高中
数学竞赛培训教材

李 胜

JXEPH
江西教育出版社

高中数学竞赛
培训教材

李 胜

江 西 教 育 出 版 社

高中数学竞赛培训教材

李　胜

江西教育出版社出版

（南昌市新魏路）

江西省新华书店发行　江西新华印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张16.75 字数37万

1990年4月第1版　1991年1月第2次印刷

印数 1—3,250—13,390

ISBN7—5392—0828—7/G·814　　定价：4.25元

编 者 的 话

本书以高中教材为起点，全面系统地讨论了国内高中各级数学竞赛所涉及到的全部基础知识以及解决各种问题的基本方法，它是各中学开展第二课堂活动或进行数学竞赛培训的实用教材。

本书的宗旨力图在中学数学教学与竞赛之间架设一道桥梁，让那些有志于在数学竞赛领域一试身手的中学生能够对国内各级数学竞赛所必需的数学知识、思维方法和解题技能有一个比较清晰和完整的认识，帮助他们能在较短时间内成为一个训练有素的强手。

本书的主要特点：

一、以高中教材为起点，对国内高中各级数学竞赛所涉及到的全部基础知识和解题方法进行了系统的归纳、整理和分类讨论；适当介绍一些有用的课外知识，但以概念和方法为主，不涉及过多的理论，条理清楚，便于学生在较短时间内全面掌握竞赛所必需的知识。

二、对基础知识的运用以及对解题能力和思维方法的探讨都是结合竞赛中的问题来进行的，避免空洞、抽象的叙述，方法简明，通俗易懂，平时基础较好的学生都可自学。

三、每个章节的每个知识点都配有丰富的例题、练习题及测验题（附解答），题型新颖，覆盖面广，有利于启发思维。

本书作者长期担任高三毕业班的数学教学工作，并兼任

数学竞赛集训队的主教练。在具体的教学与竞赛辅导中摸索、积累、总结了一套较为切合学生实际的训练方法，并做出了一些成绩：作者所在的学校江西省南昌市第二中学，近几年来，在全国高中数学竞赛中，连续几年夺得了全国高中数学竞赛江西赛区的团体总分第一名和个人第一名，并且每年都有选手代表江西省参加全国冬令营数学竞赛，并有学生进入国家奥林匹克集训队。几年来，南昌二中学生在国内各级数学竞赛中获得各种奖励近二百人次。作者把自己多年的甘与苦、经验与教训融会在这本书中，供广大中学生、各中学第二课堂的数学兴趣小组、有志于为国家培训数学人才的教师、教练们参考。

本书的撰写还只是一个新的尝试，希望本书的出版能够受到大家，特别是中学生的欢迎，同时也希望广大读者对本书的不足之处提出批评与指正。

目　　录

第一章　初等数论

一、自然数

1.进位制

我们平常使用的是十进制数，十进制自然数N可以表示为

$$N=a_0\times10^n+a_1\times10^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\times10+a_n$$

$$=\sum_{i=0}^{n}a_i10^{n-i}\quad（其中\ 0\leqslant a_i\leqslant9,\ a_0\neq0）。$$

为了方便也可写作$N=\overline{a_0a_1\cdots a_{n-1}a_n}$。

同样，p进制数可以表示为

$$N_p=\sum_{i=0}^{n}a_ip^{n-i}\qquad(0\leqslant a_i\leqslant p-1,\ a_0\neq0)。$$

十进制自然数转换为p进制自然数，可用“除p取余”法。

例如，$19=(10011)_2$，
即19用二进制表示为：10011。

$$\begin{array}{r|l l}
2 & 19 & \text{余数} \\ \hline
2 & 9\cdots\cdots & 1 \\ \hline
2 & 4\cdots\cdots & 1 \\ \hline
2 & 2\cdots\cdots & 0 \\ \hline
 & 1\cdots\cdots & 0
\end{array}$$

但是，十进制小数转换为p进制小数，则要用“乘p取

整”法。

例如，$0.315 \approx (0.2412)_8$，即0.315用八进制表示为：0.2412。

		整数部分
0.	315	
×	8	
2.	520	……2
×	8	
4.	160	……4
×	8	
1.	280	……1
×	8	
2.	240	……2

而 p 进制数转换为十进制数只须直接进行计算。例如

$$(1352)_6 = 1\times 6^3 + 3\times 6^2 + 5\times 6 + 2 = 356;$$

$$(102.12)_3 = 1\times 3^2 + 0\times 3 + 2 + 1\times 3^{-1} + 2\times 3^{-2} \approx 11.56.$$

进位制是数学的基础知识，我们应该熟练掌握它们。

例 1　已给自然数 a，b，n，$a>1$，$b>1$，$n>1$。A_{n-1} 和 A_n 是 a 进制中的数，B_{n-1} 和 B_n 是 b 进制的数。它们可以表示为以下的形式：

$A_{n-1} = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$，$A_n = x_n x_{n-1}\cdots x_0$（按 a 进制写出）；

$B_{n-1} = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$，$B_n = x_n x_{n-1}\cdots x_0$（按 b 进制写出）。

此处 $x_n \neq 0$，$x_{n-1}\neq 0$。试证明：

若 $a>b$，则 $\dfrac{A_{n-1}}{A_n} < \dfrac{B_{n-1}}{B_n}$。（第12届 IMO① 试题）

证明：用分析法证明。

由于 $A_{n-1} = x_{n-1}a^{n-1} + x_{n-2}a^{n-2} + \cdots + x_0$，

$A_n = x_n a^n + x_{n-1}a^{n-1} + \cdots + x_0$，

因此 $A_n = A_{n-1} + x_n a^n$。同样 $B_n = B_{n-1} + x_n b^n$。

①IMO指国际中学生数学竞赛。

要证明$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}\Leftrightarrow\frac{A_n}{A_{n-1}}>\frac{B_n}{B_{n-1}}$

$$\Leftrightarrow\frac{A_{n-1}+x_na^n}{A_{n-1}}>\frac{B_{n-1}+x_nb^n}{B_{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{x_na^n}{A_{n-1}}>1+\frac{x_nb^n}{B_{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{A_{n-1}}{a^n}<\frac{B_{n-1}}{b^n}\Leftrightarrow\frac{x_{n-1}a^{n-1}+x_{n-2}a^{n-2}+\cdots+x_0}{a^n}$$

$$<\frac{x_{n-1}b^{n-1}+x_{n-2}b^{n-2}+\cdots+x_0}{b^n}$$

$$\Leftrightarrow x_{n-1}a^{-1}+x_{n-2}a^{-2}+\cdots+x_0a^{-n}<x_{n-1}b^{-1}+x_{n-2}b^{-2}+\cdots$$
$$+x_0b^{-n},$$

$$\Leftrightarrow x_{n-1}(a^{-1}-b^{-1})+x_{n-2}(a^{-2}-b^{-2})+\cdots$$
$$+x_0(a^{-n}-b^{-n})<0.(*)$$

由于$a>b>0$，所以$a^{-k}-b^{-k}<0$（$k=1, 2, \cdots, n$）。

故不等式(*)成立。因此$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}$成立。

在数学竞赛中，进位制知识还有着特殊的意义，在解决某些数学竞赛问题，如果注意运用这些知识，有时会获得很好的解法。请看下面两个例子。

例 2　把自然数中所有数字都不大于 5 的数排成一排，求所形成的递增数列中的第1989项。

解：所形成的数列为 1，2，3，4，5，10，11，12，13，14，15，20，21，22，……。

可以看出，数列中的每一项顺次构成全体六进制数。因为$1989=(13113)_6$，

所以，数列中的第1989项为13113。

例3　把所有3的方幂及互不相等的3的方幂的和排成一个递增数列1，3，4，9，10，12，13，…，求这个数列的第100项。

（第四届美国数学邀请赛试题）

解：将已知数列写成3^k的形式：

3^0，3^1，3^1+3^0，3^2,3^2+3^0，3^2+3^1，$3^2+3^1+3^0$，…，①

考察数列2^0，2^1，2^1+2^0，2^2，2^2+2^0，2^2+2^1，$2^2+2^1+2^0$，…②，

显然，数列②的每一项与数列①的每一项一一对应，而数列②的每一项顺次组成二进制自然数全体。

因为$100=(1100100)_2=2^6+2^5+2^2$，

所以原数列的第100项为：$3^6+3^5+3^2=981$。

在上述两个例子中，由于我们将问题转换成了p进制解决，这比直接进行解答简便得多。因此，在解决数学竞赛问题中应注意运用p进制、特别是二进制的知识，关于这一点我们在第十章还要专门讨论。

2.质数·算术基本定理

一个大于1的整数，如果它的正因数只有1和它本身，就叫做质数（质数亦称素数），否则就叫做复合数（简称为合数）。

注意，1既不是质数也不是合数。

下面与质数有关的两个定理是非常重要的。

〔定理1〕（欧几里得定理）存在着无限多个质数。

证明：假定只有有限多个质数，记为p_1，p_2，…，p_k。考虑整数$n=p_1p_2\cdots p_k+1$。

设p_i整除n，因此$p_i\in\{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$。