主编／常晓兵

120例

高考数学综合题解题思路与方法

经典全面的高考题型

指点迷津的思路点拨

触类旁通的方法聚焦

精妙详细的满分解答

湖北长江出版集团
湖北教育出版社

高考数学综合题120例

解题思路与方法

主编／常晓兵
编者／翁华木　田传奎

湖北长江出版集团
湖北教育出版社

（鄂）新登字 02 号

图书在版编目（CIP）数据

高考数学综合题解题思路与方法/常晓兵主编.—武汉:湖北教育出版社,2010.2
ISBN 978-7-5351-5848-2

Ⅰ.高… Ⅱ.常… Ⅲ.数学课-高中-解题-升学参考资料
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 231698 号

出版 发行:湖北教育出版社 武汉市青年路 277 号
网 址:http://www.hbedup.com 邮编:430015 电话:027-83619605

经 销:新 华 书 店
印 刷:湖北开元印刷有限公司印刷 (437100·咸宁市金桂大道)
开 本:880mm×1230mm 1/32 8.25 印张
版 次:2010 年 2 月第 1 版 2010 年 2 月第 1 次印刷
字 数:223 千字 印数:1-6 000

ISBN 978-7-5351-5848-2 定价:16.00 元

前 言

高中新课程标准的实行，使新高考较旧高考发生了深刻的变化，也对我们的高考复习提出了更新更高的要求.近年来各省市高考试题中都出现了大量立意新颖，思路灵活多变，要求解题思维灵动创新的“综合题”.许多学生在平时的训练中也做了很多“综合题”，但面对高考中的“综合题”学生仍然感到力不从心，束手无策.究其原因，其实是没有领悟试题的实质，没有掌握解决这些“综合题”的思路与方法，不能举一反三，触类旁通.

本书就是试图从培养学生创新思维、综合运用知识的能力入手，做到既有知识的综合交叉，又有能力的拓展延伸，为学生提供一把解读高考“综合题”的金钥匙.力图通过选择新颖、经典、针对性强的试题进行独到而深刻的分析，总结和反思(这也是本书的精彩之处)，使学生把握高考“综合题”的命题特点，帮助学生完成新高考复习阶段质的飞跃.

本书按高考考查的热点、重点和难点分七个专题，每个专题设立“高考导航”、“方法指要”、“典例精析”、“模拟演练”四大栏目.

【高考导航】——分析该专题高考命题特点及高考命题趋向.

【方法指要】——对该专题内容的特点和解题思路、方法做总体的归纳和概述并延伸出对能力的要求.

【典例精析】——通过自编的原创题并结合近几年高考试题，具体揭示试题解法，分“思路点拨”、“满分解析”、“解题反思”和“触类旁通”几部分.**思路点拨**:提供解决该题的核心路径和手段;**满分解析**:不仅给出完整的解答，更重要的是对最关键的步骤都做了点评，为开启学生的思维做了很好的铺垫;**解题反思**:通过该题揭示一类题的解题规律和方法，并提出一些好的想法和注意点;**触类旁通**:通过与例题相关习题的训练引导学生深化对问题的理解，达到举一反三的目的.

【模拟演练】——结合高考的要求，精选本专题内容的综合题，让学生在综合训练中进一步掌握解题的思路和方法.

在例题、习题的选择和对问题的分析上作者都倾注了大量的心血，应该说凝聚了作者几十年高考的经验.所有习题、例题均有解答，对准备高考学生和教师都有很好的参考价值.

编　者

2010 年 1 月

目录

第一讲

函数、导数与不等式

高考导航

函数与不等式的问题是历年高考的热门话题，往年高考中既有2～4道小题，又有1～2道大题. 从近几年高考看，函数、方程、不等式的试题进一步增加，多数作为压轴题出现.

从题型来看，函数与不等式解答题是高考命题的重要题型，它的解答题需要用到导数的相关知识. 其命题热点经常是与导数知识的综合考查，出现频率较高的题型是最值、范围问题，单调性或方程根的讨论等综合问题.

方法指要

从命题趋势看，函数的奇偶性和单调性有向抽象函数拓展的趋势，要注意图象的平移变换、伸缩变换、对称变换，函数图象的对称性、函数值的变换趋势. 反函数问题一般不需要求出反函数的解析式，只要将问题转换为与原函数相关的问题来解决就简单多了. 对指数函数与对数函数的考查，大多是以函数的性质为依托，结合运算推理来解决，能比较熟练地运用性质进行有关数式的大小比较，方程解的讨论等. 关于三次函数的问题应特别引起关注. 不等式重点考查的有四种题型，即解不等式，证明不等式，不等式的应用，不等式的综合性问题. 突出不等式的知识在解决实际问题中的应用价值，借此来强化学生的应用意识. 不等式证明常与函数、数列、导数综合在一起，证明过程中的放缩法、数学归纳法、构造函数法是高考命题的一个热点，其中放缩的“度”的把握更能显出解题的真功夫. 此外关于连续函数在闭区间上的最值定理及有高等数学背景的函数的凸凹性问题也有可能在试题中出现.

典例精析

例 1 若 $f_1(x)=3^{|x-p_1|}$，$f_2(x)=2\cdot 3^{|x-p_2|}$，$x\in\mathbf{R}$，$p_1$、$p_2$ 为常数，且

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), f_1(x)\leqslant f_2(x)\\ f_2(x), f_1(x)>f_2(x)\end{cases}$$

(1) 求 $f(x)=f_1(x)$ 对所有实数 x 成立的充要条件(用 p_1、p_2 表示)；

(2) 设 a、b 为两实数，$a<b$，且 p_1、$p_2\in(a,b)$，若 $f(a)=f(b)$，求证：$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的单调增区间的长度和为 $\frac{b-a}{2}$（闭区间 $[m,n]$ 的长度定义为 $n-m$）.

思路点拨

本题第(1)问可转化为无论 p_1、p_2 取何值，$f_1(x)$ 恒小于等于 $f_2(x)$，继续讨论即可；对第(2)问一定要关注“函数问题的几何背景”，即利用函数的图形特征，帮助解题. 但在具体实施中要注意为顺利完成“图”需要分类讨论，去掉指数的绝对值，从而简化函数解析式，否则图形将“异常复杂”而无法完成，所以如何画图是解决问题的关键.

满分解析

(1) $f(x)=f_1(x)$ 恒成立

$\Leftrightarrow f_1(x)\leqslant f_2(x)\Leftrightarrow 3^{|x-p_1|}\leqslant 2\cdot 3^{|x-p_2|}\Leftrightarrow 3^{|x-p_1|-|x-p_2|}\leqslant 2$

$\Leftrightarrow |x-p_1|-|x-p_2|\leqslant \log_3 2$ （*）

若 $p_1=p_2$，则(*)$\Leftrightarrow 0\leqslant\log_3 2$，显然成立；

若 $p_1\neq p_2$，记 $g(x)=|x-p_1|-|x-p_2|$

当 $p_1>p_2$ 时，$g(x)=\begin{cases}p_1-p_2 \quad (x<p_2),\\ -2x+p_1+p_2 \quad (p_2\leqslant x\leqslant p_1),\\ p_2-p_1 \quad (x>p_1).\end{cases}$

所以 $g(x)_{\max}=p_1-p_2$，故只需 $p_1-p_2\leqslant\log_3 2$.

当 $p_1<p_2$ 时，$g(x)=\begin{cases}p_1-p_2 & (x<p_1),\\ 2x-p_1-p_2 & (p_1\leqslant x\leqslant p_2),\\ p_2-p_1 & (x>p_2).\end{cases}$

所以 $g(x)_{\max}=p_2-p_1$，故只需 $p_2-p_1\leqslant\log_3 2$.

综上所述，$f(x)=f_1(x)$ 对所有实数 x 成立的充要条件是 $|p_1-p_2|\leqslant\log_3 2$.

(2) 1^0 如果 $|p_1-p_2|\leqslant\log_3 2$**(承接第一问的结论得出基本分类方式)**，则 $f(x)=f_1(x)$ 的图象关于直线 $x=p_1$ 对称.(如图 1-1)

因为 $f(a)=f(b)$，所以区间 $[a,b]$ 关于直线 $x=p_1$ 对称.

因为减区间为 $[a,p_1]$，增区间为 $[p_1,b]$，所以单调增区间的长度和为 $\frac{b-a}{2}$.

2^0 如果 $|p_1-p_2|>\log_3 2$，不妨设 $p_1<p_2$，则 $p_2-p_1>\log_3 2$.

于是当 $x\leqslant p_1$ 时，$f_1(x)=3^{p_1-x}<3^{p_2-x}<f_2(x)$，从而 $f(x)=f_1(x)$.

当 $x\geqslant p_2$ 时，$f_1(x)=3^{x-p_1}=3^{p_2-p_1}\cdot 3^{x-p_2}>3^{\log_3 2}\cdot 3^{x-p_2}=f_2(x)$，从而 $f(x)=f_2(x)$.

当 $p_1<x<p_2$ 时，$f_1(x)=3^{x-p_1}$ 及 $f_2(x)=2\cdot 3^{p_2-x}$.

由方程 $3^{x_0-p_1}=2\cdot 3^{p_2-x_0}$，得 $x_0=\frac{p_1+p_2}{2}+\frac{1}{2}\log_3 2$.　　①

显然 $p_1<x_0=p_2-\frac{1}{2}[(p_2-p_1)-\log_3 2]<p_2$，表明 x_0 在 p_1 与 p_2 之间.

所以 $f(x)=\begin{cases}f_1(x)(p_1<x\leqslant x_0),\\ f_2(x)(x_0<x<p_2).\end{cases}$ **(将函数用分段的形式具体化、清晰化)**

综上可知，在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)=\begin{cases}f_1(x)(a\leqslant x\leqslant x_0),\\ f_2(x)(x_0<x\leqslant b).\end{cases}$(如图 1-2)

故由函数 $f_1(x)$ 及函数 $f_2(x)$ 的单调性可知，$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的单调增区间的长度之和为 $(x_0-p_1)+(b-p_2)$，由 $f(a)=f(b)$，即

$3^{p_1-a}=2\cdot 3^{b-p_2}$，得 $p_1+p_2=a+b+\log_3 2$.　　②

故由①、②得$(x_0-p_1)+(b-p_2)=b-\frac{1}{2}[p_1+p_2-\log_3 2]=\frac{b-a}{2}$.

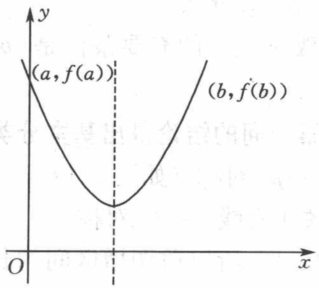

图 1-1

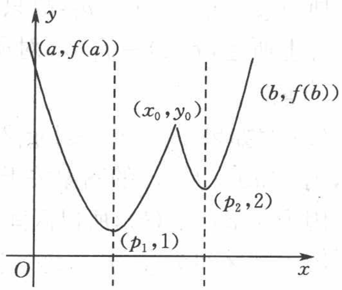

图 1-2

综合 1^0、2^0 可知，$f(x)$在区间$[a,b]$上的单调增区间的长度和为$\frac{b-a}{2}$.

解题反思

实际上对许多代数问题而言，尽可能“画图”，利用图形特征进行联想、转换和信息处理，从而将一个“难”的“新”问题变成熟悉的“老”问题是常用的解题思路. 本题第(1)问属于充分必要条件的探求. 该题将多个函数和不等式综合应用，尤其题目中给出了抽象函数将整个题的难度提升，函数的应用是重点也是难点，需要重点掌握.

触类旁通

1. 定义函数 $f_n(x)=(1+x)^n-1(x>-2,n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求证：$f_n(x)\geqslant nx$；

(2) 是否存在区间$[a,0](a<0)$，使函数 $h(x)=f_3(x)-f_2(x)$，在区间$[a,0]$上的值域为$[ka,0]$？若存在，求出最小的 k 值及相应的区间$[a,0]$；若不存在，说明理由.

该题是一个自创新题(武汉市四月调考题)，读者在完成该题后，对“要关注函数问题的几何背景”可能有更深刻的认识.

解析：(1) 令函数 $g(x)=(1+x)^n-1-nx$，则 $g'(x)=n[(1+x)^{n-1}-1]$. 当 $-2<x<0$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$. ∴ $g(x)$ 在 $x=0$ 处达极小值 $g(0)=0$. ∴ $g(x)\geqslant 0$，即 $f_n(x)\geqslant nx$ ($n=0$ 时取等号).

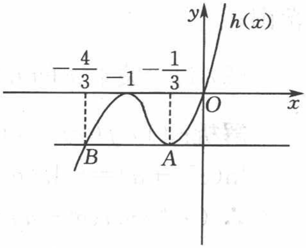

图 1-3

(2) 令 $h(x)=f_3(x)-f_2(x)$
$=x(1+x)^2$，

则 $h'(x)=(1+x)(1+3x)$.

令 $h'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=-\frac{1}{3}$.

∴ $x\in(-2,-1)$ 时，根据函数性质知 $h'(x)<0$；$x\in\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$ 故 $h(x)$ 草图如图 1-3. **(根据函数性质画出图形，即“数形结合”是解本题的关键)**

① 在 $-\frac{1}{3}\leqslant a<0$ 时，$h(x)$ 最小值 $h(a)=ka$.

∴ $k=(1+a)^2\geqslant\frac{4}{9}$.

② 在 $-\frac{4}{3}\leqslant a\leqslant-\frac{1}{3}$ 时，$h(x)$ 最小值

$h\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{27}=ka$，$k=-\frac{4}{27a}$，∴ $\frac{1}{9}\leqslant k\leqslant\frac{4}{9}$.

③ 在 $a\leqslant-\frac{4}{3}$ 时，$h(x)$ 最小值 $h(a)=a(1+a)^2=ka$，

∴ $k=(1+a)^2\geqslant\frac{1}{9}$ ($a=-\frac{4}{3}$ 取等号).

综上，k 的最小值为 $\frac{1}{9}$，此时 $[a,0]=\left[-\frac{4}{3},0\right]$. **(注意分类讨论时等号的选择)**

2. 已知函数 $f(x)=\ln(e^x+a)$ (a 为常数) 是实数集 **R** 上的奇函数，函数 $g(x)=\lambda f(x)+\sin x$ ($\lambda\leqslant-1$) 是区间 $[-1,1]$ 上的减函数.

(1) 若 $g(x)\leqslant t^2+\lambda t+1$ 在 $x\in[-1,1]$ 上恒成立，求 t 的取值

范围;

(2) 讨论关于 x 的方程 $\frac{\ln x}{f(x)}=x^2-2ex+m$ 的根的个数.

解析:(1) $f(x)=\ln(e^x+a)$ 是奇函数,则

$\ln(e^{-x}+a)=-\ln(e^x+a)$ 恒成立.

$\therefore (e^{-x}+a)(e^x+a)=1$.

$1+ae^{-x}+ae^x+a^2=1$.

$\therefore a(e^x+e^{-x}+a)=0$, $\therefore a=0$.

又$\because g(x)$在$[-1,1]$上单调递减,

$\therefore g(x)_{\max}=g(-1)=-\lambda-\sin 1$.

$\therefore$ 只需 $-\lambda-\sin 1\leqslant t^2+\lambda t+1$.

$\therefore (t+1)\lambda+t^2+\sin 1+1\geqslant 0$(其中 $\lambda\leqslant -1$)恒成立.

令 $h(\lambda)=(t+1)\lambda+t^2+\sin 1+1(\lambda\leqslant -1)$,则

$\begin{cases}t+1\leqslant 0,\\ -t-1+t^2+\sin 1+1\geqslant 0.\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}t\leqslant -1,\\ t^2-t+\sin 1\geqslant 0.\end{cases}$

而 $t^2-t+\sin 1\geqslant 0$ 恒成立, $\therefore t\leqslant -1$.

(2) 由(1)知 $f(x)=x$, $\therefore$ 方程为 $\frac{\ln x}{x}=x^2-2ex+m$.

令 $f_1(x)=\frac{\ln x}{x}$, $f_2(x)=x^2-2ex+m$.

$\because f_1'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

当 $x\in(0,e)$时, $f_1'(x)\geqslant 0$,

$\therefore f_1(x)$在$(0,e]$上为增函数;

$x\in[e,+\infty)$时, $f_1'(x)\leqslant 0$,

$\therefore f_1(x)$在$[0,e)$上为减函数.

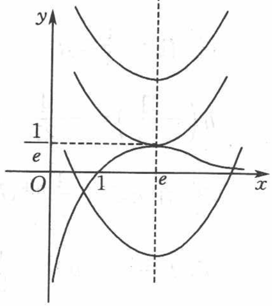

图 1-4

当 $x=e$ 时, $f_1(x)_{\max}=f_1(e)=\frac{1}{e}$.

而 $f_2(x)=(x-e)^2+m-e^2$,

$\therefore$ 函数 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 在同一坐标系的大致图象如图 1-4 所示.

$\therefore$ ① 当 $m-e^2>\frac{1}{e}$,即 $m>e^2+\frac{1}{e}$时,方程无解.

② 当 $m-e^2=\frac{1}{e}$，即 $m=e^2+\frac{1}{e}$ 时，方程有一个根.

③ 当 $m-e^2<\frac{1}{e}$，即 $m<e^2+\frac{1}{e}$ 时，方程有两个根.

3. 已知函数 $f(x)=\ln(1+e^x)-x(x\in\mathbf{R})$ 有下列性质："若 $x\in[a,b]$，则存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$"成立.

(1) 利用这个性质证明 x_0 唯一；

(2) 设 A、B、C 是函数 $f(x)=\ln(1+e^x)-x(x\in\mathbf{R})$ 图象上三个不同的点，求证：$\triangle ABC$ 是钝角三角形.

证明：(1) 假设存在 x_0'、$x_0\in(a,b)$，且 $x_0'\neq x_0$，使得

$f(b)-f(a)=(b-a)f'(x_0)$， ①

$f(b)-f(a)=(b-a)f'(x_0')$. ②

①－②，得 $(b-a)f'(x_0)=(b-a)f'(x_0')$.

$\because b>a$，$\therefore b-a\neq 0$，$\therefore f'(x_0)=f'(x_0')$

$\because f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}-1=\frac{-1}{1+e^x}$，记 $g(x)=f'(x)=-\frac{1}{1+e^x}$，

$\therefore g'(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}>0$.

$f'(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调增函数.

$\therefore x_0=x_0'$，这与 $x_0'\neq x_0$ 矛盾，即 x_0 是唯一的.

(2) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，且 $x_1<x_2<x_3$.

$\because f'(x)=\frac{-1}{1+e^x}<0$，$\therefore f(x)$ 是 $x\in\mathbf{R}$ 上的单调减函数.

$\therefore f(x_1)>f(x_2)>f(x_3)$.

$\because \overrightarrow{BA}=(x_1-x_2,f(x_1)-f(x_2))$，

$\overrightarrow{BC}=(x_3-x_2,f(x_3)-f(x_2))$，

$\therefore \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(x_1-x_2)(x_3-x_2)+(f(x_1)-f(x_2))(f(x_3)-f(x_2))$

$\because x_1-x_2<0$，$x_3-x_2>0$，$f(x_1)-f(x_2)>0$，$f(x_3)-f(x_2)<0$.

$\therefore \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}<0$，$\therefore \cos B<0$，$\angle B$ 为钝角. 故 $\triangle ABC$ 为钝角三角形.

例 2 （2008·江西省）已知函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{\frac{ax}{ax+8}}$，$x\in(0,+\infty)$.

（Ⅰ）当 $a=8$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）对任意正数 a，证明：$1<f(x)<2$.

思路点拨

问题（Ⅰ）是常规问题；对问题（Ⅱ）注意变量替换，放缩法等不等式证明的技巧. 从不等式证明思维上，还要经常想到分析法以及均值不等式，这是破解不等式证明的常用手段.

满分解析

（Ⅰ）$a=8$ 时，$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{x}{1+x}}=\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{3}$.

$$\therefore f'(x)=\frac{(1+\sqrt{x})'\cdot\sqrt{1+x}-(1+\sqrt{x})\cdot(\sqrt{1+x})'}{1+x}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x}}-\frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}$$

$$=\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+x}\cdot(1+x)}.$$

令 $f'(x)>0$，结合 $x>0$，解得 $0<x<1$.

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，同理 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减.

$\therefore$ $a=8$ 时，$f(x)$ 单调递增区间为 $(0,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$.

（Ⅱ）对任意给定的 $a>0$，$x>0$，因为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{ax}}},$$

若令 $b=\frac{8}{ax}$，则 $abx=8$. ①

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}.$$ **(变形，保持数学美感)** ②

(1) 先证 $f(x)>1$：

因为 $\frac{1}{\sqrt{1+x}}>\frac{1}{1+x},\frac{1}{\sqrt{1+a}}>\frac{1}{1+a},\frac{1}{\sqrt{1+b}}>\frac{1}{1+b}$，

又由 $2+a+b+x\geqslant 4\sqrt[4]{2abx}=8$，$\therefore a+b+x\geqslant 6$.

故 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}$

$>\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$ **(这一步很关键)**

$=\frac{3+2(a+b+x)+ab+bx+ax}{(1+x)(1+a)(1+b)}$

$\geqslant\frac{9+(a+b+x)+(ab+bx+ax)}{(1+x)(1+a)(1+b)}$

$=\frac{1+(a+b+x)+(ab+bx+ax)+abx}{(1+x)(1+a)(1+b)}$

$=1$. **(以上推理要有整体意识)**

(2) 再证 $f(x)<2$：由①、②式中关于 x、a、b 的对称性，不妨设 $x\geqslant a\geqslant b$，则 $0<b\leqslant 2$.

(ⅰ) 当 $a+b\geqslant 7$，则 $a\geqslant 5$，所以 $x\geqslant a\geqslant 5$

因为 $\frac{1}{\sqrt{1+b}}<1,\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}<1$，

故此时 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}<2$.

(ⅱ) 若 $a+b<7$，由①得 $x=\frac{8}{ab},\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{\frac{ab}{ab+8}}$. ③

因为 $\frac{1}{1+b}<1-\frac{b}{1+b}+\frac{b^2}{4(1+b)^2}=\left[1-\frac{b}{2(1+b)}\right]^2$，

所以 $\frac{1}{\sqrt{1+b}}<1-\frac{b}{2(1+b)}$. ④

同理得 $\frac{1}{\sqrt{1+a}}<1-\frac{a}{2(1+a)}$. ⑤

于是 $f(x)<2-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}-2\sqrt{\frac{ab}{ab+8}}\right)$. ⑥

现证明 $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}>2\sqrt{\frac{ab}{ab+8}}$, ⑦

因为 $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}\geqslant 2\sqrt{\frac{ab}{(1+a)(1+b)}}$,

则只要证 $2\sqrt{\frac{ab}{(1+a)(1+b)}}>2\sqrt{\frac{ab}{ab+8}}$.

也就是 $(1+a)(1+b)<8+ab$,即证 $1+a+b+ab<8+ab$,亦即 $a+b<7$,而这显然成立.

综上,对任意正数 a,$1<f(x)<2$.

解题反思

题(1)问题常规,体现导数的工具性;题(2)不等式证明是理科考查的重点,命题时常常以函数为载体,证明是透过函数看问题,结合导数的工具性,通过不等式考查代数推理能力. 该题(2)公认为是2008年高考最难的试题,但认清本质后,应该可以完成.

触类旁通

1. 定义区间 (c,d)、$[c,d)$、$(c,d]$、$[c,d]$ 的长度均为 $d-c$,其中 $d>c$. 已知实数 $a>b$,则满足 $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}\geqslant 2$ 的 x 构成的区间的长度之和为(　　).

A. 1　　B. $a-b$　　C. $a+b$　　D. 2

解析: 由 $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}\geqslant 2$ 移项通分有

$$\frac{2(x-a)(x-b)-(x-a)-(x-b)}{(x-a)(x-b)}\leqslant 0. \quad (*)$$

记 $f(x)=2(x-a)(x-b)-(x-a)-(x-b)=0$ 的两根分别为 x_1、x_2,$x_1<x_2$,而且有 $x_1+x_2=a+b+1$. 因 $f(a)<0$,$f(b)>0$,$a>b$,所以由轴序法知(*)的解是 $x\in(b,x_1]\cup(a,x_2]$,区间长度和为 $(x_1-b)+(x_2-a)=x_1+x_2-(a+b)=1$.

2. 若对任何 $x\in[0,1]$，不等式 $1-kx\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\leqslant 1-lx$ 恒成立，则一定有（　　）.

A. $k\geqslant 0$，$l\geqslant\dfrac{1}{3}$　　　　B. $k\geqslant 0$，$l\leqslant\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$

C. $k\geqslant\dfrac{1}{4}$，$l\leqslant\dfrac{1}{3}$　　　　D. $k\geqslant\dfrac{1}{2}$，$l\leqslant\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$

解析： 对不等式右边 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\leqslant 1-lx$，当 $x\in(0,1]$ 时，变形得

$$l\leqslant\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}(\sqrt{+x}+1)}.$$

而 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}(\sqrt{+x}+1)}$ 在 $x\in(0,1]$ 单调减，

所以 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)}\right)_{\min}=\dfrac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}$.

同理可得 k 的取值范围，故答案选 D.

3. 已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足下列条件：对任意的实数 x_1、x_2 都有 $\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]$ 和 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$，其中 λ 是大于 0 的常数.

设实数 a_0、a、b 满足 $f(a_0)=0$ 和 $b=a-\lambda f(a)$.

（Ⅰ）证明 $\lambda\leqslant 1$，并且不存在 $b_0\neq a_0$，使得 $f(b_0)=0$；

（Ⅱ）证明 $(b-a_0)^2\leqslant(1-\lambda^2)(a-a_0)^2$；

（Ⅲ）证明 $[f(b)]^2\leqslant(1-\lambda^2)[f(a)]^2$.

证明：（Ⅰ）任取 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$，$x_1\neq x_2$，则由

$$\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)] \quad ①$$

和 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$，　②

可知

$$\begin{aligned}\lambda(x_1-x_2)^2&\leqslant(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\\&\leqslant|x_1-x_2|\cdot|f(x_1)-f(x_2)|\\&\leqslant|x_1-x_2|^2.\end{aligned}$$

从而 $\lambda\leqslant 1$. 假设有 $b_0\neq a_0$，使得 $f(b_0)=0$，则由①式知 $0<\lambda(a_0-b_0)^2\leqslant(a_0-b_0)[f(a_0)-f(b_0)]=0$ 矛盾.

$\therefore$ 不存在 $b_0 \neq a_0$，使得 $f(b_0)=0$.

(Ⅱ) 由 $b=a-\lambda f(a)$， ③

可知 $(b-a_0)^2=[a-a_0-\lambda f(a)]^2$

$=(a-a_0)^2-2\lambda(a-a_0)f(a)+\lambda^2[f(a)]^2$. ④

由 $f(a_0)=0$ 和①式，得

$(a-a_0)f(a)=(a-a_0)[f(a)-f(a_0)]\geqslant\lambda(a-a_0)^2$. ⑤

由 $f(a_0)=0$ 和②式知，

$[f(a)]^2=[f(a)-f(a_0)]^2\leqslant(a-a_0)^2$. ⑥

由⑤、⑥代入④式，得

$$(b-a_0)^2\leqslant(a-a_0)^2-2\lambda^2(a-a_0)^2+\lambda^2(a-a_0)^2$$
$$=(1-\lambda^2)(a-a_0)^2.$$

(Ⅲ) 由③式可知

$$[f(b)]^2=[f(b)-f(a)+f(a)]^2$$
$$=[f(b)-f(a)]^2+2f(a)[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2$$
$$\leqslant(b-a)^2-2\cdot\frac{b-a}{\lambda}[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2 \quad \textbf{(用②式)}$$
$$=\lambda^2[f(a)]^2-\frac{2}{\lambda}(b-a)[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2$$
$$\leqslant\lambda^2[f(a)]^2-\frac{2}{\lambda}\cdot\lambda\cdot(b-a)^2+[f(a)]^2 \quad \textbf{(用①式)}$$
$$=\lambda^2[f(a)]^2-2\lambda^2[f(a)]^2+[f(a)]^2$$
$$=(1-\lambda^2)[f(a)]^2.$$

例 3 设 $f(x)=x|x-a|+b$.

(1) 求证：$f(x)$ 为奇函数的充要条件是 $a^2+b^2=0$；

(2) 设常数 $b<2\sqrt{2}-3$，且对任意 $x\in[0,1]$，$f(x)<0$ 恒成立，求实数 a 的范围.

思路点拨

该题第(2)问恒成立是一个常见的问题，通常解法是分离变量或直接求函数的最值，但该题直接选择这两种方法的任何一种我们都将