

# 结构有限元素法

杨炳成

公路系结构教研室

# 目 录

绪 论		6
第一章	杆系结构	6
§ 1-1	平面一般梁单元的刚度矩阵	8
§ 1-2	坐标转换	10
§ 1-3	结点平衡方程与整体刚度矩阵	11
§ 1-4	荷载向结点移置	13
§ 1-5	边界条件的处理	18
§ 1-6	计算步骤及例题	23
§ 1-7	考虑剪切变形的梁单元刚度矩阵	32
§ 1-8	温度荷载	34
§ 1-9	空间梁单元的刚度矩阵	41
第二章	弹性力学中的平面问题	41
§ 2-1	弹性力学的基本方程式	50
§ 2-2	连续体的离散化	53
§ 2-3	单元分析的步骤	55
§ 2-4	位移函数及解答的收敛性	59
§ 2-5	单元刚度矩阵	62
§ 2-6	荷载向结点的移置, 荷载列阵	67
§ 2-7	整体刚度矩阵的形成	70
§ 2-8	解题的具体步骤、简例	76
§ 2-9	整体刚度矩阵的特点	80
第三章	平面问题高次单元	80
§ 3-1	矩形单元	87
§ 3-2	面积坐标	89
§ 3-3	六结点三角形单元	96
§ 3-4	十结点三角形单元及十八个自由度三角形单元	98
§ 3-5	形函数与坐标变换	103
§ 3-6	等参元分析	106
§ 3-7	数值积分	108
§ 3-8	不协调位移函数的附加及静力凝聚法	112
第四章	弹性力学空间问题	112
§ 4-1	计算模型及方法	112

§ 4-2	单元位移函数和等效结点荷载	-----	113
§ 4-3	单元的应力矩阵及刚度矩阵	-----	116
§ 4-4	高次四面体单元	-----	118
§ 4-5	六面体单元	-----	122
§ 4-6	空间等参元	-----	127
第五章	薄板问题有限元	-----	132
§ 5-1	弹性力学的基本方法	-----	132
§ 5-2	矩形单元位移法	-----	137
§ 5-3	三角形单元位移法	-----	147
§ 5-4	矩形单元混合法	-----	153
§ 5-5	三角形单元混合法	-----	164
第六章	弹性稳定问题	-----	169
§ 6-1	梁单元的几何刚度矩阵	-----	169
§ 6-2	板单元的几何刚度矩阵	-----	172
§ 6-3	整体分析	-----	175
§ 6-4	杆结构算例	-----	176

## 序

随着电子计算机的普及，桥梁工程通过结构分析也越来越依赖这一现代化的计算工具。

有限元素法是结构分析中广泛采用的有效方法。本讲义为桥梁工程专业的学生在学完“结构力学”、“弹性理论”、“矩阵代数”、“桥梁工程”等课程之后，为学习“桥梁电算”课程的一门基础课程。计划学时40左右，因而为掌握结构静力分析，在“结构力学”直接刚度法的基础上将杆系予以补充。对弹性力学将所涉及内容略加复习，再进行平面问题、空间问题的分析。

为便于初学者掌握，所选内容较浅，且偏重于使用，理论探讨较少。望多提宝贵意见，以便在使用中改进。

编者

1988年3月

# 目 录

结 论			
第一章	杆系结构	-----	6
§ 1-1	平面一般梁单元的刚度矩阵	-----	6
§ 1-2	坐标转换	-----	8
§ 1-3	结点平衡方程与整体刚度矩阵	-----	10
§ 1-4	荷载向结点移置	-----	11
§ 1-5	边界条件的处理	-----	13
§ 1-6	计算步骤及例题	-----	18
§ 1-7	考虑剪切变形的梁单元刚度矩阵	-----	28
§ 1-8	温度荷载	-----	32
§ 1-9	空间梁单元的刚度矩阵	-----	34
第二章	弹性力学中的平面问题	-----	41
§ 2-1	弹性力学的基本方程式	-----	41
§ 2-2	连续体的离散化	-----	50
§ 2-3	单元分析的步骤	-----	53
§ 2-4	位移函数及解答的收敛性	-----	55
§ 2-5	单元刚度矩阵	-----	59
§ 2-6	荷载向结点的移置, 荷载列阵	-----	62
§ 2-7	整体刚度矩阵的形成	-----	67
§ 2-8	解题的具体步骤、简例	-----	70
§ 2-9	整体刚度矩阵的特点	-----	76
第三章	平面问题高次单元	-----	80
§ 3-1	矩形单元	-----	80
§ 3-2	面积坐标	-----	87
§ 3-3	六结点三角形单元	-----	89
§ 3-4	十结点三角形单元及十八个自由度三角形单元	-----	96
§ 3-5	形函数与坐标变换	-----	98
§ 3-6	等参元分析	-----	103
§ 3-7	数值积分	-----	106
§ 3-8	不协调位移函数的附加及静力凝聚法	-----	108
第四章	弹性力学空间问题	-----	112
§ 4-1	计算模型及方法	-----	112

§ 4 - 2	单元位移函数和等效结点荷载	-----	113
§ 4 - 3	单元的应力矩阵及刚度矩阵	-----	116
§ 4 - 4	高次四面体单元	-----	118
§ 4 - 5	六面体单元	-----	122
§ 4 - 6	空间等参元	-----	127
第五章	薄板问题有限元	-----	132
§ 5 - 1	弹性力学的基本方法	-----	132
§ 5 - 2	矩形单元位移法	-----	137
§ 5 - 3	三角形单元位移法	-----	147
§ 5 - 4	矩形单元混合法	-----	153
§ 5 - 5	三角形单元混合法	-----	164
第六章	弹性稳定问题	-----	169
§ 6 - 1	梁单元的几何刚度矩阵	-----	169
§ 6 - 2	板单元的几何刚度矩阵	-----	172
§ 6 - 3	整体分析	-----	175
§ 6 - 4	杆结构算例	-----	176

## 绪 论

在力学分析方法中，可分为解析法和数值法两类。解析法就是运用材料力学或弹性力学的基本方程来求解应力与变形，用材料力学的公式一般只能处理一些细而长的杆、梁构件。弹性力学对杆、梁、板、壳等结构都建立了相应的基本方程。以二维结构为例，通过二个平衡方程、三个几何方程、三个弹性方程来求解弹性体的八个未知量（位移分量 $u, v$ ；三个应变分量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \tau_{xy}$ ；三个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ），而应力分量还应满足二个边界条件。从理论上讲，弹性力学能解决一切弹性体的应力与变形问题。但在工程实践中，一般的结构形状、受力情况、边界条件都比较复杂，往往不能求解。因此，解析法只能对某些简单问题才能得到理论精确解。而对复杂结构的分析，唯一途径就是应用数值法来求问题的近似解。

数值法又可分为两类：

第一类是在解析法的基础上进行近似数值计算，亦就是应先建立弹性力学基本方程，然后采用近似的数值解法计算。如用有限差分法——用有限差量比值来代替导数，把微分方程变换成差分方程式（线性代数方程），然后再求出弹性体内各点的应力分量。当然，所求出的应力分量应满足边界条件。对规则的边界和均匀的材料特性比较有效。而对复杂的结构形状，边界条件不适应；对于不同材料特性，变化的荷载等也不能适应。

第二类是在力学模型上进行近似的数值计算。先将连续弹性体简化为有限个单元所组成的离散化模型，然后求出数值解，这就是有限元素法。

有限元素法从求解的基本未知量来分：

1. 位移法——以单元结点的位移为基本未知量。由于它的通用性，便于实现计算自动化的特点使用最广泛。

2. 力法——以单元结点力为基本未知量。由于结构计算未知量少，求得的应力值比较准确，因此在某些特殊问题中亦得到一定的应用。

3. 混合法——取单元一部分节点位移和一部分节点力作为基本未知量。综合了上述两法之优点在板壳问题中已显示出一定的优点。

4. 杂交法——在单元内部和沿单元边界各自含有独立的位移函数与应力函数。杂交法发展较晚，但在板壳、应力奇异、复合材料等方面得到了广泛重视。

按有限元素法的推导来分类：

(1) 直接法——是采用结构力学的方法，概念形象，便于被一般工程技术人员接受，但只能解决一些较为简单的问题，如杆系结构，平面及三维结构分析。

(2) 变分法——把有限元归纳为求泛函的极值问题。如固体力学中的最小位能原理，最小余能原理，它使有限元建立在更加可靠的数学基础上，扩大了有限元的范围，在较复杂的几何非线性与材料非线性问题，热传导、流体力学等方面都是应用变分法来推导。

(3) 加权余数法——不用泛函的概念，直接从基本方程出发，求出近似解。对不存在泛函的领域都可采用。

我们在下面主要介绍有限元的基本概念与原理。因此，在内容推导上只采用直接法，方法上以位移法为主，对于平板亦用了混合法。

有限元法的特点：

(1) 有限元法是一近似的数值解法，其本身是求解偏微分方程的一种近似计算工具。

(2) 通过结构离散化，对单元选取位移函数，这样使几何形状、边界条件不论如何复杂、材料如何不同的弹性体，总可以通过足够细密的单元划分来接近，所以说有限元解决实际问题的能力较强。

(3) 有限元法有一套固定的分析顺序，对不同问题都可以适用。且通俗易懂，便于掌握。

随着电子计算机的发展，近二十年来有限元飞速发展。至目前，可用有限方法来计算固体力学中大部分问题，如杆系、平板、薄壳、二维和三维等的静态应力、热应力、振动、稳定以及塑性、余变、粘弹性等材料非线性和大挠度等几何非线性问题。

有限元从结构计算已扩展到结构优化设计，并向更高度设计自动化方向发展。有限元已进入到流体力学、空气动力学、热传导、电磁学、地质力学、生物力学等领域。因而，有限元法目前已成为一门日益成熟的新兴学科。



# 第一章 杆系结构

在工程结构上，很多构件是属于结构力学所分析的杆系问题。例如梁、刚架、桁架、梁拱组合件等。在外荷载作用下，结点处可能产生水平向位移  $u$ ，竖向位移  $v$ ，转角  $\theta$ ，并由此引起构件的相应内力分别为  $U$ 、 $V$ 、 $M$ ，使结构处于静止平衡状态。我们用矩阵写出内力与外力  $F$  之间的平衡关系式时有：

$$\{F\} = [k]\{\delta\} \quad (1-1)$$

其中： $\{F\}$ ——作用在结点处的外荷载列阵。

$\{\delta\}$ ——结点位移列阵。

$[k]$ ——单位位移所引起的内力矩阵，我们称其为刚度矩阵。

在外荷载作用下，如果知道了刚度矩阵，则可以通过矩阵运算求得位移列阵。那么，结构的每一杆件由两端结点处的位移值求得杆内力。

## § 1-1 平面梁单元的刚度矩阵

对于平面刚架，在外荷载  $P$  作用下，构件结点处将产生水平位移  $\bar{u}$ ，竖向位移  $\bar{v}$ ，转角  $\bar{\theta}$ ，杆件将产生内力  $U$ 、 $V$ 、 $M$ 。如图 1 所示。

如果我们从中任意取出一个杆件，称为单元  $j$ ，设长度为  $L$ ，横截面面积为  $A$ ，抗弯刚度为  $EJ$ 。结点作用于杆端  $i$ ， $j$  上的力及位移如图 2 所示：

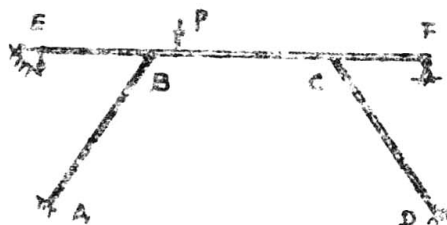


图 1-1 刚架

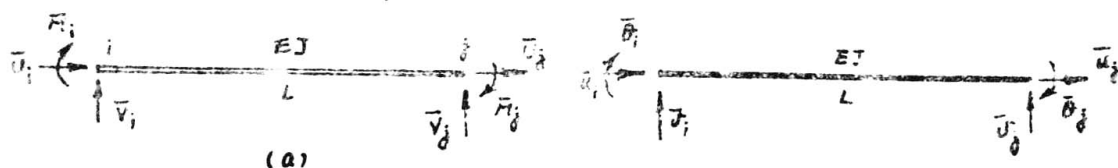


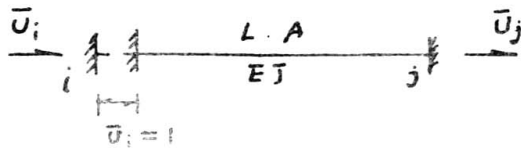
图 1-2 (a) 结点力 (b) 结点位移

当结构平衡时，其中各个单元亦位于平衡状态。而单元平衡关系为：

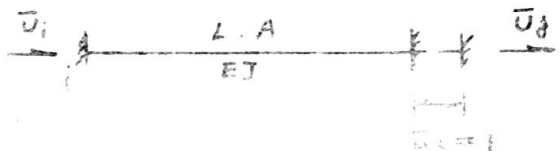
$$\{F\}^{(e)} = [k]^{(e)}\{\delta\}^{(e)} \quad (1-2)$$

式中  $\{F\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{V}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{U}_j \\ \bar{V}_j \\ \bar{M}_j \end{Bmatrix}^{(e)}$ ，  $\{\delta\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix}^{(e)}$

当  $\bar{u}_i = 1$  (其余为零) 或  $\bar{u}_j = 1$  (其余为零) 时:



$$\bar{u}_i = \frac{EA}{L} \quad \bar{u}_j = -\frac{EA}{L}$$



$$\bar{u}_i = -\frac{EA}{L} \quad \bar{u}_j = \frac{EA}{L}$$

当  $\bar{v}_i = 1$  ( $\bar{\theta}_i = \bar{v}_j = \bar{\theta}_j = 0$ ) 时:



$$\bar{v}_i = \frac{12EI}{L^3} \quad \bar{M}_i = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$\bar{v}_j = -\frac{12EI}{L^3} \quad \bar{M}_j = -\frac{6EI}{L^2}$$

当  $\bar{\theta}_i = 1$  ( $\bar{v}_i = \bar{v}_j = \bar{\theta}_j = 0$ ) 时:



$$\bar{v}_i = -\frac{6EI}{L^2} \quad \bar{M}_i = \frac{4EI}{L}$$

$$\bar{v}_j = \frac{6EI}{L^2} \quad \bar{M}_j = \frac{2EI}{L}$$

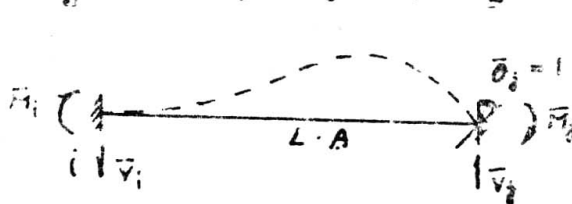
当  $\bar{v}_j = 1$  ( $\bar{\theta}_i = \bar{\theta}_j = \bar{v}_i = 0$ ) 时:



$$\bar{v}_i = -\frac{12EI}{L^3} \quad \bar{M}_i = \frac{6EI}{L^2}$$

$$\bar{v}_j = \frac{12EI}{L^3} \quad \bar{M}_j = -\frac{6EI}{L^2}$$

当  $\bar{\theta}_j = 1$  ( $\bar{\theta}_j = \bar{v}_i = \bar{v}_j = 0$ ) 时:



$$\bar{v}_i = -\frac{6EI}{L^2} \quad \bar{M}_i = \frac{2EI}{L}$$

$$\bar{v}_j = \frac{6EI}{L^2} \quad \bar{M}_j = \frac{4EI}{L}$$

依以上计算结果, 梁单元的平衡方程式可写成:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{V}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{U}_j \\ \bar{V}_j \\ \bar{M}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix}$$

(1-3)

其中:

$$[k]^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

单元刚度阵为对称奇异阵。

符号规定： $\bar{M}$ 、 $\theta$ 以顺时针转为正。 $\bar{u}$ 以向上为正， $\bar{v}$ 以向右为正。即与 $x$ 、 $y$ 同向为正 (1-4)

### § 1-2 坐标转换

在上一节中，我们对于斜杆单元刚度矩阵 $[k]^{(e)}$ 是根据斜杆的应变——位移关系推导出来的，它也可以根据坐标转换关系从中直接通过坐标轴的转动得出来。

设结构整体坐标 $(x, y)$ ，局部坐标 $(\bar{x}, \bar{y})$ ，其中 $\bar{x}$ 轴平行于杆单元 $i, j$ 的轴线，而 $\bar{y}$ 垂直于杆单元的轴线。

在局部坐标系 $(\bar{x}, \bar{y})$ 中，杆 $i, j$ 的结点力可写成：

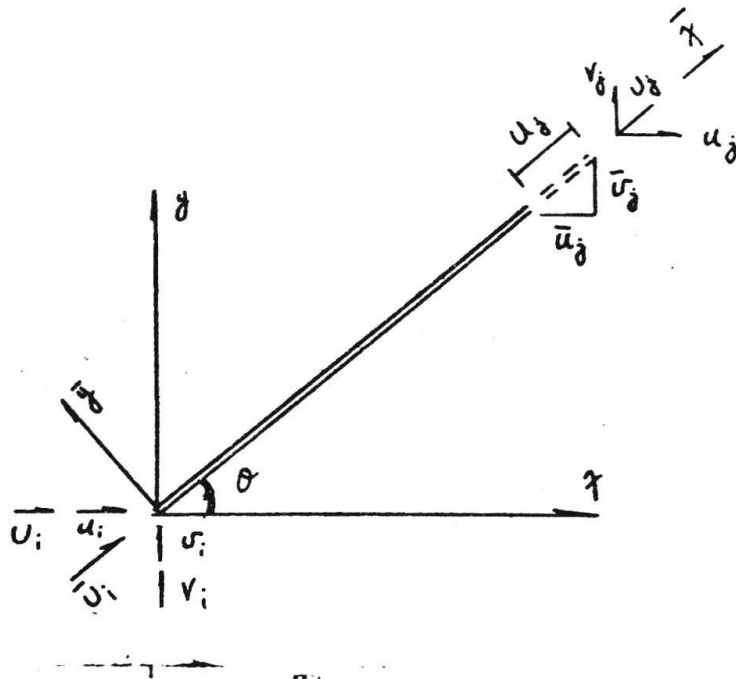


图 1-3

$$\{\bar{F}\} = \begin{Bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{V}_i \\ \bar{U}_j \\ \bar{V}_j \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (1-5)$$

或写成：

$$\{\bar{F}\} = [T]^e \{F\} \quad (1-6)$$

力在局部坐标和整体坐标之间的关系是：

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_i &= U_i \cos \theta + V_i \sin \theta \\ \bar{V}_i &= -U_i \sin \theta + V_i \cos \theta \\ \bar{U}_j &= U_j \cos \theta + V_j \sin \theta \\ \bar{V}_j &= -U_j \sin \theta + V_j \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

写成矩阵形式：(令  $a = \cos \theta$   $\beta = \sin \theta$ )

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{V}_i \\ \bar{U}_j \\ \bar{V}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix}$$

或写成： $\{\bar{F}\} = [T]\{F\}$  (1-7)

式中：

$$[T] = \begin{bmatrix} a & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & a \end{bmatrix} \text{ 称为转换矩阵} \quad (1-8)$$

对于结点位移，在局部坐标与整体坐标之间，也存在着类似的关系：

$$\{\bar{\delta}\} = [T]\{\delta\} \quad (1-9)$$

将式(1-7)、(1-9)代入(1-6)式得：

$$\begin{aligned} [T]\{F\} &= [\bar{k}]^e [T]\{\delta\} \\ \{F\} &= [T]^{-1} [\bar{k}]^e [T]\{\delta\} \end{aligned}$$

由于[T]是正交矩阵，所以 $[T]^{-1} = [T]^T$  则上式可写为：

$$\{F\} = [T]^T [\bar{k}]^e [T]\{\delta\}$$

或

$$\{F\} = [k]^e \{\delta\} \quad (1-10)$$

式中：

$$[k]^e = [T]^T [\bar{k}]^e [T] \quad (1-11)$$

$[k]^e$  就是整体坐标系中的单元刚度矩阵。

将(1-10)式写成分块矩阵的形式，则是：

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} \quad (1-12)$$

### § 1-3 结点平衡方程与整体刚度矩阵

从桁架中任取一个结点*i*来，如图示。设环绕*i*点共有三个杆单元，即*ij*、*im*、*ip*。结点*i*承受的水平荷载分别为 $X_i$ 和 $Y_i$ 。

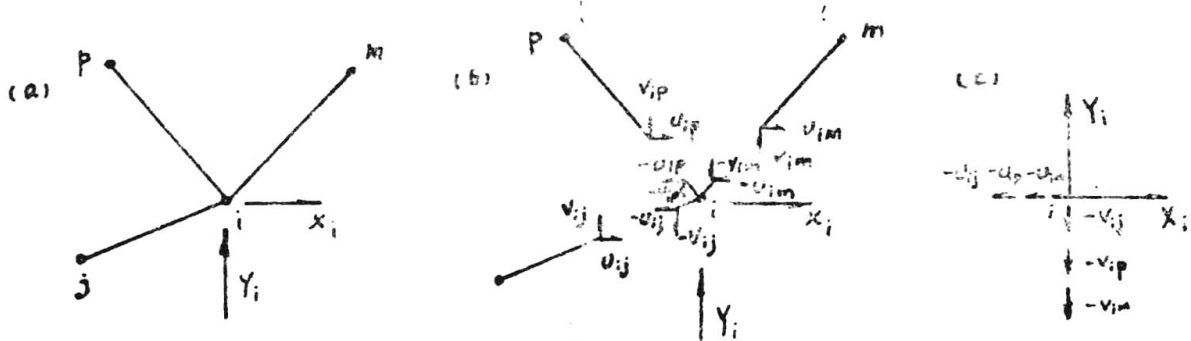


图 1-4

根据力的平衡，作用于杆单元结点力与作用于结点的结点力，其大小相等、方向相反，如杆*ij*，作用于单元的结点力是 $\begin{Bmatrix} U_{ij} \\ V_{ij} \end{Bmatrix}$ 而作用于结点*i*的结点力是 $\begin{Bmatrix} -U_{ij} \\ -V_{ij} \end{Bmatrix}$ 。图示*i*结点，在结点荷载 $(X_i, Y_i)$ 和各杆单元所施加给结点的结点力之间保持平衡。

水平向：

$$X_i - U_{ij} - U_{ip} - U_{im} = 0$$

竖直向：

$$Y_i - V_{ij} - V_{ip} - V_{im} = 0$$

或写成：

$$\left. \begin{aligned} \sum_{e=j,m,p} U_{ie} &= X_i \\ \sum_{e=j,m,p} V_{ie} &= Y_i \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

式中 $\sum_e$ 表示环绕结点*i*的单元求和。显然与结点*i*无关的单元不进入上述求和式。

由(1-9)式知杆单元*ij*施加于结点*i*的结点力为：

$$\{F_{ij}\} = \begin{Bmatrix} U_{ij} \\ V_{ij} \end{Bmatrix} = [k_{ii}]\{\delta_i\} + [k_{ij}]\{\delta_j\}$$

结点荷载为：

$$\{P_i\} = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix}$$

代入 (1-12) 式，得到结点  $i$  的平衡方程如下：

$$\left( \sum_e [k_{ii}] \right) \{\delta_i\} + [k_{ij}] \{\delta_j\} + [k_{im}] \{\delta_m\} + [k_{ip}] \{\delta_p\} + \dots = \{P_i\}$$

或：
$$\left( \sum_e [k_{ii}] \right) \{\delta_i\} + \sum_e [k_{ie}] \{\delta_e\} = \{P_i\} \quad (1-14)$$

每一个结点都有一个平衡方程如上，对于全部结点  $i = 1, 2, \dots, N$ ，逐个写出它们的平衡方程，得到  $2N$  阶线性方程组如下：（ $N$ —结构的结点数）：

$$[k] \{\delta\} = \{P\} \quad (1-15)$$

这就是结构的结点平衡方程组。其中  $\{\delta\} = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N]^T$  是结点位移列阵， $\{P\} = [P_1, P_2, P_3, \dots, P_N]^T$  是全部结点荷载组成的列阵， $[k]$  是结构的整体刚度矩阵，依 (1-14) 式可写成如下的元素表达式：

$$k_{rs} = \sum_e k_{ij} \quad (1-16)$$

其中  $\sum_e$  表示对交会于结点  $i$  的各单元求和。脚标  $rs$  表示  $k_{rs}$  位于整体刚度矩阵  $[k]$  的第  $r$  行  $s$  列而脚标  $ij$  表示  $k_{ij}$  位于单元刚度矩阵的第  $i$  行  $j$  列。

整体刚度系数  $k_{rs}$  表示结构第  $s$  个自由度的单位变形所引起第  $r$  点的力。

只要解出结点位移，由应力矩阵可计算出各单元内力。

#### § 1-4 荷载向结点的移置

有限单元法的基本方程是结点平衡方程，因此，各单元承受的荷载都应移至结点而成为结点荷载。

对于梁单元来说，可固定梁单元的两端，求出固端弯矩  $M_0$  和固端切力  $Q_0$ ，然后改变它们的符号，将  $-M_0, -Q_0$  作为结点荷载，以代替梁单元原来所承受的荷载。

以图 1-5 所示两跨连续梁为例，试说明之。

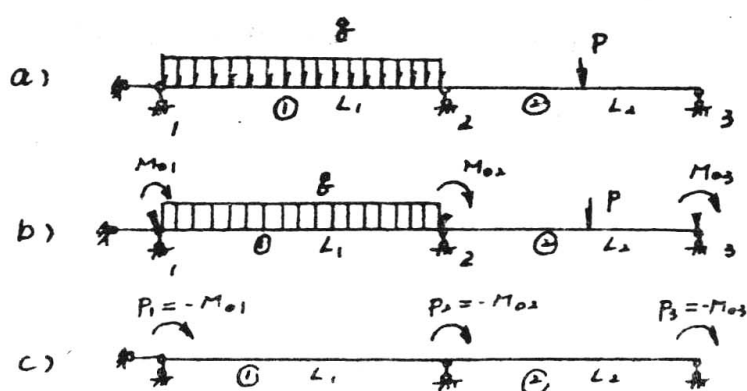
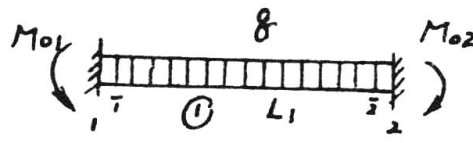


图 1-5

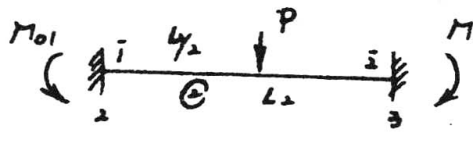
#### 1. 求等效结点荷载：

两跨连续梁在图 1-5(a)所示荷载作用下：

第一步，在各结点加阻止转动的约束，将单元变成两端固定的形式，这时单元①②产生固端力矩：



$$\begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} -\frac{qL_1^2}{12} \\ \frac{qL_1^2}{12} \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \end{Bmatrix}^{(2)} = \begin{Bmatrix} -\frac{PL_1}{8} \\ \frac{PL_1}{8} \end{Bmatrix}$$

在整体结构中，各结点的约束力矩（结点采用整体码）分别为该结点的相关单元固端力矩之和。

$$\begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \\ M_{03} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{01}^{(1)} \\ M_{02}^{(1)} + M_{02}^{(2)} \\ M_{03}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{qL_1^2}{12} \\ \frac{qL_1^2}{12} - \frac{PL_1}{8} \\ \frac{PL_1}{8} \end{Bmatrix}$$

第二步 去掉各结点约束。这相当在各结点施加外力矩荷载  $\{P\}$ ，其大小与约束力矩相等，但方向相反（图 1-5 c 所示）。

显然，在图 1-5 中，(b)+(c)=(a)，而(c)中所给出的结点力矩荷载称为原来荷载状态的等效结点荷载。即

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -M_{01}^{(1)} \\ -M_{02}^{(1)} - M_{02}^{(2)} \\ -M_{03}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qL_1^2}{12} \\ -\frac{qL_1^2}{12} + \frac{PL_1}{8} \\ -\frac{PL_1}{8} \end{Bmatrix} \quad (1-17)$$

## 2. 求杆端弯矩

有非结点荷载作用的连续梁杆端弯矩，是由两部分组成：一部分是在结点加阻止转动约束条件下的杆端弯矩，即各杆的固端弯矩，另一部分是在等效结点荷载作用下的杆端弯矩。

将两部分叠加起来即得非结点荷载作用下各杆的杆端弯矩如下：

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{Bmatrix}^{(e)} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{02} \end{Bmatrix}^{(e)} \quad (1-18)$$

### § 1-5 边界条件的处理

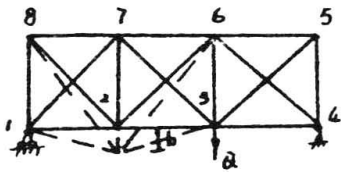


图 1-6

图 1-6 所示简支桁架梁，我们写出其平衡方程的方法是逐个结点按  $u_i, v_i$  两个方向分别写成：

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & \dots & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & \dots & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & \dots & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & \dots & k_{46} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & \dots & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_6 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

如果对(a)这个平衡方程不进行具体处理，是不能求解的，因为  $[k]$  为一奇异矩阵。

图 1-6 所示桁架的边界：一类情况是荷载知道而结点位移不知，如 5, 6, 7, 8 及 3 结点；另一类是结点的位移知道，而荷载不知，如 1, 4 及 2。根据这一情况，我们就可以将 (1-15) 式分块写成：

$$\begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ab}^T & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_a \\ p_b \end{Bmatrix} \quad (b)$$

或写成

$$[k_{aa}]\{\delta_a\} + [k_{ab}]\{\delta_b\} = \{p_a\} \quad (c)$$

$$[k_{ab}]^T\{\delta_a\} + [k_{bb}]\{\delta_b\} = \{p_b\} \quad (d)$$

其中  $\{\delta_a\}, \{p_b\}$  分别是未知的位移和支反力； $\{\delta_b\}, \{p_a\}$  为已知的位移和结点荷载。

只要已经给出的位移  $\{\delta_b\}$  足以阻止结构刚体移动，则  $[k_{aa}]$  就是非奇异的，则可解得  $\{\delta_a\}$ 。

$$\text{由 (c) 式: } \{\delta_a\} = [k_{aa}]^{-1} (\{p_a\} - [k_{ab}]\{\delta_b\}) \quad (e)$$

将 (e) 代入 (a) 式得：

$$\{p_b\} = ([k_{bb}] - [k_{ab}]^T [k_{aa}]^{-1} [k_{ab}])\{\delta_b\} + [k_{ab}]^T [k_{aa}]^{-1} \{p_a\} \quad (f)$$

通过分块矩阵，即可求得支反力和结点位移，假如支点无位移，即  $\{\delta_b\} = 0$ ，则求得简单，(c)(d) 二式成为：

$$[k_{aa}]\{\delta_a\} = \{p_a\} \quad (g)$$

$$[k_{ab}]^T\{\delta_a\} = \{p_b\} \quad (d)$$



而未知量  $\{\delta_a\} = [k_{aa}]^{-1}\{P_a\}$ ,  $\{P_b\} = [k_{ab}]^T [k_{aa}]^{-1}\{P_a\}$  求解更易。

但是，在较复杂问题中，方程式成百上千，将一个大型矩阵  $[k]$  分块，在程序上实行还是比较麻烦。下面我们研究一些简单办法。

一)、  $u_1 = 0$  的处理办法：

通常为了设计程序上的方便，矩阵的阶数保持不变，即刚度阵  $[k]$  的行列不减少。所以，在(a)式中：

i) 在刚度阵  $[k]$  中，除了保留与  $u_1$  相对应的主对角线上的系数  $k_{11}$  外，其余  $k_{1j}$  所在行、列的其它元素均改成零。

ii) 在荷载列阵中，令  $x_1 = 0$  则(a)式成为：

$$\begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & k_{24} & \dots & k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & k_{34} & \dots & k_{36} \\ 0 & k_{42} & k_{43} & k_{44} & \dots & k_{46} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & k_{16} & k_{16} & k_{16} & \dots & k_{16} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Y_1 \\ X_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_6 \end{Bmatrix} \quad (i)$$

此时按(a)式进行求解，就能实现  $u_1 = 0$  这一条件，而  $v_1 = v_6 = 0$  的条件同样处理。

二)、  $v_1 = b$  的处理

我们设想这样一种状态，除  $\bar{v}_1 = -b$  外，其余各结点都被固定。这时，结点位移列阵是：

$$\{\bar{\delta}\} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -b \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$$

结点荷载列阵是：

$$\{\bar{P}\} = [k]\{\bar{\delta}\} = [-k_{11} \cdot b \quad -k_{21} \cdot b \quad \dots \quad -k_{16} \cdot b]^T$$

把这种状态叠加到原来的结构上去，得到新的结点平衡方程如下：

$$[k](\{\delta\} + \{\bar{\delta}\}) = \{P\} + \{\bar{P}\}$$

再使边界条件满足下式：

$$v_1 + \bar{v}_1 = v_1 - b = 0$$

仿照  $u_1 = 0$  的办法进行处理，则可实现  $v_1 = b$ 。

i)、在刚度矩阵  $[k]$  中，除了保留与  $v_1$  相应的第 4 行，第 4 列的对角线系数  $k_{44}$  外，其余均改成零。

ii)、在荷载列阵中，与  $v_1$  对应的荷载写成  $Y_1 = k_{44} \cdot b$ ，其余都改为  $\{P\} + \{\bar{P}\}$  中相应各项  $X_1 - k_{14} \cdot b \quad Y_1 - k_{44} \cdot b \dots$

则方程式(a)成为：