全国高等医药院校药学类规划教材

QUANGUO GAODENG YIYAO YUANXIAO YAOXUELEI GUIHUA JIAOCAI

高等数学

（第二版）

GAODENG SHUXUE

主编 刘艳杰 黄榕波

中国医药科技出版社

全国高等医药院校药学类规划教材

高等数学

（第二版）

主　编　刘艳杰　黄榕波

副主编　盛海林　项容武

编　委　（以姓氏笔画为序）

刘桂娟（泰山医学院）

刘艳杰（沈阳药科大学）

吕　同（山东大学）

孙爱玲（中国药科大学）

庄锦才（广东药学院）

张晓萍（沈阳药科大学）

言方荣（中国药科大学）

项容武（沈阳药科大学）

郭东星（山东医科大学）

盛海林（中国药科大学）

黄榕波（广东药学院）

中国医药科技出版社

内 容 提 要

本书是全国高等医药院校药学类规划教材之一，是《高等数学》的第二版。本书分为两篇，第一篇为数学理论，第二篇为数学实验，将数学实验作为高等数学教学的一部分，这是本书的一大特色和创新点。本书内容系统而全面，例题典型实用，而数学实验部分更是基于医药数学建模的需要，融入了数学软件的使用，以提高学生的计算和应用能力。

本书为高等医药院校药学类本科教材，也可作为函授本科教材和医药研究工作者的数学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学／刘艳杰，黄榕波主编．—2版．—北京：中国医药科技出版社，2010.9

全国高等医药院校药学类规划教材

ISBN 978-7-5067-4690-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①刘…②黄 Ⅲ.①高等数学-医学院校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第150418号

美术编辑 张 璐

版式设计 郭小平

出版 中国医药科技出版社

地址 北京市海淀区文慧园北路甲22号

邮编 100082

电话 发行：010-62227427 邮购：010-62236938

网址 www.cmstp.com

规格 787×1092mm 1/16

印张 21 1/4

字数 479千字

初版 2006年12月第1版

版次 2010年9月第2版

印次 2010年9月第1次印刷

印刷 三河市腾飞印务有限公司

经销 全国各地新华书店

书号 ISBN 978-7-5067-4690-8

定价 39.00元

全国高等医药院校药学类规划教材常务编委会

出 版 说 明

全国高等医药院校药学类规划教材是目前国内体系最完整、专业覆盖最全面、作者队伍最权威的药学类教材。随着我国药学教育事业的快速发展，药学及相关专业办学规模和水平的不断扩大和提高，课程设置的不断更新，对药学类教材的质量提出了更高的要求。

全国高等医药院校药学类规划教材编写委员会在调查和总结上轮药学类规划教材质量和使用情况的基础上，经过审议和规划，组织中国药科大学、沈阳药科大学、广东药学院、北京大学药学院、复旦大学药学院、四川大学华西药学院、北京中医药大学、西安交通大学医学院、华中科技大学同济药学院、山东大学药学院、山西医科大学药学院、第二军医大学药学院、山东中医药大学、上海中医药大学和江西中医学院等数十所院校的教师共同进行药学类第三轮规划教材的编写修订工作。

药学类第三轮规划教材的编写修订，坚持紧扣药学类专业本科教育培养目标，参考执业药师资格准入标准，强调药学特色鲜明，体现现代医药科技水平，进一步提高教材水平和质量。同时，针对学生自学、复习、考试等需要，紧扣主干教材内容，新编了相应的学习指导与习题集等配套教材。

本套教材由中国医药科技出版社出版，供全国高等医药院校药学类及相关专业使用。其中包括理论课教材82种，实验课教材38种，配套教材10种，其中有45种入选普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

全国高等医药院校药学类规划教材

编写委员会

2009年8月1日

第二版前言

随着我国高等教育改革的深入和教育事业的迅猛发展，医药类专业人才的培养模式和要求有了极大的变化和提高，特别是随着数学软件的广泛应用和大学生数学建模竞赛活动的深入进行，对新型药科人才的数学能力和素质提出了更新更高的要求。

本书是在由杨静化教授主编的第一版《高等数学》的基础上，进行了全面的修订和完善，在保持了上一版教材的科学性和系统性的前提下，以“培养数学抽象思维，启迪数学应用能力，结合医药数学建模，融入数学软件使用，提高计算和应用能力”为宗旨，同时，针对医药类本科学生的基础和培养要求，对教材内容的深度和广度进行了调整，使内容更加系统而全面，例题典型实用，力求简明易懂，深入浅出，注重学习兴趣的培养。近几年部分学校开设了数学实验课程，对于培养学生数学能力和计算机应用能力都有着巨大意义，取得了良好的教学效果，应在高等数学课程的教学中广泛普及。所以，本书分为两篇，上篇为数学理论，下篇为数学实验，将数学实验作为高等数学教学的一部分，这是本书的一大特色和创新点。本教材的主要特点为：

1. 作为医药类基础课教材，强调夯实基础，重点掌握概念方法，强化实际应用能力，体现学以致用。

2. 配合大学生数学建模活动，在知识背景和例题选择上引导学生掌握医学数学建模方法，促进数学与医药学的相互渗透与结合，提高学生的数学修养和自主应用能力。

3. 强化以计算机应用为基础的数学运算技能的培养。本书采用 Mathematica 软件来开展数学实验，通过二十几学时的数学实验课使学生能从另一个角度了解数学的应用价值，提高其数学应用和数值计算能力。

4. 本书在知识点讲解和例题选择上还兼顾了医药类相关院校的考研要求，力求例题典型，覆盖面广，习题类型全面。

本书为高等医药院校药学类本科教材，也可作为函授本科教材和医药研究工作者的的数学参考书。

本书编者来自国内著名的三大药学院校和部分医学院校的一线教师，他们将自己多年来的教学经验和体会凝聚在编写过程中，付出了大量的心血，

在此，对各位老师的努力表示衷心的感谢！本书还得到了中国医药科技出版社的大力支持和帮助，在此，也表示诚挚的谢意！

由于时间紧迫，书中不免有一些错误和不妥之处，恳请广大读者提出批评指正！

刘艳杰　黄榕波

2010年7月

目录 CONTENTS

上篇　数学理论

第一章　函数极限与连续 …… (3)

第一节　函数 …… (3)
第二节　极限 …… (10)
第三节　极限的运算 …… (16)
第四节　极限存在准则与两个重要极限 …… (19)
第五节　函数的连续性 …… (23)
习题一 …… (29)

第二章　导数与微分 …… (32)

第一节　导数的概念 …… (32)
第二节　函数四则运算的求导法则 …… (36)
第三节　复合函数、反函数的求导法则 …… (38)
第四节　隐函数、含参数方程的求导法则 …… (40)
第五节　高阶导数 …… (43)
第六节　微分及其运算 …… (45)
习题二 …… (50)

第三章　中值定理和导数的应用 …… (53)

第一节　微分中值定理 …… (53)
第二节　洛必达法则 …… (58)
第三节　泰勒公式 …… (61)

第四节　函数的单调性与极值 …… (65)
第五节　函数性态的研究 …… (70)
第六节　导数在生命科学中的应用 …… (74)
习题三 …… (76)

第四章　不定积分 …… (79)

第一节　不定积分的概念与性质 …… (79)
第二节　换元积分法 …… (84)
第三节　分部积分法 …… (91)
第四节　有理函数的不定积分 …… (94)
习题四 …… (97)

第五章　定积分及其应用 …… (100)

第一节　定积分的概念与性质 …… (100)
第二节　微积分学基本定理 …… (106)
第三节　换元积分法 …… (110)
第四节　分部积分法 …… (112)
第五节　反常积分与 $\Gamma(x)$ …… (113)
第六节　定积分在几何中的应用 …… (117)
第七节　定积分在医药学中的应用 …… (121)
习题五 …… (121)

第六章　微分方程 …… (125)

第一节　微分方程的基本概念 …… (125)
第二节　可分离变量的微分方程 …… (128)
第三节　齐次方程 …… (130)
第四节　一阶线性微分方程 …… (132)
第五节　可降阶的微分方程 …… (136)
第六节　二阶常系数线性齐次微分方程 …… (138)
第七节　二阶常系数线性非齐次微分方程 …… (141)
习题六 …… (145)

第七章　空间解析几何 …… (148)

第一节　空间直角坐标系 …… (148)
第二节　向量及其线性运算 …… (150)

第三节 两个向量的数量积和向量积 ……………………………… (155)
第四节 平面 ………………………………………………………… (158)
第五节 空间直线 …………………………………………………… (163)
第六节 二次曲面 …………………………………………………… (167)
习题七 ………………………………………………………………… (176)

第八章 多元函数的微分法 ………………………………………… (179)

第一节 多元函数的极限与连续 …………………………………… (179)
第二节 偏导数 ……………………………………………………… (185)
第三节 全微分 ……………………………………………………… (190)
第四节 多元复合函数的求导 ……………………………………… (194)
第五节 隐函数的求导 ……………………………………………… (196)
第六节 方向导数与梯度 …………………………………………… (198)
第七节 偏导数在几何方面的应用 ………………………………… (202)
第八节 多元函数的极值 …………………………………………… (206)
习题八 ………………………………………………………………… (211)

第九章 重积分 …………………………………………………… (215)

第一节 二重积分的定义和性质 …………………………………… (215)
第二节 二重积分的计算 …………………………………………… (219)
第三节 三重积分 …………………………………………………… (227)
习题九 ………………………………………………………………… (234)

第十章 曲线积分 ………………………………………………… (237)

第一节 对弧长的曲线积分 ………………………………………… (237)
第二节 对坐标的曲线积分 ………………………………………… (240)
第三节 格林公式及其应用 ………………………………………… (244)
习题十 ………………………………………………………………… (249)

第十一章 无穷级数 ……………………………………………… (251)

第一节 常数项级数的概念和性质 ………………………………… (251)
第二节 常数项级数的收敛法 ……………………………………… (254)
第三节 幂级数 ……………………………………………………… (261)
第四节 函数展开成幂级数 ………………………………………… (266)
第五节 函数的幂级数展开式的应用 ……………………………… (270)

习题十一 …………………………………………………………………… (275)

下篇 数学实验

实验一 Mathematica 基本知识和基本操作（4 学时） ……………………… (281)
实验二 极限的计算（2 学时） ……………………………………………… (291)
实验三 计算导数和极值（3 学时） ………………………………………… (293)
实验四 不定积分与定积分（3 学时） ……………………………………… (296)
实验五 级数（3 学时） ……………………………………………………… (299)
实验六 微分方程（3 学时） ………………………………………………… (302)
实验七 三维图形（4 学时） ………………………………………………… (305)
实验八 偏导数与全微分及其应用（3 学时） ……………………………… (311)
实验九 重积分（2 学时） …………………………………………………… (314)
习题答案 …………………………………………………………………… (315)

上　篇

数　学　理　论

第一章

函数极限与连续

函数是微积分学的主要研究对象，极限是微积分学研究函数的基本方法。本章介绍极限的概念及其运算规则、连续函数的概念及其性质。

第一节　函　　数

一、函数的概念

在研究和观察客观世界中的某一现象的变化过程时，常会遇到两种不同的量：一种是在该变化过程中，数值保持不变的量，称为**常量**；另一种是在该变化过程中可以取不同数值的量，称为**变量**。例如，圆的半径 r 变化时，圆的面积 S 随之改变，但圆的面积与圆的半径的平方之比 $S/r^2=\pi$ 是不变的，即 S 和 r 是变量，π 是常量。变量的取值范围通常采用区间或邻域的形式来表示。

实数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in R\}$，称之为**闭区间**，记作 $[a,b]$；实数集 $\{x\mid a<x<b,x\in R\}$，称之为**开区间**，记作 (a,b)。类似地，还可定义**半开区间**和**无穷区间**，即半开区间 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b,x\in R\}$，$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b,x\in R\}$；无穷区间

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty,x\in R\}$$

设 a 是数轴上的某一定点，实数 $\delta>0$，则**点 a 的 δ 邻域**是指数集 $\{x\mid |x-a|<\delta,x\in R\}$，记为 $U(a,\delta)$。可见点 a 的 δ 邻域就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$。

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集。若对于任何一个 $x\in D$，变量 y 按某种法则 f 总有确定的值 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数。记为 $y=f(x)$，$x\in D$。

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为这个函数的定义域，也记为 D_f，即 $D_f=D$。对于 $x_0\in D$，按照对应法则 f，总有确定的值 y_0 [记为 $f(x_0)$] 与之对应，称 $f(x_0)$ 为函数在 x_0 处的函数值。当自变量 x 取遍 D 中的所有数值时，对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数的值域，记为 R_f，即 $R_f=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$。

当函数关系由实际问题给出时，函数的定义域应由实际问题的具体要求来确定；当函数关系纯粹是由解析式给出时，函数的定义域就是使解析式有意义的一切实数所构成的集合，这种定义域又称为函数的自然定义域。

例 1.1　对于函数 $y^2=x$ 而言，定义域为 $x\geqslant 0$。可是，与每一个大于零的 x 值对应

的 y 值有两个：$y=\sqrt{x}$ 和 $y=-\sqrt{x}$。例如，当 $x=4$ 时，$y=2$ 和 $y=-2$，等等。

如果函数 $y=f(x)$ 对定义域 D 内每一个确定的 x 值，只有唯一的一个 y 值与其相对应，称之为**单值函数**。而例 1.1 中的函数，对于定义域中的每一个 x 值，都能得到两个不同的 y 值。这类由定义域中的一个 x 值，能得到两个或以上不同的 y 值的函数，称之为**多值函数**。在本书中，若无特别说明，所研究的函数都是单值函数。

在平面直角坐标系 xoy 中，点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称作函数 $y=f(x)$ 的图形或图像，它们通常为曲线形式。

函数的表示法一般有三种：解析法、图像法、表格法。本课程主要研究解析式表示的函数。

例 1.2　函数 $y=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$

这类基于解析式表示的函数，它们在定义域的不同范围，函数表达式不同，称之为**分段函数**。

分段函数的定义域为自变量的各个不同取值范围的并集，图形由几段不同的曲线组成，例 1.2 中的分段函数称为符号函数，记为 $y=\operatorname{sgn}x$，其定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$。图形见图 1－1。

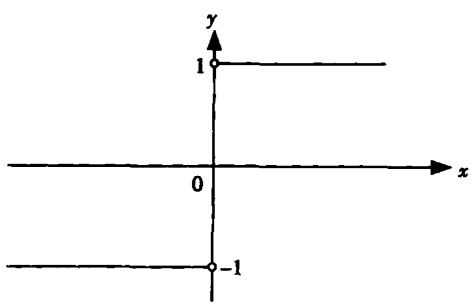

图 1－1

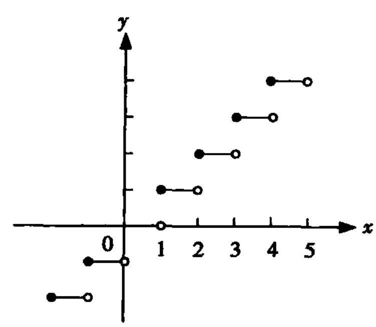

图 1－2

例 1.3　对于任意一个实数 x，取它的不超过 x 的最大整数值作为 y 值，称为对 x 取整，也称之为取整函数，记作 $y=[x]$。例如 $[0.36]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[-\pi]=-4$，等等。定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为整数集 Z。作图可见图 1－2。

二、函数的性质

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，若存在一个正数 M，对于所有的 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 I 内**有界**，如果不存在这样的正数 M，则称 $y=f(x)$ 在 I 内**无界**。

例如，对于任意 $x\in R$，恒有 $|\cos x|\leqslant 1$，因此函数 $y=\cos x$ 在 R 上有界。而函数

$y=\dfrac{1}{x-1}$ 在 (1,2) 内无界，在 $[2,+\infty)$ 上有界。确定函数是否有界，是与考虑的范围密切相关的。

2. 函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义，若对区间 I 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 内是**单调递增**的；当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 内是**单调递减**的。单调递增和单调递减的函数统称为单调函数。

单调递增函数的图形是沿 x 轴正方向逐渐上升的曲线（图 1－3）；单调递减函数的图形是沿 x 轴正方向逐渐下降的曲线（图 1－4）。

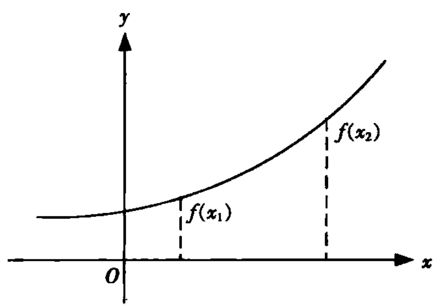

图 1－3

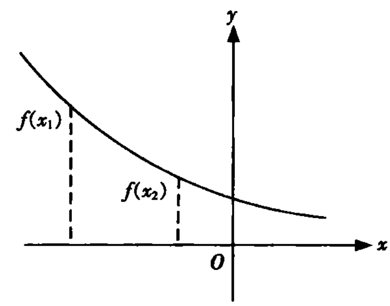

图 1－4

3. 函数的奇偶性

如果函数 $y=f(x)$ 对其定义域内的每一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**。如果函数 $y=f(x)$ 对其定义域内的每一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**。奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称。

4. 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在一个不等于零的常数 T，使得对每一个 $x\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**，并称常数 T 为这个函数的周期。周期函数的周期不是唯一的，通常所讲的周期指它的最小正周期。

例如，$2k\pi(k=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$ 都是函数 $y=\sin x$ 的周期，而最小正周期为 2π。

三、复合函数与反函数

定义 1.2 设 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，$u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ，且 $D_f\cap R_\varphi\neq\Phi$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是由函数 $u=\varphi(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 复合而成的复合函数。其中 u 称为**中间变量**。

例 1.4 由 $y=\lg u$ 和 $u=4-x^2$ 复合而成的复合函数是 $y=\lg(4-x^2)$。由于 $\lg u$ 的定义域为 $u>0$，只有 $4-x^2>0$，即 $x\in(-2,2)$ 时，复合函数 $y=\lg(4-x^2)$ 才有意义。故这个函数的定义域为 $(-2,2)$。

以上例子是有一个中间变量的复合函数。实际上，复合函数的中间变量可以是两个

或两个以上。在微积分学的计算中，经常会遇到复合函数，并且常常需要将一个比较复杂的复合函数分解成若干个简单的函数。

定义 1.3　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 R_f。若对任一个 $y\in R_f$，均存在唯一的 $x\in D_f$ 与之对应，即满足 $f(x)=y$，由此说明 x 是 y 的函数，称这个函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，$y\in R_f$。习惯上，以 x 表示自变量，y 表示因变量，故 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$。

例如 $y=2x+1$ 的反函数为 $y=\dfrac{x-1}{2}$。

定理 1.1　若 $y=f(x)$ 是定义在数集 D 上的单调函数，则一定存在反函数。（证明略）

对于一些不存在反函数的函数，限制它的定义域，使之成为单调函数后，就可以有反函数。例如，函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调递增。因此，将它的定义域限制为 $[0,+\infty)$ 后，就存在反函数 $g(x)=\sqrt{x}$。

四、初等函数

（一）基本初等函数

中学学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和后面要介绍的反三角函数都是经常遇到的简单函数，将它们与常量函数合在一起统称为**基本初等函数**。简单地复习如下：

1. 常量函数 $y=C$（C 为常量）

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{C\}$。图形为平行于 x 轴，截距等于 C 的直线。

2. 幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数）

定义域、值域与图形随 α 的值不同而异。但不论 α 为何值，x^{α} 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，所有图形都通过点（1，1）。（图 1-5，图 1-6）

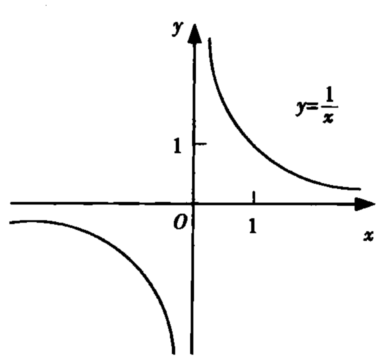

图 1-5

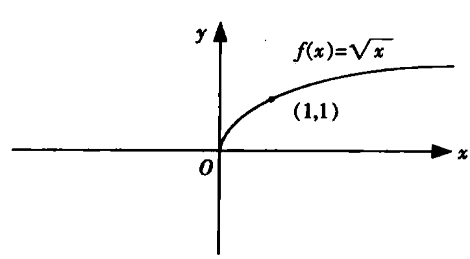

图 1-6

3. 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$。图形通过 $(0,1)$。当 $a>1$ 时，函数单调递增；当 $0<a<1$ 时，函数单调递减（图 1-7）。