能够推动航天动力学领域的发展,为祖国的航天事业做出贡献。

沈荣骏

2011年10月1日

前 言

随着我国航天工程技术的不断发展,深空探测已成为继卫星应用、载人航天之后的又一重要航天技术发展领域。伴随着“嫦娥”系列绕月探测卫星的发射和运行,以及“嫦娥二号”奔赴日地 L2 点延寿试验的顺利实施,我国已经成功迈出深空探测的第一步。轨道测定与控制是深空探测任务中测控领域的核心技术,关系到任务的进程与成败。

深空轨道测定,包含对航天器的距离、速度与方向这三类基础观测量的测量及轨道确定。由于深空航天器具有飞行距离远、信号衰减强、传播延迟大和观测几何差的特点,给传统的轨道测定技术带来了很多新问题。针对这一现状,国际上相继开展了一系列针对现有技术的改进和新技术的研究工作;国内在此领域的研究虽然起步较晚,但近年来发展迅速,涌现出了一批具有创新性、前瞻性和实用性的科技成果,为提高深空航天器轨道测定的精度奠定了基础。

深空轨道控制,是指对深空航天器的质心施以外力,以改变其运动轨迹的技术。所谓“外力”,包含航天器推进系统产生的反作用推力及客观存在的外力,如气动力、太阳辐射压力、电磁力和其他天体引力等。

深空探测轨道测定与控制技术在深空探测任务中起着举足轻重的地位,因此在《航天动力学研究》丛书中,第一辑即开展关于“深空探测轨道测定与控制”的专题研究,对于呈现此领域研究成果以及促进其技术发展具有重要的意义。

对航天领域的研究,是人类智慧与宇宙力的博弈。中国力学学会创始人之一钱学森院士,以其在空气动力学、航空工程、喷气推进、工程控制论、物理力学等技术科学领域的开创性贡献被誉为“中国航天之父”、“中国导弹之父”、“人民科学家”。

2011年,航天飞行动力学技术重点实验室联合中国力学学会、北京航天飞行控制中心、清华大学航天航空学院等四家单位共同主办了“第三届全国深空轨道设计竞赛”,大赛题目以太阳系八大行星和小天体探测为背景,探测目标以交会并驻留太阳系八大行星为主,同时以飞越“钱学森星”等小天体作为次要探测目标。

2011年12月11日,是钱学森先生诞辰一百周年纪念日,为继承和发扬老一辈科学家“严谨、求实、爱国、奉献”的优良传统,弘扬“两弹一星”和“载人航天”精神,激励航天领域的后起之秀,“第三届全国深空轨道设计竞赛研讨会暨纪念钱学森诞辰一百周年大会”在北京航天城隆重召开。

2011年12月11日,《航天动力学研究》丛书第一辑《深空探测轨道测定与控制》在国防工业出版社正式出版。

航天飞行动力学技术重点实验室

2011年12月11日

目 录

大行星和月球环绕型探测器的轨道特征	刘林(1)
“嫦娥二号”卫星拓展试验轨道确定	曹建峰,胡松杰,刘磊,等(11)
深空探测器运行全程的精密定轨	汤靖师,刘林,杨志涛(17)
地月转移轨道误差分析和中途修正	赵玉晖,侯锡云,刘林(24)
“嫦娥二号”飞往日地系 L2 点轨道设计与控制	刘勇,刘磊,李明涛,等(31)
太阳系小天体探测中的轨道问题	周垂红,刘林(39)
基于微分进化的多目标多任务深空探测轨道优化设计	张仁勇,罗建军,曹静,等(42)
连续推力最短时间转移轨道设计	高怀,朱战霞(49)
First VLBI2010 Simulations with VieVS	Jing Sun, Johannes Boehm, Geshi Tang(55)
虚拟无线电航天测控系统	王元钦,郑海昕,侯孝民,等(59)
深空探测地面网的时间同步技术	龚航,黄新明,朱祥维,等(64)
用于深空探测的宽带多通道无线电接收机	于泉涛,孟桥,平劲松,等(72)
基于“嫦娥二号”卫星的侧音信号处理分析	韩松涛,唐歌实,陈略,等(78)
深空天线组阵技术研究	史学书,洪家财,侯孝民等(82)
开环测量中星载晶振频率稳定性影响分析	陈明,刘庆会,平劲松,等(88)
某卫星动量轮遥测异常跳变分析	王友平,刘景勇,赵金波,等(94)
一种基于漂星的卫星远程测控方案设计	陈星星,邵华,徐辉,等(98)
同波束干涉测量技术的数学模型及仿真验证	刘荟萃,唐歌实,周率,等(103)
卫星标准化测控管理研究与应用	王俊彦,姜波,王倩倩,等(107)
火星探测的现状和发展趋势	李黎,韩松涛,陈略等(112)
深空干涉测量技术现状及发展趋势分析	唐歌实,陈略,王美,等(118)

CONTENS

Dynamics of Orbiters Around the Moon and Other Planets of the Solar System	Liu Lin(1)
Orbit Determination for Chang'e-2 Extended Mission	Cao Jianfeng, Hu Songjie, Liu Lei, et al. (11)
A Complete Precise Orbit Determination Strategy for Deep Space Explorer	Tang Jingshi, Liu Lin, Yang Zhitao(17)
Propagation of Errors in Moon Transfer Trajectories	Zhao Yuhui, Hou Xiyun, Liu Lin(24)
Orbit Design and Control Strategy of Chang'e-2 Flying to the Sun-Earth L2 Libration Point	Liu Yong, Liu Lei, Li Mingtao, et al. (31)
The Orbit Problem in the Exploration of Small Celestial Bodies in the Solar System	Zhou Chuihong, Liu Lin(39)
Trajectory Optimal Design for Multi-target Multi-mission Deep Space Exploration Based on Differential Evolution	Zhang Renyong, Luo Jianjun, Cao Jing, et al. (42)
Minimum-Time Transfer Trajectory Design under Continuous Thrust	Gao Huai, Zhu Zhanxia(49)
First VLBI2010 Simulations with VieVS	Jing Sun, Johannes Boehm, Geshi Tang (55)
Virtual Radio TT&C System	Wang Yuanqin, Zheng Haixin, Hou Xiaomin, et al. (59)
Time Synchronization in Deep Space Ground Network	Gong Hang, Huang Xinming, Zhu Xiangwei, et al. (64)
Wideband Multiple-channel Receivers for Deep Space Exploration	Yu Quantao, Meng Qiao, Ping Jinsong, et al. (72)
Analysis on DOR Tone Processing Based on China CE-2	Han Songtao, Tang Geshi, Chen Lue, et al. (78)
The Study of Deep Space Antenna Arraying	Shi Xueshu, Hong Jiakai, Hou Xiaomin, et al. (82)
The Frequency Stability Analysis of the Crystal Oscillator Onboard the Satellite in Open-loop Tracking	Chen Ming, Liu Qinghui, Ping Jinsong, et al. (88)
Analysis for Telemetry Abnormal of Fixed Momentum Wheel Speed of One Satellite	Wang Youping, Liu Jingyong, Zhao Jinbo, et al. (94)
Satellite Remote TT&C Project Design based on Satellite Drifting	Chen Xingxing, Shao Hua, Xu Hui, et al. (98)
Mathematic Model and Simulate of Same-beam Interferometry	Liu Huicui, Tang Geshi, Zhou Lv, et al. (103)
Satellite Management Standardization Research and Application	Wang Junyan, Jiang Bo, Wang Qianqian, et al. (107)
The Actuality and Trend of the Mars Exploration—The Reveal from the second advanced Mars School	Li Li, Han Songtao, Chen Lue, et al. (112)
Analysis of Actuality and Development Trend of Deep-Space Interferometry	Tang Geshi, Chen Lue, Wang Mei, et al. (118)

大行星和月球环绕型探测器的轨道特征

刘林^{1,2}

(1. 南京大学 空间环境与航天动力学研究所, 南京 210093;

2. 航天飞行动力学技术重点实验室 北京 100094)

摘要: 在深空探测中,为了获取目标天体有价值的信息,采用环绕型探测器(即目标天体的人造卫星)显然是主要的选择,这就需要对各种天体的卫星轨道特征有足够的了解。对于卫星而言,特别是低轨卫星,中心天体的非球形引力作用是决定其轨道特征的主要力源,因此,在确定探测方案时,不能完全套用地球卫星的知识,必须深入了解探测目标天体引力场的细节及其相应的卫星轨道特征。本文即以几个主要探测目标为例,具体阐述环绕型探测器轨道的可能形式和特征,为深空探测中的目标轨道设计提供依据。

关键词: 深空探测;大行星;月球;中心天体非球形引力位;环绕型探测器;卫星轨道特征

1 引言

由于太阳系中各大行星(包括月球)的形状和内部密度分布存在差异,它们的引力位有各自的特征,这就决定了相应的环绕型探测器的轨道及其变化规律会有明显的差别,本文将以前地球、金星、火星和月球为例,具体阐述各自卫星的轨道特征,并以必要的计算结果证实理论分析的可靠性,为相关的航天任务轨道设计提供有益的信息。尽管读者对地球及地球卫星的状况已十分了解,但作为比对的“样本”,有必要作一些更详细的阐述。

2 地球、金星、火星和月球的有关参数

2.1 地球的基本状况

地球的大小、质量和密度与金星相近,均有稠密的大气层,但自转较快,这一特征与火星相近。其基本参数如下:

$$M(\text{质量}) = 1/332\,946.0(\text{太阳质量}),$$

$$P_e(\text{公转周期}) = 365^{\text{d}}.25636306,$$

$$T_r(\text{自转周期}) = 23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}}.09053$$

地球在日心黄道坐标系中的主要轨道根数(历元 J2000.0)为

$$a = 1.00000102\text{AU}, e = 0.01670862, i = 0^{\circ}.0 \quad (2.1)$$

其中:AU 是天文单位的长度,1AU = 1.49597870 × 10⁸km。

地球平天极在 ICRF 赤道坐标系(简称 J2000.0 平赤道坐标系,这里所说的赤道即地球赤道)中的赤经、赤纬(α_0, δ_0)即为地球平天极的空间指向,如图 1 所示,其值为^[1]

$$\alpha_0 = 0^{\circ}.0 - 0^{\circ}.641T, \delta_0 = 90^{\circ}.0 - 0^{\circ}.557T \quad (2.2)$$

式中: T 为从历元 J2000.0 起算的时刻 t 所对应的儒略世纪,即

$$T = [JD(t) - JD(2000.0)]/36525 \quad (2.3)$$

由此可建立地心天球坐标系,其基本坐标面($x-y$ 平面)采用 J2000.0 地球平赤道面,而相应参考系的第一方向是春分点 γ 方向。若定义地球的自转矩阵为 $R(t)$,则有

$$R(t) = R_z(W) \quad (2.4)$$

$$W = 190^{\circ}.147 + n_r d,$$

$$n_r = 360^{\circ}.9856235$$

式中: d 即自 J2000.0 起算的儒略日。格林尼治恒星时 S_c 可由自转角 W 给出,即

$$S_c = (90^{\circ}.0 + \alpha_0) + W \quad (2.5)$$

由于自转较快,其力学扁率系数 $J_2 = 1.082 \times 10^{-3}$ 。

关于地球引力场模型,通常采用 WGS - 84 模型:
 $GM = 398600.4418\text{km}^3/\text{s}^2$, $a_e = 6378.1370\text{km}$, 部分球谐项系数列于表 1。

表 1 WGS - 84 部分谐系数
 Table 1 Part of Coefficient of Tesseral
 Harmonics of WGS - 84

l	$\bar{C}_{l,m}$	m	$\bar{S}_{l,m}$
2	$-0.48416685 \times 10^{-3}$	0	0.0
	$0.24395796 \times 10^{-5}$	1	$-0.55364556 \times 10^{-8}$
	$0.85750651 \times 10^{-6}$	2	$-0.13979548 \times 10^{-5}$
3	$0.95706390 \times 10^{-6}$	0	0.0
	$0.20318729 \times 10^{-5}$	1	$0.25085759 \times 10^{-6}$
	$0.90666113 \times 10^{-6}$	2	$-0.62102428 \times 10^{-6}$
4	$0.71770352 \times 10^{-6}$	3	$0.14152388 \times 10^{-5}$
	$0.53699587 \times 10^{-6}$	0	0.0
	$-0.53548044 \times 10^{-6}$	1	$-0.47420394 \times 10^{-6}$
	$0.34797519 \times 10^{-6}$	2	$0.65579158 \times 10^{-6}$
	$0.99172321 \times 10^{-6}$	3	$-0.19912491 \times 10^{-6}$
	$-0.18686124 \times 10^{-6}$	4	$0.30953114 \times 10^{-6}$

若用 $J_l (l \geq 2)$ 代替 $\bar{C}_{l,0}$, 带谐项系数的相应值分别如下:

$$\begin{cases} J_1 = -\sqrt{2l+1}\bar{C}_{l,0}, \\ J_2 = 1.1 \times 10^{-3}, J_l (l \geq 3) \leq O(10^{-6}) \end{cases} \quad (2.6)$$

2.2 金星的基本状况

金星是离地球最近的一颗行星,它的大小、质量和密度与地球相近,亦有稠密的大气层,但自转很慢,其基本参数如下:

$$\begin{aligned} M(\text{质量}) &= 1/408\,523.5 (\text{太阳质量}), \\ P_s(\text{公转周期}) &= 224^{\text{d}}.7 (\text{地球日}), \\ T_s(\text{自转周期}) &= 243^{\text{d}}.0 \end{aligned}$$

金星的“黄赤”交角为 $177^\circ.36$, 是逆自传行星,其平天极在 ICRF 赤道坐标系中的赤经、赤纬 (α_0, δ_0) (见图 1) 为

$$\alpha_0 = 272^\circ.76, \delta_0 = 67^\circ.16 \quad (2.7)$$

此为金星平天极的空间指向。由此可建立所需要的金心天球坐标系,其基本坐标面 (xy) 坐标面) 采用 J2000.0 金星平赤道面,而相应参考系的第一方向

即金星定向模型中的 J2000.0 地球平赤道与 J2000.0 金星平赤道的交点 Q , 见图 1。在此选择下,金星自转角将由图 1 中的 W 定义,即从点 Q 向东计量至 B (金星本初子午线方向), 可以将角度 W 看作金星上的格林尼治恒星时,亦可用类似于地球恒星时的定义,见式 (2.5), 但要注意,金星是逆自转行星。若定义金星的自转矩阵为 $R(t)$, 则有

$$R(t) = R_z(W)$$

$$W = 160.20 + n_r d, n_r = -1.4813688^\circ \quad (2.8)$$

式中: d 即自 J2000.0 起算的儒略日。

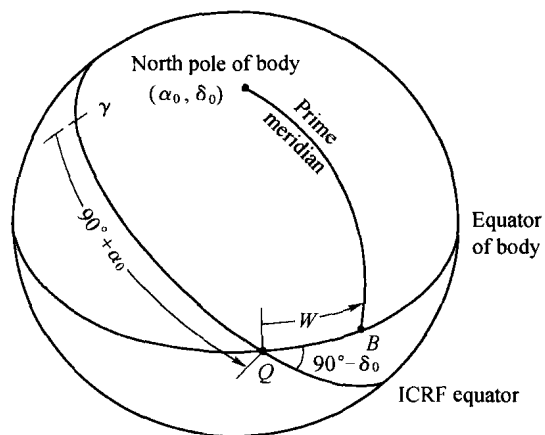


图 1 天体的定向模型

金星在日心黄道坐标系中的主要轨道根数(历元 J2000.0)如下:

$$\begin{aligned} a &= 0.72332982 \text{AU}, \\ e &= 0.00677188, i = 3^\circ.394662 \end{aligned} \quad (2.9)$$

由于自转慢,其动力学扁率系数 $J_2 = 0.45 \times 10^{-5}$, 比月球的值还小一个量级,比地球的值小两个量级。关于金星引力场模型,引用美国给出的较新的 70×70 阶模型 MGNP180U: $GM = 324858.592079\text{km}^3/\text{s}^2$, $a_e = 6051.0000\text{km}$, 部分球谐项系数列于表 2。

表 2 MGNP180U 部分谐系数
 Table 2 Part of Coefficient of Tesseral
 Harmonics of MGNP180U

l	$\bar{C}_{l,m}$	m	$\bar{S}_{l,m}$
2	$-1.969723357760 \times 10^{-6}$	0	0.0
	$2.680268978050 \times 10^{-8}$	1	$1.324780256340 \times 10^{-8}$
	$8.577798458090 \times 10^{-7}$	2	$-9.553616380010 \times 10^{-8}$
3	$7.968246371910 \times 10^{-7}$	0	0.0

(续)

l	$\bar{C}_{l,m}$	m	$\bar{S}_{l,m}$
	$2.348303842190 \times 10^{-6}$	1	$5.416288391000 \times 10^{-7}$
	$-8.535261871400 \times 10^{-9}$	2	$8.090612890690 \times 10^{-7}$
	$-1.880193062980 \times 10^{-7}$	3	$2.134850148720 \times 10^{-7}$
4	$7.158087500450 \times 10^{-7}$	0	0.0
	$-4.574232817400 \times 10^{-7}$	1	$4.916077249600 \times 10^{-7}$
	$1.263211981230 \times 10^{-7}$	2	$4.835736762340 \times 10^{-7}$
	$-1.746619213280 \times 10^{-7}$	3	$-1.164975842530 \times 10^{-7}$
	$1.725128369010 \times 10^{-7}$	4	$1.376611668820 \times 10^{-6}$

若用 $J_l(l \geq 2)$ 代替 $\bar{C}_{l,0}$, 带谐项系数的相应值分别如下:

$$\begin{cases} J_l = -\sqrt{2l+1}\bar{C}_{l,0}, \\ J_2 = 4.5 \times 10^{-6}, J_l(l \geq 3) = O(10^{-6} \sim 10^{-7}) \end{cases} \quad (2.10)$$

由于金星自转很慢, 不仅力学扁率系数 J_2 较小, 而且其值与“高”阶谐系数(包括田谐系数)并无明显差别。因此, 就非球形引力而言, 对低轨探测器轨道的摄动影响将有别于地球状况。

金星自转轴也在摆动, 据目前的理论研究结果(见文献[2])来看, 即使存在与地球同量级的岁差、章动量, 但由于金星的非球形部分很小, 对于探测器的轨道问题, 也可不予考虑。

2.3 火星的基本状况

火星是与地球类似的一颗行星, 其基本参数如下:

$$M(\text{质量}) = 1/3098710(\text{太阳质量}),$$

$$P_e(\text{公转周期}) = 687^d.0(\text{地球日}),$$

$$T_r(\text{自转周期}) = 24^h 37^m.3777,$$

在日心黄道坐标系中的主要轨道根数(历元 J2000.0)为

$$a = 1.52367934 \text{ AU},$$

$$e = 0.09340062, i = 1^\circ.849726 \quad (2.11)$$

与地球自转类似, 火星的自转轴也在空间摆动, 其结果对环火卫星的轨道而言, 同样存在岁差、章动效应。但火星的岁差、章动量较地球的相应值小, 其赤经岁差和赤纬岁差分别为 $3.8''/\text{年}$ 和 $2.2''/\text{年}$, 章动序列最大项的幅度只有 $1.1''$ 。

火星平天极在 ICRF 赤道坐标系中的赤经、赤

纬 (α_0, δ_0) (见图 1) 为

$$\alpha_0 = 317^\circ.68143 - 0^\circ.1061 T$$

$$\delta_0 = 52^\circ.88650 - 0^\circ.0609 T \quad (2.12)$$

火星自转角同样由图 1 中的 $W(\widehat{QB}$ 弧) 定义, 即从点 Q 向东计量至 B (火星本初子午线方向), 角度 W 即可看作火星上的格林尼治恒星时, 亦可用类似于地球恒星时的定义, 见式(2.5)。若定义火星的自转矩阵为 $R(t)$, 则有

$$R(t) = R_z(W)$$

$$W = 176^\circ.630 + 350^\circ.89198226 d \quad (2.13)$$

式中: d 即自 J2000.0 起算的儒略日。

火星引力场与地球有些类似, 如动力学扁率 J_2 项的大小, 亦有明显差别, 如赤道椭率、南北不对称的程度等。有多个火星引力场模型, 这里引用美国 Goddard 模型 GGM-1041C: $GM = 42828.370245291269 \text{ km}^3/\text{s}^2$, $a_e = 3397.0 \text{ km}$, 部分球谐项系数列于表 3 中。

表 3 GGM-1041C 部分谐项系数

Table 3 Part of Coefficient of Tesseral Harmonics of GGM-1041C

l, m	$\bar{C}_{l,m}$	$\bar{S}_{l,m}$
2, 0	$-0.874504613 \times 10^{-6}$	0.0
2, 1	$3.436153047 \times 10^{-10}$	$-2.681273014 \times 10^{-10}$
2, 2	$-8.458586426 \times 10^{-5}$	$4.890547215 \times 10^{-5}$
3, 0	$-1.188948864 \times 10^{-5}$	0.0
3, 1	$3.905344232 \times 10^{-6}$	$2.513932404 \times 10^{-5}$
3, 2	$-1.593364126 \times 10^{-5}$	$8.354053132 \times 10^{-6}$
3, 3	$3.502347743 \times 10^{-5}$	$2.555144464 \times 10^{-5}$

若用 $J_l(l \geq 2)$ 代替 $\bar{C}_{l,0}$, 两个模型的相应值分别如下:

$$\begin{cases} J_l = -\sqrt{2l+1}\bar{C}_{l,0}, \\ J_2 = 2 \times 10^{-3}, J_l(l \geq 3) = O(10^{-5} \sim 10^{-6}) \end{cases} \quad (2.14)$$

一个通过对轨道偏心率的影响而制约低轨卫星轨道寿命的参数为

$$\left| \frac{J_{2l-1}}{J_2} \right| \geq O(10^{-2}), l \geq 2 \quad (2.15)$$

它会导致低轨环火卫星的轨道偏心率 e 出现 $0.02 \sim 0.03$ 的长周期变幅, 将会影响其轨道寿命。

2.4 月球的基本状况

月球是一颗较大的自然卫星,没有大气,自转很慢,其基本参数如下:

$$M(\text{质量}) = 0.01230002(\text{地球质量}),$$

$$P_s(\text{公转周期}) = 27^{\text{d}}.32166155,$$

$$T_s(\text{自转周期}) = 27^{\text{d}}.32166155,$$

月球在地心黄道坐标系中的主要轨道根数(历元 J2000.0)如下:

$$\begin{cases} a = 0.0025718814 \text{ AU} = 384747.981 \text{ km}, \\ e = 0.054879905, J = 5^{\circ}.129835071 \end{cases} \quad (2.16)$$

对于月球,由于其轨道摄动变化较大,最大的周期项振幅可达 2×10^{-2} , 如有需要,可引用另一种精度较高的半分析方法,这里不再具体介绍,可参阅相关文献。

月球平天极在 ICRF 赤道坐标系中的赤经、赤纬 (α_0, δ_0) (见图 1) 为

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 269^{\circ}.9949 + 0^{\circ}.0031 T - 3^{\circ}.8787 \sin E_1 - \\ &0^{\circ}.1204 \sin E_2 + 0^{\circ}.0700 \sin E_3 - \\ &0^{\circ}.0172 \sin E_4 + 0^{\circ}.0072 \sin E_6 - \\ &0^{\circ}.0052 \sin E_{10} + 0^{\circ}.0043 \sin E_{13} \\ \delta_0 &= 66^{\circ}.5392 + 0^{\circ}.0130 T + 1^{\circ}.5419 \cos E_1 + \\ &0^{\circ}.0239 \cos E_2 - 0^{\circ}.0278 \cos E_3 + \\ &0^{\circ}.0068 \cos E_4 - 0^{\circ}.0029 \cos E_6 + \\ &0^{\circ}.0009 \cos E_7 + 0^{\circ}.0008 \cos E_{10} - \\ &0^{\circ}.0009 \cos E_{13} \end{aligned} \quad (2.17)$$

若定义月球的自转矩阵为 $R(t)$, 则有

$$R(t) = R_z(W) \quad (2.18)$$

自转角 W 和式(2.17)中出现的角度 $E_i (i=1, 2, \dots, 13)$ 的计算公式略, 见文献[1]。因在实际应用中, 通常并不采用上述 IAU2000 天体定向规范, 有更精确的坐标系选择^[3], 如 DE405 历表对应的参考系。

由于月球自转较慢, 其非球形引力位也较接近球形引力位, 动力学扁率系数 J_2 不仅较小, 而且其大小与“高”阶谐系数(包括田谐系数)并无明显差别。因此, 就非球形引力位而言, 对低轨探测器轨道的摄动影响也有别于地球低轨卫星。为了分析问题, 这里引用美国 LP75G 模型: $GM = 4902.800269 \text{ km}^3/\text{s}^2, a_s = 1738.0 \text{ km}$, 部分球谐项系

数表列于表 4。

表 4 LP75G 部分谐项系数
Table 4 Part of Coefficient of Tesseral Harmonics of LP75G

l	$\bar{C}_{l,m}$	m	$\bar{S}_{l,m}$
2	$-0.909759705421 \times 10^{-4}$	0	0.0
2	$-0.278742486316 \times 10^{-7}$	1	$0.134650039410 \times 10^{-7}$
	$0.346938467558 \times 10^{-4}$	2	$0.387455709879 \times 10^{-8}$
3	$-0.318354210680 \times 10^{-5}$	0	0.0
3	$0.264055021943 \times 10^{-4}$	1	$0.543379807817 \times 10^{-5}$
	$0.142548648260 \times 10^{-4}$	2	$0.487321014419 \times 10^{-5}$
	$0.123166082546 \times 10^{-4}$	3	$-0.176222161812 \times 10^{-5}$
4	$0.317891147722 \times 10^{-5}$	0	0.0
4	$-0.595795392676 \times 10^{-5}$	1	$0.158041640821 \times 10^{-5}$
	$-0.712685429394 \times 10^{-5}$	2	$-0.670375016705 \times 10^{-5}$
	$-0.142615915284 \times 10^{-5}$	3	$-0.134130695501 \times 10^{-4}$
	$-0.605805350181 \times 10^{-5}$	4	$0.393236088696 \times 10^{-5}$

若用 $J_l (l \geq 2)$ 代替 $\bar{C}_{l,0}$, 带谐项系数的相应值分别为如下:

$$\begin{cases} J_1 = -\sqrt{2l+1} \bar{C}_{l,0}, J_2 = 4.5 \times 10^{-6}, \\ J_3 = -2.2 \times 10^{-6}, J_4 = -2.1 \times 10^{-6}, \\ J_5 = 2.0 \times 10^{-7}, J_6 = -3.2 \times 10^{-7}, \dots \end{cases} \quad (2.19)$$

一个通过对轨道偏心率的影响而制约低轨卫星轨道寿命的参数为

$$\left| \frac{J_{2l-1}}{J_2} \right| = O(10^{-1} \sim 10^{-2}), l \geq 2 \quad (2.20)$$

它会导致低轨环月卫星的轨道偏心率 e 出现变幅可达 $0.05 \sim 0.10$ 的长周期变化, 而因 $\left| \frac{J_{2l-1}}{J_2} \right|$ 的量级接近 10^{-1} , 相比火星状况, 将会更明显地影响其低轨探测器的轨道寿命。

3 地球、金星、火星和月球各自卫星的轨道特征

3.1 大行星和月球各自人造卫星轨道的可能形式

各大行星和月球的人造卫星, 亦称轨道器 (Orbiter), 其在轨运行的特征基本与人造地球卫星类似, 但亦有很多明显差别。一般就轨道变化的主要

特征而言,可分为低轨和高轨,前者主要取决于中心天体的非球形引力和大气的影 响,而后者则受第三体的引力影响明显。但就探测任务的要求而言,下列几种类型的轨道是人们所关心的:

(1) 回归轨道,即卫星轨道周期与中心天体的自转周期成简单整数比;

(2) 中心天体同步轨道,即卫星轨道周期与中心天体的自转周期相等;

(3) 太阳同步轨道,即卫星轨道平面的进动与中心天体的公转方向相同、周期相等,亦即在中心天体上看,卫星轨道平面跟着太阳以相同速度向东“跑”;

(4) 冻结轨道,即卫星轨道的长轴(亦即拱线)方向不变。

上述四类轨道中,第一类很简单,如地球卫星,针对日照条件,要求卫星每天绕转 12 圈重复过同一地点上空,该卫星的轨道周期即为 2h。另三类轨道,对于地球、金星、火星和月球而言,各有不同的状态和特征,下面分别阐明。

3.2 中心天体同步卫星轨道的基本状况

从理论上讲,中心天体的同步卫星轨道也很简单,只要轨道周期与中心天体的自转周期相等即可,如果在中心天体的赤道上空运行,就成为一颗静止卫星。但有两个问题必需了解:一是相应的轨道半长径不能太大,否则离中心天体太远,该卫星就有可能在第三体的引力作用下,脱离中心天体而逃逸;第二个问题是这种“同步”的稳定程度,对其影响最大的是中心天体的赤道椭率,该非球形项的大小将决定其稳定范围。

(1) 地球同步卫星轨道的主要特征^[4,5]

地球同步卫星已为人们所熟悉。其轨道周期及其相应的轨道半长径为

$$T_s = 1436^m.068176, a = 42164.170\text{km} \quad (3.1)$$

对于定点在地球赤道上空的静止卫星而言,在地球赤道椭率 $J_{2,2}$ (大小由非球形引力位中的 $\bar{C}_{2,2}, \bar{S}_{2,2}$ 确定) 的作用下,赤道上空有两个稳定区域,即赤道短轴两端(东经 75° 和西经 105°) 的各一个邻近区域,在两个稳定点附近上空的東西漂移就是这一力学机制(轨道共振机制,类似于单摆现象)。而南北

漂移(实为轨道倾角的变化)则是由第三体(日、月)的引力作用所导致,倾角变化呈现长周期状态,变化幅度可达 15° ,而周期长达 50 多年。

关于轨道(或位置)东西和南北漂移现象,为了便于了解其漂移的实际状态,这里给出一个算例:

初始时刻 t_0 为 2010 年 9 月 10 日 0 时整(UTC),

轨道周期、半长径和定点经度(相对地球短轴方向)的初始偏差分别为

$$\Delta T_s = 6^m38^s, \Delta a = 10\text{km}, \Delta \lambda = 35^\circ.0$$

初始轨道倾角的偏差很小, $\Delta i = 0^\circ.005 \approx O(10^{-4})$, 即基本上定位在赤道上空,同时考虑地球非球形引力、日、月引力和太阳光压的摄动影响,即使轨道外推 40000 天(接近 110 年),卫星仍能保持在赤道短轴(东经 75°) 上空的一个邻近区域内运行,具体结果如下:

$$\begin{aligned} \Delta \lambda &= -43^\circ.13 \sim +41^\circ.32, \\ \Delta \varphi &= -15^\circ.28 \sim +15^\circ.29 \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中,东西经度漂移(即 $\Delta \lambda$ 的变化)的周期约 900 天,在该周期内与其有关的轨道半长径 a 的变化幅度为 $a \approx \pm 25\text{km}$,如图 2 和图 3 所示。

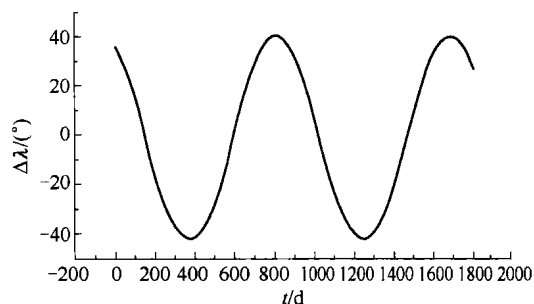


图 2 经度随时间的变化状况 $\Delta \lambda \sim (t - t_0)$

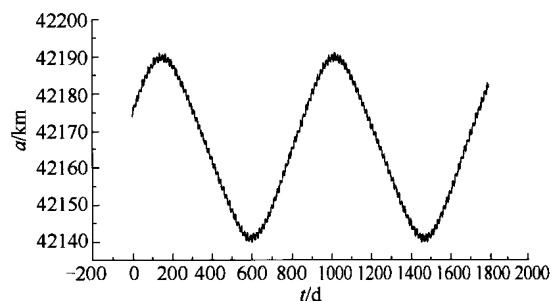


图 3 轨道半长径随时间的变化状况 $a \sim (t - t_0)$

(2) 火星同步卫星轨道的主要特征^[6,7]

根据火星自转周期确定的同步轨道的运行周期和相应的轨道半长径如下:

$$T_s = 477^m.37772,$$

$$a = 20427.68425\text{km} = 6.013448a_e \quad (3.3)$$

式中: a_e 为火星的赤道半径。如果轨道倾角为零 ($i=0^\circ$), 这就是相对火星的静止轨道。由于火星非球形引力位的二阶次项 ($J_2, J_{2,2}$) 与地球类似, 且 $J_{2,2}$ 值相对 J_2 更大一些, $\frac{J_{2,2}}{J_2}$ 的量级几乎达到 10^{-1} 。因此, 相应的轨道共振效应将更为强烈, 即探测器定位在火星赤道短轴 (火星东经 $164^\circ.7$) 上空附近更稳定。下面给出算例, 计算历元及相应的初始轨道根数如下:

2010年3月30日4时整(UTC),

$$a_0 = 20327.684233\text{km}, e_0 = 0.0001, i_0 = 0^\circ.005 \quad (3.4)$$

轨道半长径与同步轨道差 100km, 相应的运行周期与同步周期约差 11min。结果由图 4 和图 5 来体现。

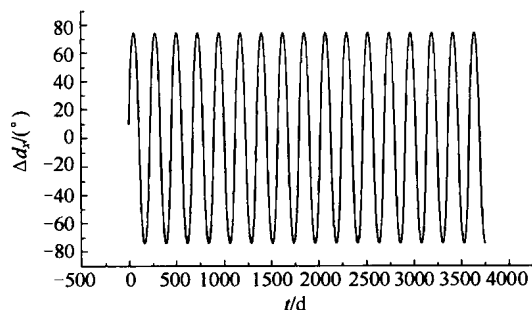


图 4 经度随时间的变化状况 $\Delta\lambda \sim (t - t_0)$

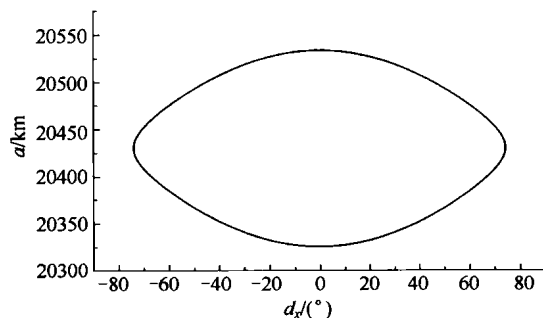


图 5 经度变化与半长径的关系 $\Delta a \sim \Delta\lambda$

图中的 $d_x = \lambda - \lambda_s$, 即经度的变化, λ_s 即火星赤道短轴的经度, 有

$$\lambda_s = 74^\circ.7 + 90^\circ = 164^\circ.7 \quad (3.5)$$

图 4 和图 5 考虑了 $J_2 + J_{2,2}$ 的摄动影响, 对赤道短轴方向定位的初始偏离量为 $10^\circ.0$ 。在这么大的运行周期和定位偏离的情况下, 卫星仍能保持在赤道短轴上空的邻近区域内运行。而对于地球同步卫星, 轨道半长径与同步轨道仅差 40km, 即使初始严格定位在赤道短轴上空 (即 $\Delta\lambda = 0^\circ.0$), 也不能保持在赤道短轴上空的摆动状态。这证实了由于火星非球形引力位的赤道扁率 $J_{2,2}$ 值相对扁率 J_2 值较大, 相应轨道变化的共振效应更为强烈, 探测器定位在火星赤道短轴 (火星东经 $164^\circ.7$) 上空附近比地球同步轨道状态更为稳定。

(3) 金星与月球的同步轨道卫星是否存在?

金星的自转速度很慢, 前面第一部分已提到, 其自转周期比公转周期还长, 长达 $243^d.0$ (地球日), 要形成同步轨道, 相应的轨道半长径达到 $153.65 \times 10^4\text{km}$, 而这一距离已超出金星的 Hill 范围^[4]大小 (其值为 $101.12 \times 10^4\text{km}$), 这样的轨道在太阳引力作用下, 很快就会远离金星, 这意味着实际上不可能存在金星同步轨道卫星。

月球与金星情况类似, 其自转速度也较慢, 自转周期为 27.3217 (地球日), 要形成同步轨道, 相应的轨道半长径也已达到 $8.845 \times 10^4\text{km}$, 而这一距离同样超出了月球的 Hill 范围大小 (其值为 $6.16 \times 10^4\text{km}$)。如果仅考虑月球的非球形引力影响, 由于赤道扁率 $J_{2,2}$ 值相对而言较大, 同步卫星定位在月球短轴 (东经 $90^\circ.0$) 上空附近也相当稳定。但是, 这样的轨道在地球引力作用下, 很快就会远离月球。如果初始轨道偏心率和倾角的大小各为 $e = 0.0001, i = 0.005^\circ$, 运行不到 2.8 天, 轨道就会被地球引力拉“扁”到离心率 e 接近 1 的程度。这同样意味着实际上不可能存在月球同步轨道卫星。

3.3 太阳同步轨道的基本状况

对于太阳同步轨道, 要求其轨道平面跟着太阳以相同速度向东“跑”, 卫星轨道平面的进动, 源于中心天体非球形引力位中扁率项 J_2 的摄动作用。

要求卫星轨道平面东进状态与太阳“绕”中心天体运行 (实为中心天体绕日公转运动) 同步, 无量纲形式的表达条件为^[4,5]

$$\dot{\Omega} = -\frac{3J_2}{2p^2} n \cos i = n, \quad (3.6)$$

式中: $p = a(1 - e^2)$; $n = a^{-3/2}$; n_s 即中心天体绕日运动角速度。由于导致卫星轨道平面旋转的非球形引力位中的偶次带谐项系数 ($J_{2l}, l \geq 2$) 的值要比 J_2 小 1~3 个量级, 其他能导致卫星轨道平面旋转的摄动因素更小, 故只考虑 J_2 项给出的条件(2.6)可体现太阳同步轨道的实际运动状态。下面分别给出地球、火星和月球的低轨太阳同步轨道的算例和结果:

(1) 每天(地球日)环绕地球运行约 14.0 圈:

$$\begin{aligned} \bar{h} &= 890.0 \text{ km}, T_s = 102^{\text{m}}.8571 \\ a &= 7271.9 \text{ km}, e = 0.0001, i = 98^{\circ}.9025 \end{aligned} \quad (3.7)$$

(2) 每天(火星日)环绕火星运行约 12.0 圈:

$$\begin{aligned} \bar{h} &= 500.0 \text{ km}, T_s = 123^{\text{m}}.1001 \\ a &= 3897.0 \text{ km}, e = 0.0005, i = 93^{\circ}.2005 \end{aligned} \quad (3.8)$$

(3) 每天(地球日)环绕月球运行约 12.0 圈:

$$\begin{aligned} \bar{h} &= 120.0 \text{ km}, T_s = 120^{\text{m}}.0 \\ a &= 1860.3 \text{ km}, e = 0.0010, i = 134^{\circ}.9120 \end{aligned} \quad (3.9)$$

关于金星的环境型探测器, 不能以太阳同步轨道的形式运行。原因是金星自转太慢, 几乎呈现球状, 其非球形引力位中的扁率项 J_2 很小: $J_2 = 4.5 \times 10^{-6}$, 该项摄动影响的结果 $\dot{\Omega}$ 远远小于太阳的东进速度 n_s ^[8], 不可能形成太阳同步轨道。

3.4 冻结轨道的基本状况

冻结轨道即拱线静止轨道, 亦即卫星轨道的近星点指向不变。就轨道的近星点方向不变而言, 冻结轨道有两类: 临界倾角轨道和任意倾角(除临界倾角外)的冻结轨道。

关于临界倾角轨道, 由中心天体非球形引力位中扁率项 J_2 的长期摄动所确定。近星点幅角 ω 的长期变率 $\dot{\omega}$ 主项的无量纲表达式如下^[4,5]:

$$\dot{\omega} = \frac{3J_2}{2p^2} n \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) \quad (3.10)$$

当条件 $\dot{\omega} = 0$ 满足时, 近星点指向不变, 相应的倾角称为临界倾角, 记作 i_c , 有

$$i_c = 63^{\circ}26', 116^{\circ}34' \quad (3.11)$$

这类冻结轨道涉及轨道共振效应^[4], 其稳定程度将受轨道偏心率的大小制约, 偏心率越大, 稳定性越

好。俄罗斯(前苏联)通信卫星的一种型号 Molniya, 就是大偏心率的临界倾角冻结轨道。由于地球同步静止轨道为高纬度地区传输信号需要耗费较大的能量, 改用 Molniya 型号的冻结轨道作为通讯卫星的工作轨道, 可以降低能量耗费。由于 Molniya 卫星将远地点保持指向苏联上空, 使用 3 颗这样的卫星即可保证苏联全境 24 小时信号的覆盖。

通常所说的冻结轨道是指对应任一倾角的特殊轨道。这一特殊轨道实际上对应一个平均轨道解, 也就是将卫星运动方程中所有短周期项(即由快变量构成的周期项)消除后的一个特解。主要针对低轨卫星而言, 相应的平均系统取决于中心天体非球形引力位中的带谐项 $J_l (l \geq 2)$, 该系统退化为一个 4 维动力系统, 涉及 a, e, i, ω 四个轨道根数。相应的冻结轨道解有下列两种可能^[4]:

$$\omega = 90^{\circ} \text{ 或 } 270^{\circ}$$

给定轨道半长径和倾角(a, i)后, 即可由下式确定相应的轨道偏心率 e :

$$e = \left| \frac{J_3}{J_2} \right| \frac{1}{2a} \sin i [1 + O(\varepsilon^2)] \quad (3.12)$$

式中: ε^2 表示相对 $\left(\frac{J_3}{J_2}\right)$ 的高阶小量。如果 $\left(\frac{J_3}{J_2}\right) > 0$,

对应冻结轨道解 $\omega = 270^{\circ}$, 反之, $\left(\frac{J_3}{J_2}\right) < 0$, 对应冻结轨道解 $\omega = 90^{\circ}$ 。

根据上述分析, 地球和金星冻结轨道解的近星点幅角为 $\omega = 90^{\circ}$, 而火星和月球冻结轨道解的近星点幅角则为 $\omega = 270^{\circ}$ 。另外, 主要奇次带谐项 J_3 与扁率项 J_2 的相对大小决定了冻结轨道解对应的轨道偏心率的大小, 对地球、金星、火星和月球而言, 冻结轨道偏心率 e 的量级分别为 10^{-3} , 10^{-1} , 10^{-2} 和 10^{-1} 。

3.5 关于轨道寿命状况

对于低轨卫星, 大气(如果存在)耗散效应是决定轨道寿命的主要因素, 其表现特征是轨道半长径 a 和偏心率 e 随时间增长不断减小, 即轨道不断变小变圆。除此之外, 还有另一种机制, 即在中心天体非球形引力和第三体引力摄动下, 卫星轨道偏心率 e 的长周期变化 $\Delta e_i(t)$, 会导致轨道近星点的高度降低, 达到与中心天体相撞的状态, 轨道运行

终止。

根据卫星运动理论,在中心天体非球形引力和第三体引力摄动下,低轨卫星轨道偏心率 e 的长周期变化 $\Delta e_l(t)$ 由下式表达^[3-5,9-12]:

$$\begin{aligned} \Delta e_l(t) &= e_l(t) - e_l(t_0) \\ &= \mu(i) [\sin\omega(t) - \sin\omega(t_0)] + \\ &\quad O(em', eJ_{2l}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\mu(i) = \sum_{l(2) \geq 3} (-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{l-1}{3p^{l-2}} \left(\frac{J_l}{J_2} \right) F_l^*(i) \quad (3.14)$$

式(3.14)求和中, $p = a(1 - e^2)$, $l(2)$ 表示取值“步长”为 2, 即 $l(2) = 3, 5, \dots$ 。第二大项 $O(em', eJ_{2l})$ 表示第三体摄动和中心天体非球形引力位中的偶次带谐项部分, 其影响大小均含 e 因子, 故不重要。关于非球形引力位中奇次带谐项引起的 e 的长周期变化主项不带有 e 因子, 而偶次带谐项引起的变化均含有 e 因子, 这是不难理解的, 因为奇次带谐项 $J_{2l-1} (l \geq 2)$ 值的大小实质上是反映一个天体南北不对称(包括形状和质量密度分布)的程度。由此可知: e 的长周期变化幅度主要取决于奇次带谐项 $J_{2l-1} (l \geq 2)$ 相对 J_2 的大小, 而且总效果取决于函数 $\mu(i)$ 值的变化状况, 其中 $F_l^*(i)$ 是 $\sin i$ 的函数。

对于地球低轨卫星, $\mu(i)$ 并不重要, 而 $O(J_{2l-1}/J_2) = O(10^{-3})$, 相应的 $e_l(t)$ 变化很小, 对地球低轨卫星的轨道寿命无影响。但对金星、火星和月球的低轨卫星, 因 $\left| \frac{J_{2l-1}}{J_2} \right|$ 的量级较大, 这一影响机制较重要, 特别是月球低轨卫星^[3]。

对于金星低轨卫星, $O(J_{2l-1}/J_2) = O(10^{-1})$, 会引起轨道偏心率 e 有变幅较大的长周期变化, 同样会影响轨道寿命。但因其整个非球形引力对球形引力(即质点引力)的偏离量很小, 这一长周期变化的周期很长, 几乎像长期变化, 影响相当缓慢^[8]。这里给出两个数值算例^[13]: 在不考虑金星大气(即质点引力)的情况下, 考查非球形引力的作用, 初始时刻 t_0 为 2011 年 1 月 11 日 0 时整(UTC), 轨道近星点高度、远星点高度和轨道倾角分别为

$$h_p = 700\text{km}, h_a = 800\text{km}, i = 10^\circ.0, 85^\circ.0$$

考虑金星非球形引力摄动, 近星点高度 h_p 的变化状态如图 6 和图 7 所示。

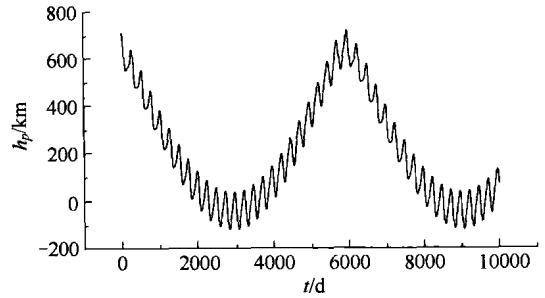


图 6 $h_p = 700\text{km}, h_a = 800\text{km}, i = 10^\circ.0, h_p$ 的变化

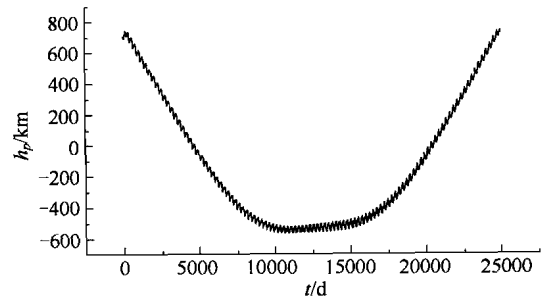


图 7 $h_p = 700\text{km}, h_a = 800\text{km}, i = 85^\circ.0, h_p$ 的变化

图 6 和图 7 并没有在 $h_p = 0.0\text{km}$ 终止计算, 为的是了解长周期变化的细节。由图 6 和图 7 可以看出: 偏心率 e 确有周期很长的长周期变化, 而且确实可以使卫星轨道近星点高度在一定时间段内降低到 $h_p = 0.0\text{km}$, 但这一过程非常缓慢, 降低到 $h_p = 0.0\text{km}$ (对应 $e = 0.0013$) 延续的时间长达 2068 天 (对应 $i = 10^\circ.0$) 和 4545 天 (对应 $i = 85^\circ.0$); 这一特征也与轨道倾角有关, 反映金星质量密度分布亦是不太均匀的。另外, 同时考虑太阳引力摄动的结果没有明显改观, 以 $i = 10^\circ.0$ 对应的结果为例, 仅考虑金星非球形引力摄动与同时考虑太阳引力摄动, 达到 $h_p = 0.0\text{km}$ 时的偏心率均为 $e = 0.1103$, 耗时长度分别为 2067.9 天和 2069.8 天, 这表明对低轨卫星的运动, 主要摄动因素还是金星的非球形引力。

月球无大气, 其低轨卫星的轨道寿命主要就是受奇次带谐项 $J_{2l-1} (l \geq 2)$ 的摄动影响所制约。除 $i \approx 0^\circ$ 外, 偏心率 e 的长周期变化将取决于 $\sum_{l(2) \geq 3} \left(\frac{J_{2l-1}}{J_2} \right) F_l^*(i)$ 的变化, 它有多个极大与极小值, 即同一高度的低轨卫星, 不同的轨道倾角, 轨道寿命却有非常明显的差别。例如初始近月点高度 $h_p = 100\text{km}$ 的近圆轨道, $i = 90^\circ, 40^\circ$, 相应的轨道寿