华南师范大学附属中学校本教材

数学

探究与欣赏

罗碎海 ★ 著

暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

本书出版得到华南师范大学附属中学经费资助

数学
探究与欣赏

罗碎海 ★ 著

暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS
中国·广州

图书在版编目（CIP）数据

数学探究与欣赏/罗碎海著．—广州：暨南大学出版社，2010.5
ISBN 978-7-81135-511-6

Ⅰ.①数…　Ⅱ.②罗…　Ⅲ.①数学课—中学—课外读物　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 081382 号

出版发行：暨南大学出版社

地　址：中国广州暨南大学
电　话：总编室（8620）85221601
　　　　营销部（8620）85225284　85228291　85220693（邮购）
传　真：（8620）85221583（办公室）　85223774（营销部）
邮　编：510630
网　址：http：//www.jnupress.com　http：//press.jnu.edu.cn

排　版：广州市星辰文化发展部照版中心
印　刷：暨南大学印刷厂

开　本：787mm×1092mm　1/16
印　张：12.25
字　数：280 千
版　次：2010 年 5 月第 1 版
印　次：2010 年 5 月第 1 次
印　数：1—2000 册

定　价：22.00 元

作者简介

罗碎海，男，1961年生，陕西宝鸡人，中学数学高级教师。1983年毕业于陕西省宝鸡师范学院数学系，现任教于广州华南师范大学附属中学。

大学毕业后，一直在中学任教，热爱教育事业，刻苦钻研业务，积极开展教改试验，对数学教学和数学发展进行深入的探索和研究，善于从数学的代数形式寻求新内容。教学特点：旁征博引，浅入深出；解题经验：就近原则，顺藤摸瓜；个人追求：对于每个问题，争取向前多走一步。先后发表论文80余篇，其中多篇论文获奖。参编教学用书10多本。

前　言

阿波罗尼斯（Apollonius of Perga，前260—前170）是古希腊亚历山大时代的数学家。他是第一个依据一个平面与一个圆锥相截所得的截面来研究圆锥曲线的人，他的巨著《圆锥曲线》共八卷487个命题，是古希腊几何的登峰造极之作，其中椭圆就是其主要问题之一。1609年，开普勒在《火星运行记》一书中公布了他的发现，行星沿椭圆轨迹绕日运行，太阳位于椭圆的一个焦点上。

18世纪法国学者马拉尔琪实测了蜂房底部菱形，得出令人惊奇而有趣的结论：拼成蜂房底部的每个菱形蜡板，钝角是109°28′，锐角是70°32′。数学家经过精心计算，得出的结果更令人吃惊：建造同样体积且用料最省的蜂房，菱形两邻角正是109°28′与70°32′。

为什么数学家在纸上研究的圆锥曲线竟是空间星球运行的曲线？为什么小小的蜜蜂竟知道用有限的材料造最大容积的蜂房？因为**"世界是按照数学规律形成和发展的"**，这种数学形式的发展与现实内容的统一，正是数学的魅力，数学的价值。正是它才使一代又一代数学家为之折腰、孜孜不倦地追求。

数学的发展主要通过两种方式：一是数学形式的演变；二是现实中的问题。这两种方式是紧密联系在一起的，有时形式先于内容（实际问题），有时内容先于形式。正如电磁感应一样，电变磁、磁变电互相补充促其发展。既然数学是这样发展的，世界是这样形成的，那么我们很自然地应该顺着它发展的道路去认识世界，认识数学，去教数学，去学数学。

本书内容是自己在教学过程中所思考的问题和学生提出的问题的探索过程与结果选编，主要是以中学数学课本中的例题、知识为主进行引申、探索。这种探索既是科学思维方法的形成发展，也是数学内在美的发现和欣赏。书中的有些问题已解决了，有些问题才提出来，其目的是让人们学会思考，学会发现，学会创造。

本书可供中学生课外阅读，作为其数学学习能力提高的辅导书，从中学习发现问题、探究问题的方法与思想，提高分析问题和解决问题的能力，也可作为数学教师教学的参考书和开展研究性学习探讨的专题。对从事数学教育、思维科学的研究人员也有一定的参考价值。更可作为人们提高科学素养，追求至纯、至美，

陶冶情操的读物。

在此感谢华南师范大学附属中学给我提供选修课“数学探究与欣赏”这一平台，这片肥沃的土壤使得我的耕耘取得了丰硕的成果。也感谢我的学生邓健、伍拓奇、李一凡、罗杨等，他们的一些研究方法、结果也被收录在本书中。由于作者水平有限，错误及纰漏之处在所难免，敬请读者指正。

罗碎海

2010 年 3 月

目 录

为了帮助学习者更好地理解和掌握数学发现的逻辑（证明与反驳的方法），戴维斯与赫尔胥就曾设计了这样的教学实例：

1. 如何研究问题

行动 I

原始猜想 1：“如果一个数的最后一位数字是 2，它可以被 2 整除.”

例子：42 与 172 显然都是这样的例子.

证明：一个数是偶数，当且仅当它的最后一位数字是 0，2，4，6，8，所有的偶数都可以被 2 整除，特殊地，最后一位数字是 2 的数可以被 2 整除.

证明（更为精致地）：如果一个数在十进位中是 $\overline{ab\cdots c2}$，那么，它就有形式 $(\overline{ab\cdots c0})+2$，进而 $10Q+2=2(5Q+1)$.

猜想 2：“如果一个数的最后一位是 N，它可以被 N 整除.”

评论：这一步十分大胆并做出了明显的一般化，即使它被证明是假的，天也不会因此而塌下来.

例子：如果一个数的最后一位数字是 5，它可以被 5 整除，这是无可置疑的，如 15，25，128 095 等等.

反例：如果一个数的最后一位数字是 4，它能被 4 整除吗？14 被 4 整除吗？糟了！

反驳：但有些以 4 结尾的数可以被 4 整除，如 24. 某些以数字 9 结尾的数可以被 9 整除，如 99.

经验的概括：看来数字 1，2，…，9 分成了两大类：第一类是指这样的数字 N，以 N 结尾的数可以被 N 整除；第二类是指这样的数字 N，以 N 结尾的数并不总能被 N 整除.

第一类：1，2，5；

第二类：3，4，6，7，8，9.

问题：应当怎样看待以 0 结尾的数？它们能被 0 整除吗？不能，但是它们能

被 10 整除，看来我们应当注意这一情况，这一情形不能被表述成原始的猜想的形式.

定义：让我们把第一类数称为“魔数”．它们具有令人高兴的性质.

暂时性的定理：1，2 和 5 是魔数，它们并不是仅有的魔数.

反例：我们应当怎样去看待 25 呢？它是魔数吗？如果一个数是以 25 结尾的，它可以被 25 整除.

例如，225，625.

反驳：我想我们讨论的是一位数.

回答：就算是这样，但 25 的情形很有趣，让我们把原来的研究拓宽一些.

重新表述：现在 N 未必表示一位数，而也可以是像 23，41，505 这样的数字的组合. 称 N 为魔数，如果以数字组 N 结尾的数可以被 N 整除，这样的推广合适吗？

回答：可以.

例子：25 是魔数，10 是魔数，20 是，30 也是.

反例：30 不是，130 不能被 30 整除. 想一想：你是怎样知道 25 是一个魔数的？

定理 1　25 是一个魔数.

证明：如果一个数是以 25 结尾的，它有形式 $\overline{abc\cdots e25}=\overline{abc\cdots e00}+25$，进而有 $100Q+25=25\ (4Q+1)$.

目标的重新表述：找出所有的魔数.

经验的积累：1，2，5，10，25，50，100，250，500，1 000 等都是魔数.

观察：我们重新找到的魔数看来都是 2 和 5 的乘积，上面所列举的数显然都是这样的情况.

猜测：所有具有以下形式的数 N 都是魔数：$N=2^p\cdot 5^q$，其中 $p\geqslant 0$，$q\geqslant 0$ 且 p，q 是整数.

评论：这一猜测看来是合理的，还有没有什么问题？

反例：取 $p=3$，$q=1$，就有 $N=2^3\times 5=40$. 以 40 结尾的数总能被 40 整除吗？不！例如，140.

重新表述：那么反面的论题怎么样？所有我们发现的魔数都具有形式 $2^p\cdot 5^q$，也许所有的魔数都具有这样的形式？

反驳：这是您刚才所提出的论题吗？

回答：不！刚才提出的反面的论题：具有形如 $2^p\cdot 5^q$ 的数是魔数．你看到两者的不同了吗？

定理 2　如果 N 是一个魔数，则有 $N=2^p\cdot 5^q$ 且 p，q 是整数.

证明：假设任一以 N 结尾的数，它具有形式 $\overline{abc\cdots eN}$. 我们希望能像先前那样

把这一个数分割开来. 为此，设 N 有 $d(N)$ 数位，从而数$\overline{abc\cdots eN}$事实上就等于$\overline{ab\cdots e00\cdots0}+N$，其中在结尾处共有 $d(N)$ 个 0，亦即有形式 $Q\cdot10^{d(N)}+N$[就 $d(N)=2$，3 等的情况试一下]. 所有以 N 结尾的数都具有这样的形式. 反过来，不管 Q 是什么数，数 $Q\cdot10^{d(N)}+N$ 总是以 N 结尾的. 现在，如果 N 是魔数，它就能整除 $Q\cdot10^{d(N)}+N$. 由于 N 能整除 N，因此对任意的 Q 来说，N 总能整除 $Q\cdot10^{d(N)}$，例如，Q 可以是最简单的数 1，因此 N 必须能整除 $10^{d(N)}$. 由于 $10^{d(N)}=2^{d(N)}\cdot5^{d(N)}$是一个质因数分解式，因此，$N$ 本身就必定可以分解成若干个 2 和 5 的乘积.

新的立场：我们现在已经知道任一魔数必有形式 $N=2^p\cdot5^q$，其中 $p\geqslant0$，$q\geqslant0$，我们希望能将它反过来，这样我们就将获得关于魔数的一个充分必要条件.

经验的重新审视：由于我们已经知道任一魔数都具有形式 $N=2^p\cdot5^q$，现在问题就是：p，q 应满足什么条件才能使 N 成为魔数?

猜测：$p<q$?

反例：$p=0$，$q=4$，$N=2^0\times5^4=625$，625 是否是魔数? 不，例如 1 625 不能被 625 所整除.

猜测：$p=q$?

反驳：这时 $N=2^p\cdot5^p=10^p$，即 1，10，100，…，这些数确实是魔数，但还有其他魔数.

猜测：$p>q$?

反例：$p=3$，$q=1$，$N=2^3\times5^1=40$，这不是魔数.

观察：在此需要更深入地研究，行动 I 到此结束. 对于那些具有足够兴趣和毅力的人，这一过程将继续下去.

行动Ⅱ

(在这一行动中，启发性的成分将写得十分简练)

策略的讨论：让我们回到关于形式 $N=2^p\cdot5^q$ 的必要性的证明，我们发现如果 N 是魔数，则它能整除 $10^{d(N)}$. 我们在此是用 $d(N)$ 代表 N 的数位. 也许这就是一个充分条件? 哈哈，一个突破?

定理 3 N 是魔数当且仅当它能整除 $10^{d(N)}$.

证明：必要性已经得到了证明. 如果一个数以 N 结尾，那么，正如我们所知道的，它具有形式 $Q\cdot10^{d(N)}+N$. 由于 N 整除 N，而由假设 N 又能整除 $10^{d(N)}$，从而它确实可以整除 $Q\cdot10^{d(N)}+N$.

美学的反驳：我们的确获得了关于魔数的一个充分必要条件，但这一条件是关于 $d(N)$ 的，应当是关于 N 的或关于 N 的质因数分解式 $2^p\cdot5^q$ 的 (更具体).

讨论：什么时候 $N=2^p\cdot 5^q$ 能够整除 $10^{d(N)}$？由于 $10^{d(N)}=2^{d(N)}\cdot 5^{d(N)}$，从而其充分必要条件就是 $p\leqslant d(N)$，$q\leqslant d(N)$，后者就相当于 $\max(p,\ q)\leqslant d(N)$，我们仍然未能摆脱那个讨厌的 $d(N)$，我们希望能得到一个关于 N 本身或关于 p 和 q 的条件. 我们怎样才能将 $\max(p,\ q)\leqslant d(N)=d(2^p\cdot 5^q)$ 转变成一个较为简便的形式？即如所知，在 $p=q$ 的情形下是没有问题的，写出来就是：$p=\max(p,\ q)\leqslant d(2^p\cdot 5^q)=d(10^p)$，$10^p$ 有 $p+1$ 位数字，从而就有 $p\leqslant p+1$. 在一般情况下，如果我们把 2 的指数与 5 的指数逐个"抵消"了会怎么样？写出 $q=p+h$，其中 $h>0$.

反驳：如果 $p>q$ 就不可能有 $q=p+h$ 且 $h>0$？

回答：这留待以后再说.

讨论：$\max(p,\ p+h)\leqslant d(2^p\cdot 5^{p+h})=d(2^p\cdot 5^p\cdot 5^h)=d(10^p\cdot 5^h)$，由于 $h>0$，$\max(p,\ p+h)=p+h$，另外，对任意的数 Q 来说，$10^p\cdot Q$ 中的数字个数 $=p+$（Q 中数字的个数）. 从而 $p+h\leqslant p+d(5^h)$，即 $h\leqslant d(5^h)$.

问题：什么时候才有 $h>0$ 且 $h\leqslant d(5^h)$？

实验：$h=1$ 时：$1\leqslant d(5^1)$，没有问题. $h=2$ 时：$2\leqslant d(5^2)$，没有问题，$h=3$ 时：$3\leqslant d(5^3)$，没有问题. $h=4$ 时：$4\leqslant d(5^4)=d(625)=3$，不对.

猜测：$h\leqslant d(5^h)$ 当且仅当 $h=1,\ 2,\ 3$.

证明：（略）

重新开始：$p>q$ 怎么样呢？

讨论：设 $p=q+h$，其中 $h>0$，$q+h=\max(q+h,\ h)\leqslant d(2^{q+h}\cdot 5^q)=d(10^q\cdot 2^h)=q+d(2^h)$，即 $h\leqslant d(2^h)$. 何时有 $h\leqslant d(2^h)$？

实验：$h=1$ 时：$1\leqslant d(2^1)$，没有问题. $h=2$ 时：$2\leqslant d(2^2)=d(4)=1$，不对.

猜测：$h\leqslant d(2^h)$ 当且仅当 $h=1$.

证明：（略）

定理 4　N 为魔数当且仅当它等于 10 的幂乘上 1，2，5，25，125.

证明：（略）

2. 对整除性与循环小数的探究

先来看两个归纳的例子：

德国大数学家莱布尼茨曾研究过自然数 n 的分拆方法：

$$\left.\begin{aligned}2&=2\\2&=1+1\end{aligned}\right\}\text{即 } p(2)=2;$$

$$\left.\begin{aligned}3&=3\\3&=2+1\\3&=1+1+1\end{aligned}\right\}\text{即 } p(3)=3;$$

$$\left.\begin{aligned}4&=4\\4&=3+1\\4&=2+2\\4&=2+1+1\\4&=1+1+1+1\end{aligned}\right\}\text{即 } p(4)=5;$$

同理，$5=5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$，即 $p(5)=7$.

$6=6=5+1=4+2=4+1+1=3+3=3+2+1=3+1+1+1=2+2+2=2+2+1+1=2+1+1+1+1=1+1+1+1+1+1$，即 $p(6)=11$.

由此猜想：$p(n)$ 等于第 $n-1$ 个质数. $p(7)$ 应等于 13.

而实际上，

$7=7=6+1=5+2=5+1+1=4+3=4+2+1=4+1+1+1=3+3+1=3+2+2=3+2+1+1=3+1+1+1+1=2+2+2+1=2+2+1+1+1=2+1+1+1+1+1=1+1+1+1+1+1+1$，即 $p(7)=15\neq13$，15 更不是质数.

所以，莱布尼茨称“这是归纳法骗人的极好例子”，我们也不能由此就否定归纳法的价值. 其实科学上（特别是在数论中）有许多重要的结论最初都是用归纳法得到的.

在中学数学课本中有一个有趣的习题：“立方和 = 和平方”问题. 它也源于归纳法.

对于正整数 n，总成立：

$$1^3=1^2$$

$$1^3+2^3=(1+2)^2$$

$$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$$

由此可以归纳出统一结论：

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=(1+2+3+4+\cdots+n)^2$$

即前 n 个自然数的立方和等于它们的和的平方. 我们可以证明（数学归纳法可证）此结论是正确的.

我们一般人往往满足于所得到的结论，但科学家不会就此罢手，法国数学家柳维尔就想："这么奇妙的问题背后有什么本质东西，别的自然数组有无此性质?"他最终探讨出本质内容，按如下步骤所得的自然数组也有此性质：

对于任一自然数 N，比如6，先确定 N 的正因子，这些因子是1，2，3，6. 再确定这些因子的正因子个数为1，2，2，4. 我们得到的数组（1，2，2，4）就具有上述性质，即

$$1^3+2^3+2^3+4^3=81=9^2=(1+2+2+4)^2$$

到此可知，（1，2，3，…，n）是 2^{n-1}的因子的因子数，当然有性质

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=(1+2+3+4+\cdots+n)^2$$

这就验证了数学大师波利亚的名言："吃到树上的禁果之后，还应该好好地寻找一下，地下有没有足以使你大开胃口的野蘑菇?"这句话也说明了事物的特殊性与普遍性的辩证关系和相对关系（一个普遍性也可能是另一个普遍性中的特殊性）.

现在我们就学习科学家的方法：争取在任一个问题上都能向前走一步. 用特殊性与普遍性的辩证关系和相对关系作指导，从平凡的树上找到禁果，在树的周围寻找蘑菇，再在其地下寻找宝藏，使我们的思维世界更加丰富多彩.

1. 关于"9 的乘法"的新发现

有文章报道，有人曾经给南极冰层中的冻鱼加温，冰融化后反而鱼开始游动. 又经常有报道说某地的一棵死去几年的树又开始发芽了. 这些枯木发芽、死灰复燃的事并非天方夜谭，数学上是没有死火山的，说不准突然间会爆发出令人惊异的光亮. "9 的乘法"是很古老的知识，也是大家都很熟悉的数学知识，天天在使用，我们是否对它有新感觉? 能否向前走一步，进而从中发现数字之间更有趣、更本质的规律? 能否看到它耀眼的新光芒?

$$1\times9=09$$
$$2\times9=18$$
$$3\times9=27$$
$$4\times9=36$$
$$\underline{5\times9=45}$$
$$6\times9=54$$
$$7\times9=63$$
$$8\times9=72$$
$$9\times9=81$$
$$10\times9=90$$

从表中可发现以下规律：

①上下与横线等距离的两个结果是个位数与十位数对调位置；

②结果中个位数字从9依次递减1到0，十位数字从0依次递增1到9；

③结果中的数的数字和是9（如$2+7=9$，$3+6=9$等）.

2. 用代数形式表示所发现的规律

代数就是将数、式、问题用字母代替，许多数学问题的证明主要依赖于代数形式.

对于规律③，我们可归纳出以下定理：

定理1 如果一个自然数的各位数字之和能被9整除，则原数能被9整除；反之亦真.

证明：设原数为$\overline{abc\cdots de}$是n位数，

则$\overline{abc\cdots de}=a\times10^{n-1}+b\times10^{n-2}+c\times10^{n-3}+\cdots+d\times10+e$（科学记数法）$=a\times(10^{n-1}-1)+b\times(10^{n-2}-1)+c\times(10^{n-3}-1)+\cdots+d\times(10-1)+(a+b+c+\cdots+d+e)$.

由于$a\times(10^{n-1}-1)+b\times(10^{n-2}-1)+c\times(10^{n-3}-1)+\cdots+d\times(10-1)$能被9整除，所以只要$(a+b+c+\cdots+d+e)$能被9整除，则$\overline{abc\cdots de}$能被9整除.

反之，只要$\overline{abc\cdots de}$能被9整除，$(a+b+c+\cdots+d+e)$就能被9整除.

3. 代数形式的不变性

在三角函数的诱导公式[如$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$]，不管$\alpha$是锐角还是别的角，只要我们将它看成锐角，公式是不变的. 这就体现了代数形式的不变性. 在复合函数的求导中，代数形式的不变性就体现得更充分了.

定理1的证明过程中，我们由数$\overline{abc\cdots de}$得到数字和$(a+b+c+\cdots+d+e)$，可以继续计算该数的数字和（如：95 436——$9+5+4+3+6=27$——$2+7=9$），直到得到一个一位数. 我们把最后这个一位数叫原数的根.

显然，若一个数的根是9，则这个数是9的倍数. 可是如果一个数的根不是9

（如是2），能得到什么？

定理2 如果一个数 $\overline{abc\cdots de}$的根是 r（$r\in \mathbf{N}^*$ 且 $0<r<9$），则数 $\overline{abc\cdots de}$被9除的余数是 r.［如48：$4+8=12$，$1+2=3$，而 $48\div 9=5\cdots\cdots 3$（余3）.］

证明：由定理1的证明，得

$\overline{abc\cdots de}-(a+b+c+\cdots+d+e)=a\times(10^{n-1}-1)+b\times(10^{n-2}-1)+c\times(10^{n-3}-1)+\cdots+d\times(10-1)$.

$\because$ 右端是9的倍数，则左端也应是9的倍数，

$\therefore$ 数 $\overline{abc\cdots de}$与数（$a+b+c+\cdots+d+e$）被9除应有相同的余数.

对于两个正整数的和、差、积被9除的余数与它们单个被9除的余数，我们可得到如下关系：

定理3 如果正整数 n，m 被9除的余数依次为 r_1 与 r_2，那么（$n\pm m$）被9除的余数与（$r_1\pm r_2$）被9除的余数相同；nm 被9除的余数与 r_1r_2 被9除的余数相同.

证明略.

4. 非9的数作除数的余数探讨

上帝是公平的，他对每个数应该是一视同仁的. 数9有这样的性质，别的数有以上性质吗？数7有以上性质吗？对于536，其数字和为14，其数字的根为5，而 $536\div 7$ 的余数是4，$14\div 7=2$，整除，但536既不被7整除，余数也不是数字的根. 没有这种性质，应该有别的什么性质吧？这才能体现上帝的公平性. 或者我们仅仅看到了冰山一角，数字都具有的普遍性还有待我们去发现.

一般的数没有以上类似于数9的性质，但数3有如下性质：

定理4 如果一个数的数字和是3的倍数，则这个数是3的倍数.

证明同定理1.

5. 数字和的过程分解

目标固然重要，但真正的享受还在过程中. 我们往往太急于赶路而错过欣赏路边的风景. 放慢脚步，注意原来每步的分解.

数字95 436的数字和可以看成按以下步骤得到：

95 436——9 543 + 6——954 + 3 + 6——95 + 4 + 3 + 6——9 + 5 + 4 + 3 + 6

以上数字都是9的倍数. 由此定理1与定理2可有下面的叙述：

定理5 一个数，截去末位，并加上此末位数得一新数，当新数能被9整除时，原数能被9整除；当新数不能被9整除时，原数便不能被9整除；当新数被9除的余数是 r 时，原数被9除的余数也是 r.

证明略.

6. 寻求判断整除性的统一方法

设正整数 $A=10x+y$（x 为大于零的整数，$y\in\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$）

$\because A=10x+10y-9y=10(x+y)-9y=9(x+y)-9y+(x+y)$，

显然，只要 $x+y$ 能被 9 整除，A 就能被 9 整除，定理 5 由此得证.

$\because\ A=10x+y=9x+(x+y)$

$\therefore\ A=10x+y$ 与 $x+y$ 除以 9 的余数相同，这是定理 2 的另一证明.

$\because\ A=10x+y=10x-10y+11y=10(x-y)+11y$

显然，只要 $x-y$ 能被 11 整除，A 就能被 11 整除. 由此得到结论：

定理 6　一个数，截去末位，并减去此末位数得一新数，当新数能被 11 整除时，原数就能被 11 整除；当新数不能被 11 整除时，原数便不能被 11 整除.

连续应用定理 6，可得到与定理 1 类似的结论：

定理 7　如果一个数的奇数位数字之和减去偶数位数字之和的差能被 11 整除，则原数就能被 11 整除.

7. 其他数（非 9）的整除规律

将以上的代数式变形，就可以帮我们发现所有自然数类似数字 9 的规律.

设 $A=10x+y$（x，y 同上），

$$
\begin{aligned}
A &=10x+y\\
&=10(x+y)-9y\\
&=10(x-y)+11y\\
&=10(x-2y)+3\times7y\\
&=10(x+2y)-19y\\
&=10(x-3y)+31y\\
&=10(x+3y)-29y\\
&=10(x+4y)-3\times13y\\
&=10(x-5y)+3\times17y\\
&=10(x+5y)-7\times7y\\
&=\cdots
\end{aligned}
$$

可以得到统一结论如下：

①一个数，截去末位，并加上此末位数得一新数，当新数能被 9 整除时，原数就能被 9 整除；当新数不能被 9 整除时，原数便不能被 9 整除；当新数被 9 除的余数是 r 时，原数被 9 除的余数也是 r.

②一个数，截去末位，并减去此末位数得一新数，当新数能被 11 整除时，原数就能被 11 整除，当新数不能被 11 整除时，原数便不能被 11 整除.

③一个数，截去末位，并减去此末位数的 2 倍得一新数，当新数能被 7 整除时，原数可被 7 整除.

④一个数，截去末位，并加上此末位数的 2 倍得一新数，当新数能被 19 整除时，原数可被 19 整除.

⑤一个数，截去末位，并加上此末位数的 3 倍得一新数，当新数能被 29 整除时，原数能被 29 整除.

⑥一个数，截去末位，并加上此末位数的 4 倍得一新数，当新数能被 13 整除时，原数能被 13 整除.

⑦一个数，截去末位，并减去此末位数的 5 倍得一新数，当新数能被 17 整除时，原数能被 17 整除.

⑧一个数，截去末位，并加上此末位数的 5 倍得一新数，当新数能被 7 整除时，原数可被 7 整除.

……

这些结论有很多，在操作过程中，可连续使用.

例如：6 992 能被 19 整除吗?

应用上面的结论可知：6 992 这个数中，$x=699$，$y=2$，$x+2y=699+2\times2=703$. 703 比较大，所以用 703 作为新数，此时 $x+2y=70+6=76$. 76 能被 19 整除 ($76=19\times4$)，所以 6 992 能被 19 整除.

如果看不到 $76=19\times4$，还可将 76 看成新数，这时 $x+2y=7+12=19$，显然是 19 的倍数，所以 6 992 能被 19 整除.

至此，联想到定理 2 中的数字根问题，很自然想到 9 以外的数字的数字根如何？通过验证，发现不具有如定理 2 的性质，如 41 被 19 除的余数为 3，但 $4+1\times2=6$，被 19 除的余数为 6，不是 3. 不过我们可以发现，每做一次“截去末位，并加上此末位数的 n 倍”的变换，余数也相应地变为原来的 n 倍（如上例 41 的余数 3 变为 6，下一次变为 12，再下一次变为 24）.

我们可以把以上具体判断整除性的法则用公式表示：

$A=10x+y=10(x+ny)-(10n-1)y=10(x-ny)+(10n+1)y$

这样，上面的整除性问题可以统一用两句话表达：

⑨一个数，截去末位，并加上此末位数的 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 倍得一新数，当新数能被 $10n-1$（或 $10n-1$ 的因子）整除时，原数可被 $10n-1$（或 $10n-1$ 的因子）整除.

⑩一个数，截去末位，并减去此末位数的 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 倍得一新数，当新数能被 $10n+1$（或 $10n+1$ 的因子）整除时，原数可被 $10n+1$（或 $10n+1$ 的因子）整除.

很自然有人会问：$10n-1$ 或 $10n+1$ 及它们的因子能包含任意的自然数吗？可以，我们用一个例子（寻找判断能被 37 整除的数的规律）来说明：

首先 37 不具有 $10n+1$，$10n-1$ 的特点，但 $37\times3=111$，$37\times7=259$，所以

$$A=10x+y=10(x-11y)+111y=10(x-11y)+3\times37y$$

由此我们可以得到判断方法：一个数截去末位，并减去此末位数的 11 倍得一