

高中 数学竞赛培训教材

李 胜

JXEPH

江西教育出版社



高中数学竞赛 培训教材

李 胜

江西教育出版社

高中数学竞赛培训教材

李 胜

江西教育出版社出版

(南昌市新魏路)

江西省新华书店发行 江西新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张16.75 字数37万

1990年4月第1版 1991年1月第2次印刷

印数1—3,250—13,390

ISBN7—5392—0828—7/G·814

定价：4.25元

编 者 的 话

本书以高中教材为起点，全面系统地讨论了国内高中各级数学竞赛所涉及到的全部基础知识以及解决各种问题的基本方法，它是各中学开展第二课堂活动或进行数学竞赛培训的实用教材。

本书的宗旨力图在中学数学教学与竞赛之间架设一道桥梁，让那些有志于在数学竞赛领域一试身手的中学生能够对国内各级数学竞赛所必需的数学知识、思维方法和解题技能有一个比较清晰和完整的认识，帮助他们能在较短时间内成为一个训练有素的强手。

本书的主要特点：

一、以高中教材为起点，对国内高中各级数学竞赛所涉及到的全部基础知识和解题方法进行了系统的归纳、整理和分类讨论，适当介绍一些有用的课外知识，但以概念和方法为主，不涉及过多的理论，条理清楚，便于学生在较短时间内全面掌握竞赛所必需的知识。

二、对基础知识的运用以及对解题能力和思维方法的探讨都是结合竞赛中的问题来进行的，避免空洞、抽象的叙述，方法简明，通俗易懂，平时基础较好的学生都可自学。

三、每个章节的每个知识点都配有丰富的例题、练习题及测验题（附解答），题型新颖，覆盖面广，有利于启发思维。

本书作者长期担任高三毕业班的数学教学工作，并兼任

数学竞赛集训队的主教练。在具体的教学与竞赛辅导中摸索、积累、总结了一套较为切合学生实际的训练方法，并做出了一些成绩：作者所在的学校江西省南昌市第二中学，近几年来，在全国高中数学竞赛中，连续几年夺得了全国高中数学竞赛江西赛区的团体总分第一名和个人第一名，并且每年都有选手代表江西省参加全国冬令营数学竞赛，并有学生进入国家奥林匹克集训队。几年来，南昌二中学生在国内各级数学竞赛中获得各种奖励近二百人次。作者把自己多年的甘与苦、经验与教训融会在本书中，供广大中学生、各中学第二课堂的数学兴趣小组、有志于为国家培训数学人才的教师、教练们参考。

本书的撰写还只是一个新的尝试，希望本书的出版能够受到大家，特别是中学生的欢迎，同时也希望广大读者对本书的不足之处提出批评与指正。

目 录

第一章 初等数论	1	
一、自然数	1	
1. 进位制	1	
2. 质数·算术基本定理	4	
3. 最小公倍数与最大公约数	7	
4. 自然数的约数	12	
5. 平方数与两个平方数的和	14	
6. 勾股数	18	
二、整数	21	
1. 奇数与偶数	21	
2. 整数分解式	23	
3. 整除性	25	
4. 带余除法·辗转相除法	28	
5. 同余式	33	
6. 剩余类·费马小定理	36	
三、高斯函数	40	
1. 函数性质	40	
2. 一个重要应用	45	
四、抽屉原理	48	
1. 抽屉原理及其各种形式	48	
2. 解题应用	49	
(1) 图形分割	(2) 考虑奇偶	(3) 染色
(4) 剩余分类	(5) 较困难的问题	

练习一	58	
测验题一	62	
第二章 解析式	68	
一、多项式	66	
1. 多项式、余式定理与因式定理	66	
2. 综合除法	69	
3. 多项式的可约性	70	
4. 对称多项式	72	
5. k 次等幂和	75	
二、解析式恒等变换	77	
1. 公式与应用	78	
2. 方法与技巧	81	
(1) 因式分解和配方法	(2) 凑项法	
(3) 变换命题形式	(4) 构造法	
练习二	89	
测验题二	92	
第三章 方程与不等式	96	
一、一元 n 次方程	96	
1. 代数基本定理与韦达定理	96	
2. 拉格朗日公式	98	
3. 方程的变换	101	
4. 根的性质	104	
(1) 有理根	(3) 实根	(3) 虚根
二、不定方程	110	
1. 一次不定方程	110	
2. 不定方程解法	112	
(1) 分离变量	(3) 变换方程	

(3) 分析奇偶和剩余	(4) 考虑倍数与约数	
(5) 递降法	(6) 无限下推法	
三、不等式证明		118
1. 几个重要不等式及其应用		118
(1) 平均不等式	(3) 柯希不等式	
(3) 排序原理与切比雪夫不等式		
2. 不等式证明方法		158
(1) 放缩法	(2) 凑方法	(3) 判别式法
(4) 函数法	(5) 换元法	(6) 几何法
(7) 反证法	(8) 数学归纳法	
练习三		137
测验题三		142
第四章 平面几何与立体几何		147
一、平面几何证题		147
1. 几个重要定理及应用		147
(1) 塞瓦定理	(2) 梅涅劳斯定理	(3) 托勒密定理
(4) 欧拉定理	(5) 圆的根轴	
2. 综合法证题		158
(1) 三角法	(2) 解析法	
3. 几何变换		163
(1) 平移	(2) 反射	(3) 位似
(4) 旋转		
二、几何不等式		174
1. 基本几何不等式		174
2. 几何不等式问题解法		178
(1) 变换图形法	(2) 局部固定与逐步调整法	
(3) 代数法与三角法	(4) 等高线法	
三、立体几何		189

1. 一些特殊方法	189
(1) 添补与分割 (2) 平面展开 (3) 类比	
2. 几个立体几何问题	195
(1) 异面直线间的距离 (2) 多面体的截面	
(3) 球的几何问题	
练习四	203
测验题四	209
第五章 函数与数列	213
一、初等函数	213
1. 函数极值	213
(1) 运用不等式证明的方法 (2) 引入参数法	
(3) 函数图象法 (4) 逐步调整法	
2. 函数方程	218
(1) 代换法 (2) 爬坡法	
3. 凸函数	221
二、特殊数列	224
1. 循环数列	224
(1) 斐波那契数列 (2) k 阶循环数列	
2. 递推式	231
(1) 构造法 (2) 迭代法 (3) 归纳法	
(4) 函数不动点法	
练习五	238
测验题五	241
第六章 复数与向量	246
一、复数	246
1. n 次单位根	246
2. 复数解题应用	249

(1) 在三角问题中的应用	
(2) 在几何问题中的应用	
二、向量	259
1. 向量的基础知识	259
2. 向量在几何问题中的应用	266
(1) 旋转图形问题	(2) 点共线与线共点问题
(3) 比例问题	(4) 平行与垂直问题
练习六	271
测验题六	274
第七章 解析几何	279
一、圆锥曲线的切法线	279
1. 几种切法线方程	279
2. 切点弦方程	284
3. 光学性质的应用	286
二、解析几何问题解法	288
1. 正确选择坐标系及点的坐标	288
(1) 建立适当的坐标系	(2) 正确设立点的坐标
(3) 注意坐标的变换	
2. 建立适当的曲线方程	292
(1) 建立特殊形式的方程	(2) 选择参数方程
(3) 选择极坐标方程	(4) 运用曲线系方程
3. 灵活运用方程性质	301
(1) 巧用韦达定理	(2) 用好根的判别式
(3) 充分运用根的性质	
4. 注意运用几何性质	306
练习七	308
测验题七	311

第八章 点集、覆盖与图	316
一、点集	316
1. 凸集与凸包	316
2. 格点与格点多边形	322
二、覆盖	329
1. 覆盖问题	329
2. 最小覆盖图形	332
3. 平面嵌入	336
三、图	338
1. 简单图	338
2. 链、圈、树	342
3. 哈密尔顿圈与欧拉圈	345
4. 平面图与欧拉公式	349
5. 拉姆赛型问题	352
练习八	355
测验题八	358
第九章 初等组合论	361
一、组合数计算	361
二、几种排列与组合	367
1. 有重复的排列	367
2. 不尽相异元素的全排列	367
3. 有重复的组合	369
4. 有限重复组合	373
5. 环状排列	375
6. 错位排列	377
三、计数原理	380
1. 配对原理	380

2. 容斥原理	384
3. 反射原理	388
4. 建立递推关系	391
四、初等组合问题	394
1. 初等组合问题 讨论	394
2. 典型的组合问题	399
(1) 装球问题	(2) 三角形剖分问题
(3) 多边形内区域问题	(4) 多边形拆分问题
练习九	405
测验题九	408
第十章 数学竞赛问题解法	412
一、解法讨论	412
1. 数学归纳法	412
(1) 数学归纳法的其它形式	(2) 应用技巧
2. 反证法	416
3. 考虑极端情况	419
4. 考虑奇偶或剩余	421
5. 考虑进位制	423
6. 变换命题形式	425
(1) 提出一个等价命题	(2) 构造辅助命题
(3) 加强命题	
7. 构造法	432
(1) 构造一种特殊方法	(2) 构造辅助数式
(3) 构造一种模式	(4) 构造一个图形
8. 逐步调整法	440
9. 倒推与夹逼	442

二、综合试题	445
附录 练习、测验题、综合试题答案及参考解答	451

第一章 初等数论

一、自然数

1. 进位制

我们平常使用的是十进制数，十进制自然数 N 可以表示为

$$N = a_0 \times 10^n + a_1 \times 10^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \times 10 + a_n$$
$$= \sum_{i=0}^n a_i 10^{n-i} \quad (\text{其中 } 0 \leq a_i \leq 9, a_0 \neq 0).$$

为了方便也可写作 $N = \overline{a_0 a_1 \cdots a_{n-1} a_n}$.

同样， p 进制数可以表示为

$$N_p = \sum_{i=0}^n a_i p^{n-i} \quad (0 \leq a_i \leq p-1, a_0 \neq 0).$$

十进制自然数转换为 p 进制自然数，可用“除 p 取余”法。

例如， $19 = (10011)_2$ ，
即 19 用二进制表示为：10011。

2	19	余数
	9 1
	4 1
	2 0
	1 0

但是，十进制小数转换为 p 进制小数，则要用“乘 p 取

整”法。

例如, $0.315 \approx (0.2412)_8$,
即 0.315 用八进制表示为:
 0.2412_8 .

	0 .	3 1 5	整数部分
×		8	
	2 .	5 2 0	…… 2
×		8	
	4 .	1 6 0	…… 4
×		8	
	1 .	2 8 0	…… 1
×		8	
	2 .	2 4 0	…… 2

而 p 进制数转换为十进制数只须直接进行计算。例如

$$(1352)_6 = 1 \times 6^3 + 3 \times 6^2 + 5 \times 6 + 2 = 356;$$

$$(102.12)_3 = 1 \times 3^2 + 0 \times 3 + 2 + 1 \times 3^{-1} + 2 \times 3^{-2} \approx 11.56.$$

进位制是数学的基础知识, 我们应该熟练掌握它们。

例 1 已给自然数 $a, b, n, a > 1, b > 1, n > 1$.

A_{n-1} 和 A_n 是 a 进制中的数, B_{n-1} 和 B_n 是 b 进制的数。它们可以表示为以下的形式:

$A_{n-1} = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$, $A_n = x_nx_{n-1}\cdots x_0$ (按 a 进制写出);

$B_{n-1} = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$, $B_n = x_nx_{n-1}\cdots x_0$ (按 b 进制写出)。

此处 $x_n \neq 0, x_{n-1} \neq 0$ 。试证明:

若 $a > b$, 则 $\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}$ 。(第 12 届 IMO① 试题)

证明: 用分析法证明。

由于 $A_{n-1} = x_{n-1}a^{n-1} + x_{n-2}a^{n-2} + \cdots + x_0$,

$$A_n = x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \cdots + x_0,$$

因此 $A_n = A_{n-1} + x_n a^n$ 。同样 $B_n = B_{n-1} + x_n b^n$ 。

① IMO 指国际中学生数学竞赛。

$$\begin{aligned}
\text{要证明 } \frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n} &\Leftrightarrow \frac{A_n}{A_{n-1}} > \frac{B_n}{B_{n-1}} \\
&\Leftrightarrow \frac{A_{n-1} + x_n a^n}{A_{n-1}} > \frac{B_{n-1} + x_n b^n}{B_{n-1}} \\
&\Leftrightarrow 1 + \frac{x_n a^n}{A_{n-1}} > 1 + \frac{x_n b^n}{B_{n-1}} \\
&\Leftrightarrow \frac{A_{n-1}}{a^n} < \frac{B_{n-1}}{b^n} \Leftrightarrow \frac{x_{n-1} a^{n-1} + x_{n-2} a^{n-2} + \cdots + x_0}{a^n} \\
&< \frac{x_{n-1} b^{n-1} + x_{n-2} b^{n-2} + \cdots + x_0}{b^n} \\
&\Leftrightarrow x_{n-1} a^{-1} + x_{n-2} a^{-2} + \cdots + x_0 a^{-n} < x_{n-1} b^{-1} + x_{n-2} b^{-2} + \cdots \\
&\quad + x_0 b^{-n}, \\
&\Leftrightarrow x_{n-1} (a^{-1} - b^{-1}) + x_{n-2} (a^{-2} - b^{-2}) + \cdots \\
&\quad + x_0 (a^{-n} - b^{-n}) < 0. (*)
\end{aligned}$$

由于 $a > b > 0$, 所以 $a^{-k} - b^{-k} < 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

故不等式 (*) 成立. 因此 $\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}$ 成立.

在数学竞赛中, 进位制知识还有着特殊的意义, 在解决某些数学竞赛问题, 如果注意运用这些知识, 有时会获得很好的解法. 请看下面两个例子.

例 2 把自然数中所有数字都不大于 5 的数排成一排, 求所形成的递增数列中的第 1989 项.

解: 所形成的数列为 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, …….

可以看出, 数列中的每一项顺次构成全体六进制数. 因为 $1989 = (13113)_6$,

所以, 数列中的第 1989 项为 13113.

例3 把所有3的方幂及互不相等的3的方幂的和排成一个递增数列1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, ..., 求这个数列的第100项。

(第四届美国数学邀请赛试题)

解: 将已知数列写成 3^k 的形式:

$3^0, 3^1, 3^1+3^0, 3^2, 3^2+3^0, 3^2+3^1, 3^2+3^1+3^0, \dots$, ①
考察数列 $2^0, 2^1, 2^1+2^0, 2^2, 2^2+2^0, 2^2+2^1, 2^2+2^1+2^0, \dots$ ②,

显然, 数列②的每一项与数列①的每一项一一对应, 而数列②的每一项顺次组成二进制自然数全体。

因为 $100 = (1100100)_2 = 2^6 + 2^5 + 2^2$,

所以原数列的第100项为: $3^6 + 3^5 + 3^2 = 981$ 。

在上述两个例子中, 由于我们将问题转换成了 p 进制解决, 这比直接进行解答简便得多。因此, 在解决数学竞赛问题中应注意运用 p 进制、特别是二进制的知识, 关于这一点我们在第十章还要专门讨论。

2. 质数·算术基本定理

一个大于1的整数, 如果它的正因数只有1和它本身, 就叫做质数(质数亦称素数), 否则就叫做复合数(简称为合数)。

注意, 1既不是质数也不是合数。

下面与质数有关的两个定理是非常重要的。

〔定理1〕(欧几里得定理)存在着无限多个质数。

证明: 假定只有有限多个质数, 记为 p_1, p_2, \dots, p_k 。
考虑整数 $n = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$ 。

设 p_i 整除 n , 因此 $p_i \in \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ 。