数学分析中的问题、方法与实践

主编　陈汝栋

Problems, Methods and Practices in Mathematical Analysis

国防工業出版社
National Defense Industry Press

内容简介

本书分问题篇、方法篇和实践篇3部分。问题篇包含了数学分析中概念理解、方法使用中的254个问题的错误解析，有些问题还是比较深刻的；方法篇包含了数学分析中的常用方法和技巧，分证明方法和计算方法分别予以提炼和总结，并配以精选的例子；实践篇包含数学分析中的部分理论、方法在实际问题中的应用和近年来部分研究生招生的数学分析试题，特别是最后针对近年来各种教材习题解答的泛滥，按照高等教育出版社出版的复旦大学《数学分析》第三版的顺序，重新选择并改编了习题，以克服同学们抄习题解答的不良习惯。我们也期望任何人不要为本习题集出版解答书籍，以便为同学们学好数学分析提供一个良好的环境。

本书可作为高等学校理科数学系学生学习数学分析的参考书和教师备课的良师益友。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析中的问题、方法与实践/陈汝栋主编．—北京：国防工业出版社，2012.9

ISBN 978-7-118-08308-8

Ⅰ.①数… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①数学分析—研究 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第184446号

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本787×1092 1/16 印张19 字数473千字

2012年9月第1版第1次印刷 印数1—4000册 定价38.00元

国防书店：(010)88540777 发行邮购：(010)88540776

发行传真：(010)88540755 发行业务：(010)88540717

前　言

数学分析是高等院校理科数学专业最重要的基础课程。对大学低年级学生来说，往往对基本的概念、各种分析方法，特别是证明技巧的掌握感到望而生畏，表现为做题无思路，学习无信心，尤其是在大量习题解答的诱惑下，甚至一抄了之，结果导致学生对学好数学分析，进而对大学阶段后继课程的学习带来了极大障碍，根本上影响了大学生的培养质量。从2000年以来，我校数学分析教研室全体老师，下决心改变这种状况，从改善教学方法、改革教学内容、CAI课件的制作与使用、数学建模思想融入数学分析课堂、编选新的习题等方面，进行了各种尝试。一个个精彩的例子、漂亮的课件，提高了学生的学习兴趣和自觉性；新的作业选择，遏制了学生抄作业现象，获得了明显效果。

本书包含了这些尝试的部分内容。第一部分是问题篇，以1992年《问题与思考》中分析部分为蓝本，结合近年来的一些结果，提出了254个学生容易混淆和出错的问题，并给出了回答和解析。这些问题对于同学们深入掌握数学分析的基本理论和方法，有较好的促进作用。有些问题还是较深刻的。第二部分是方法篇，将数学分析中的常用方法和技巧，分证明方法和计算方法分别予以提炼和总结，并配以精选的例子，以帮助同学们更好地学好数学分析。最后一部分是实践篇，它包括了数学分析中的部分理论、方法在实际问题中的应用和近年来部分研究生招生的数学分析试题，特别是最后，针对近年来各种教材习题解答泛滥的现象，我们根据高等教育出版社出版的复旦大学《数学分析》第三版的顺序，重新选择并改编了习题，以克服同学们抄习题解答的不良习惯。我们也期望任何人不要为本习题集出版解答书籍，以便为同学们学好数学分析提供一个良好的环境。

本书的第一部分由陈汝栋和于延荣负责编写；第二部分由于延荣、苏永福、李庚雷、陈汝栋、姚永红、孙硕、康平、翟延慧、熊友兵负责证明方法部分，王俊红、王海庆、孙硕、李孟芹、张芳、郭云莲、谢非等人负责计算方法部分；第三部分由陈汝栋、石洛宜负责完成数学分析中相关结论的应用部分，陈汝栋、于延荣负责习题的编写。孙硕、李红军、姚永红、康平及研究生杜云飞、王雪、任奕杰、李俊磊等承担了文字录入工作，最后，由陈汝栋、苏永福、于延荣、姚永红进行了统稿。

由于作者水平有限，加之时间仓促，虽为使本书达到理想效果而竭尽全力，但疏漏之处仍在所难免，诚望读者及各位同行指正。

作 者

2012年8月于天津

目　录

第一部分　问题篇

一、分析引论

（一）函数

1. 经过恒等变形得到的两个函数，是否一定相同，为什么？

答:不一定.$f(x)=1, g(x)=\frac{x}{x}$,当 $x\neq 0$ 时,$f(x)=g(x)$. 但显然 $f(x)\neq g(x)$. 因为恒等变形可以在某个集合上进行.

2. 能否用平面上的一条曲线给定一个函数？是否任意一条曲线都能确定一个函数？

答:能. 但不是任意一条曲线都能确定一个函数. 如图 1－1 所示,该曲线不能确定一个函数,因为对应于$(-1,1)$之间的 x 有两个不同的 y 与之对应.

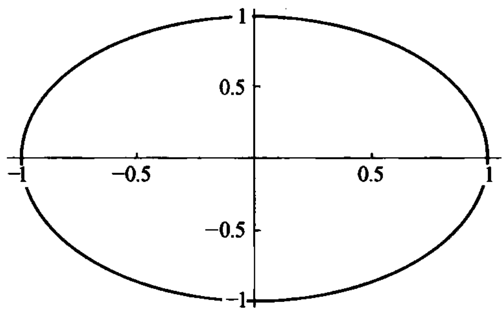

图 1－1

3. 设 $f(x)=\frac{1}{x}$,则 $f(f(x))=x$?

答:否. $f(f(x))$的定义域为 $x\neq 0$,而后者的定义域为 $\mathbf{R}$.

4. $y=f(x)$的定义域为$[a,b]$,则 $f(x+c)$的定义域为$[a+c,b+c]$吗?

答:否. 应为$[a-c,b-c]$.

5. 设 $f(x), g(x)$都单调增加,则

(1) $f(x)+g(x)$单调增加?

(2) $f(x)\cdot g(x)$单调增加?

(3) $f(x)\Big/g(x)$(当 $g(x)\neq 0$)单调增加?

(4) $f(x)-g(x)$单调增加?

答:(1)正确;

(2) 不正确,如 $f(x)=x, g(x)=-x^{-\frac{1}{2}}, x\in(0,+\infty)$;

(3) 不正确,如 $f(x)=x, g(x)=x^{\frac{1}{2}}$;

(4) 不正确,如 $f(x)=x, g(x)=x^3$.

6. 两个相同单调性的函数的复合函数是否仍有相同的单调性?

答:单调增加函数的复合函数必是增函数,单调减少函数的复合函数未必是减函数. 如$f(x)=-x$单调减少,但$f(f(x))=x$非单调减少. 一般的,有下列命题:

命题 设$f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$为n个单调函数,则

$$f(x)=f_n(f_{n-1}(\cdots f_1(x)))$$

单调增加的充分必要条件是f_i中有偶数个单调减少;$f(x)$单调减少的充分必要条件是f_i中有奇数个单调减少.

7. 严格增加的函数是否一定无界?

答:否. 如$y=\arctan x$.

8. 是否存在有在$\mathbf{R}$上定义的无穷个不连续点的严格增加的有界函数?

答:是. 如

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{4n(n-1)}, & \dfrac{1}{n}<x<\dfrac{1}{n-1}(n>1)\\ \arctan x, & x\leqslant 0\\ \arctan(x-1)+1, & x>1\end{cases}$$

函数$f(x)$的图形如图1-2所示.

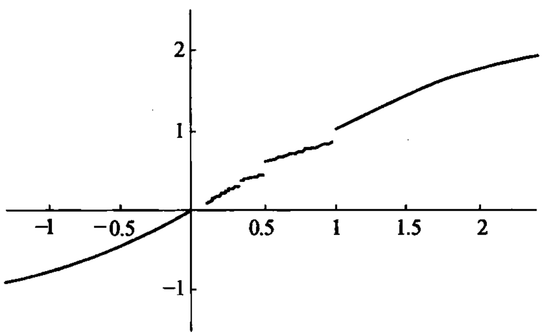

图1-2

9. 任意函数是否都存在单调区间?

答:否. 如$D(x)$(Dirichlet)函数.

10. 周期函数的定义域一定为$\mathbf{R}$(实数集)? 当定义域为区间呢?

答:否. 如$y=\sqrt{\sin x}$.

当定义域为区间时,则定义域为$\mathbf{R}$(可用反证法)

11. 若$f(x+l)=-f(x)$,则$f(x)$是非周期函数?

答:否. 因$f(x+2l)=f(x)$.

一般的,设$f(x+l)=kf(x)(l>0)$,称为广义周期函数,l称为关于k的广义周期,则当$f(x)$连续时,$f(x)$为周期函数的充分必要条件是$k=0,\pm1$(见参考文献[22]).

关于广义周期函数,参考文献[22]中指出如下定理.

定理1 广义周期函数$f(x)$为周期函数的充分必要条件是存在周期函数$\varphi(x)$及$a>0$使得$f(x)=a^x\varphi(x)$.

定理2 $f(x)$为广义周期函数,l为关于k的广义周期,$\varphi(u)$是周期为T的周期函数,若$\ln k$与p可公度,则$\varphi(\ln(f(x)))$在其定义域内为周期函数.

12. 周期函数是否必有最小正周期? 在什么条件下有最小正周期?

答:周期函数未必有最小正周期. 如$D(x)$. 当非常值周期函数$f(x)$在某点连续时,则必有最

小正周期（见参考文献[21]）.

13. 两个周期函数的和、差、积、商是否仍为周期函数?

答:只要考虑和、积情形. 有下列几方面的结论.

(1) 若$f(x)$、$g(x)$为周期函数,且其周期可公度,则$f(x)\pm g(x)$、$f(x)\cdot g(x)$均为周期函数.

(2) *若$f(x)$、$g(x)$为周期函数,且其周期不可公度,$f(x)\pm g(x)$、$f(x)\cdot g(x)$也可能是周期函数(不是周期函数的例子是容易举出的).

例如,任取t_1、t_2、t_3二二无公度,在$I_i=[0,t_i)$$(i=1,2)$上定义关系:$x\sim x'$,如果$x-x'=nt+mt_i$ $(n,m\in\mathbf{Z}$(整数)). 易证此关系为等价关系.

依此等价关系将$I_i(i=1,2)$分为等价类$I_{i,j}$($j\in J$,J为某指标集),可以证明I_{ij}为可数集.

定义$f_i(x)(i=1,2)$:记$\bar{x}_{ij}$为I_{ij}的代表,$f(\bar{x}_{ij})=\bar{x}_{ij}(j\in J)$.

其他点$x=\bar{x}_{ij}+nt+mt_i\in I_{ij}(i=1,2)$,$f_i(x)=\bar{x}_{ij}+na_i(i=1,2)$,其中$|a_i|>\max\{t_1,t_2\}$,且$a_1=-a_2$.

则函数$f_1(x)$、$f_2(x)$为以t_1,t_2为周期的周期函数(且为其最小正周期),$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$为以t为周期的周期函数,这里t_1,t_2不可公度.

若令$L_i(x)=e^{f_i(x)}(i=1,2)$,则$L(x)=L_1(x)\cdot L_2(x)$为以t为周期的周期函数,t_1,t_2为$L_1(x)$、$L_2(x)$的最小正周期,且不可公度（上述例子的证明见参考文献[24]）.

14. 奇偶函数的复合函数的奇偶性如何?

答:有下列结论成立.

命题 若$f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$为奇函数或偶函数,则$f(x)=f_n(f_{n-1}(\cdots f_1(x)))$为偶函数的充分必要条件是$f_i$中至少有一个为偶函数.

15. 函数$y=f(x)$与其反函数的图形关于$y=x$对称?

答:否. 只有$y=f(x)$的反函数写成$y=f^{-1}(x)$时,其图形与$y=f(x)$的图形关于$y=x$对称.

16. 是否存在处处有限而又处处无界的函数?

答:存在. 如

$$f(x)=\begin{cases}n, x=\dfrac{m}{n}, m,n\text{互质}, n>0\\ \quad 0, x\text{为无理数}\end{cases}$$

17. 设$y=\ln u$,$u=\sin x-1$则$y=\ln(\sin x-1)$是复合函数?

答:否. 因为$\{u,u=\sin x-1,x\in\mathbf{R}\}\cap\{u>0\}=\Phi$.

18. 分段函数均非初等函数吗?

答:否. 如

$$f(x)=\begin{cases}e^x, x<0\\ \cos x, x\geqslant 0\end{cases}$$

则由于$f(x)=e^{\frac{1}{2}(x-\sqrt{x^2})}+\cos\dfrac{1}{2}(x+\sqrt{x^2})-1$,依初等函数定义知为初等函数.

一般的,有以下定理.

定理 对于分段函数

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), x_1\leqslant x\leqslant x_2\\ f_2(x), x_2\leqslant x\leqslant x_3\\ \vdots\\ f_n(x), x_n\leqslant x\leqslant x_{n+1}\end{cases}$$

若$f(x)$在$[x_k,x_{k+1}](k=1,2,\cdots,n)$上为初等函数,则$f(x)$是$[x_1,x_{k+1}]$上的初等函数.

若 x_1、x_{n+1} 改为 $-\infty$ 和 $+\infty$ 相应的"$x_1 \leqslant x \leqslant x_2$"改为 $x \leqslant x_2$，"$x_n < x \leqslant x_{n+1}$"改为 $x_n \leqslant x$ 则上述结论仍成立（见参考文献[23]）.

证明 注意到 $f(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 上为初等函数，故由初等函数连续性知 $f(x_k+0)=f(x_k-0)=f(x_k)=f_{k-1}(x_k)$ $(k=2,3,\cdots,n)$，于是，只要令 $f_k(x_k)=f(x)$ $(k=2,3,\cdots,n)$，证明过程见参考文献[10].

（二）极限

19. 极限的等价定义有哪些？

答：下列说法等价.

(1) $\forall \varepsilon>0, \exists N>0$，当 $n>N$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon$.

(2) $\forall \varepsilon>0$，仅有有限个 n 满足 $|a_n-a|\geqslant\varepsilon$.

(3) $\forall k>0, \exists N_k>0$，当 $n>N_k$ 时 $|a_n-a|<\frac{1}{k}$.

(4) $\forall k>0$，仅有有限个 n 满足 $|a_n-a|\geqslant\frac{1}{k}$.

(5) $\forall \mu<a<\eta, \exists N>0$，当 $n>N$ 时 $\mu<a_n<\eta$.

(6) $\forall \mu<a<\eta$，仅有有限个 n 不满足 $\mu<a_n<\eta$.

(7*) $\forall$ 包含 a 的开集 $U, \exists N>0$，当 $n>N$ 时，$a_n\in U$.

(8*) $\forall$ 包含 a 的开集 U，至多有有限个 $n, a_n\notin U$.

我们只证明 (5)$\Leftrightarrow$(7*)，其他证明见参考文献[1].

(5)$\Rightarrow$(7*) 设 U 是 a 包含的开集，由开集的构造，必有开区间 $(\mu,\eta)\subset U$，且由(5)，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时 $a_n\in(\mu,\eta)\subset U$.

反之，显然.

(7*) 即一般拓扑空间中极限定义. 对于函数极限可参照上述等价定义类推.

20. 证明数列极限通常有哪些方法？

答：通常有下列几种方法.

(1) 用定义（或等价定义）. 在用定义证明极限时，可直接解不等式；也可以先放大，再解不等式. 在放大不等式时要掌握两条原则：放大后表达式要比放大前简单；放大后的表达时要仍能趋于零.

(2) 二边夹法则.

(3) 实数连续性公理.

(4) Cauchy 收敛准则.

(5) 证明数列 $\{a_n\}$ 的任一子序列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛（或证 $\{a_{2n}\}$ 和 $\{a_{2n+1}\}$ 收敛于同一极限）.

21. 下列用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+n}{1+n^2}=0$ 的过程是否正确？

$\forall \varepsilon>0$, $\frac{1+n}{1+n^2}<\varepsilon \Leftrightarrow n^2\varepsilon+\varepsilon-1-n>0$，只要

$$n<\frac{1-\sqrt{1+4\varepsilon-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon} \text{ 或 } n>\frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$$

当 $0<\varepsilon<1$ 时，第一种情形 $n<0$，不合题意，舍去. 故只要

$$n>\frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$$

于是,取

$$N=\left[\frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon-4\varepsilon^{2}}}{2\varepsilon}\right]$$

当 $n>N$ 时,即有 $\frac{1+n}{1+n^{2}}<\varepsilon$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+n}{1+n^{2}}=0$.

答:正确,当 $0<\varepsilon<1$ 时,上述证明中 N 有意义. 若 $\varepsilon>1$,则可取 $\varepsilon'<1$,令相应上述证明的 N,当 $n>N$ 时,$\frac{1+n}{1+n^{2}}<\varepsilon'$,于是,当 $n>N$ 时,$\frac{1+n}{1+n^{2}}<\varepsilon$ 仍成立.

此类题一般先放大不等式,再解不等式.

22. 下面 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$ 的证明是否正确?

$\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}<\varepsilon$,只要 $\frac{1}{\varepsilon}<2(2n+1)<6n$,所以,只要 $n>\frac{1}{6\varepsilon}$,取 $N=\left[\frac{1}{6\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,即有 $\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$.

答:不正确. 如 $\varepsilon=\frac{1}{11}$,$N=1$,$n=2>N$,但

$$\frac{1}{10}=\frac{1}{2(2\times2+1)}>\frac{1}{11}$$

错误在于:$6n>\frac{1}{\varepsilon}$ 不能保证 $2(2n+1)>\frac{1}{\varepsilon}$.

这里实际上采用了倒推证题方法. 一定注意,倒推证题时,每一步都要保证后者能够推出前者,否则将会出现错误.

23. 当 $n\to\infty$ 时,$x_n\cdot y_n$ 为无穷小,则在 $n\to\infty$ 时,x_n,y_n 至少有一个为无穷小?

答:否. 如 $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$,$y_n=\frac{1-(-1)^n}{2}$.

24. 两个非无穷小之和,必非无穷小?

答:否. 如 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,$y_n=\frac{1}{n}-\mathrm{e}$.

25. 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 均不存在,则 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))$ 与 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))$ 也不存在?

答: 否. 后者可考虑

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}, & x>0\\ -\mathrm{e}^{-x}, & x\leqslant 0\end{cases},$$

$$g(x)\pm\begin{cases}\cos x, & x\geqslant 0\\ -\cos x, & x<0\end{cases}$$

在 $a=0$ 的情况.

对前者可考虑 $f(x)=x+\cos\frac{1}{x}$,$g(x)=-\cos\frac{1}{x}$,$a=0$.

26. 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在,$\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 存在,而 $\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$,$\lim\limits_{x\to a}f(x).\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 不存在吗?

答:假设条件下 $\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 不存在;$\lim\limits_{x\to a}f(x).\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 可能存在:$f(x)=\sin\frac{1}{x}$,$g(x)=\tan x$,$a=0$;也可能不存在:$f(x)=\sin\frac{1}{x}$,$g(x)=\mathrm{e}^{x}$,$a=0$.

一般地，有下列结论成立.

定理1 设 $\lim_{x\to a}g(x)$ 存在，且不等于零，则 $\lim_{x\to a}f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim_{x\to a}f(x).\lim_{x\to a}g(x)$ 存在.

定理2 设 $\lim_{x\to a}g(x)=A$ 存在，且 $f(x)$ 在 a 的某空心邻域内有界，则 $\lim_{x\to a}Af(x)=B$ 存在的充分必要条件是 $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=B$ 存在.

证明见参考文献[24].

27. 若 $\lim_{x\to a}\varphi(x)=A$，$\lim_{u\to A}f(u)=B$，则 $\lim_{x\to a}f(\varphi(x))=B$?

答：否. 如

$$f(u)=\begin{cases}\dfrac{\sin u}{u},u\neq 0\\ 0,u=0\end{cases}$$

$$\varphi(x)=R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},x=\dfrac{p}{q},p、q\text{ 互素},q>0\\ 0, \qquad x\text{ 为无理数},0\text{ 或 }1\end{cases}$$

这里 $R(x)$ 称为黎曼函数. $a=0,A=0,B=1$.

一般地，有下列命题成立.

命题 若 $\lim_{x\to a}\varphi(x)=A$，$\lim_{u\to A}f(u)=B$，且满足下列条件之一：

① $f(u)$ 在 A 点连续；② $f(u)$ 在 a 的某空心邻域内不等于 A，则 $\lim_{x\to a}f(\varphi(x))=B$.

本命题是求极限时进行变量代换的理论依据.

28. 若 $\lim_{x\to 0}f(x)=A$，则当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{f(x)}{x}$ 为无穷大量?

答：否. 若 $A=0$ 时不一定.

29. 在计算极限时，当 $x\to a$ 时，$f(x),g(x)$ 为无穷小，$f(x)\sim g(x)$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 何时可以代换?

答：在计算乘积与商的极限时，可以用等价无穷小代换. 这是因为，当 $g(x)\neq 0$ 时，$\dfrac{f(x)}{\phi(x)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}\dfrac{g(x)}{\phi(a)}$（在积的情况同样考虑）.

在计算和的极限时，显然可以代换. 对于乘积与和的混合运算，一般不可代换.

例如，当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，但通过计算知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\frac{1}{2}\neq 0=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}$$

下面针对这一类极限的计算问题，给出一个充分条件，至于其他情况，读者可参照讨论.

定理 设 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$，$f(x)\sim g(x)$，$(x\to a)$，$f(x)\neq 0$，$g(x)\neq 0$，且 $g(x)=O(h(x))$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+\varphi(x)}{h(x)}=b\Leftrightarrow\lim_{x\to a}\frac{g(x)+\varphi(x)}{h(x)}=b$$

证明 由 $f(x)\sim g(x)$，$(x\to a)$，$g(x)\neq 0$，得

$$f(x)=g(x)+O(g(x))$$

于是 $\dfrac{f(x)+\varphi(x)}{h(x)}=\dfrac{f(x)-O(g(x))+\varphi(x)}{h(x)}=\dfrac{f(x)+\varphi(x)}{h(x)}-\dfrac{O(g(x))}{h(x)}$

$$=\frac{f(x)+\varphi(x)}{h(x)}-\frac{O(g(x))}{g(x)}\cdot\frac{g(x)}{h(x)}$$

由条件 $g(x)=O(h(x))$，从而$\frac{g(x)}{h(x)}$有界，从而

$$\lim_{x\to a}\frac{O(g(x))}{h(x)}=\lim_{x\to a}\frac{O(g(x))}{g(x)}\cdot\frac{g(x)}{h(x)}=0$$

从而易知必要性成立. 至于充分性，则可由 $g(x)=O(h(x))$，推得 $f(x)=O(h(x))$，同上可证.

其他情形详见参考文献[25].

30. 无穷大与无穷小的乘积可能有何结果?

答:可能有 4 种结果.

(1) 无穷大(如$\frac{1}{n}$,n^2).

(2) 收敛(如$\frac{1}{n}$,n).

(3) 有界但不收敛(如$\frac{1}{n}\sin n$,n).

(4) 无界但非无穷大(如$\frac{1}{n^{2+(-1)^n}}$,n^2).

其他不定型由于均可以化为无穷大、无穷小的乘积，因此，可参照本题得出相应结论.

31. 无穷多个无穷小的乘积，是否必为无穷小? 即设$\{x_n^{(k)}\}$，$k=1,2,\cdots$均为无穷小，$\prod\limits_{k=1}^{\infty}x_n^{(k)}$ 是否必为无穷小?

答:否. 例:

$\{x_n^{(k)}\}$:$1,1,\cdots,1,k^k,\frac{1}{k+1},\frac{1}{k+2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$，则显然，$\{x_n^{(k)}\}$，$k=1,2,\cdots$ 均为无穷小，但 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}x_n^{(k)}$:$1,2,\cdots,n,\cdots$ 不为无穷小.

32. 下列求极限的方法是否正确?

若 $x_1=\sqrt{a}\,(a>0)$，$x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$，$n=2,3,\cdots$，则由

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a+x_{n-1}}=\sqrt{a+\lim_{n\to\infty}x_{n-1}}$$

即得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n-1}=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$$

由于 $x_n>0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<0$ 不可能，于是

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

答:不对，这因上述极限过程实际上已假定$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在时，会导致错误. 如 $x_n=(-1)^n=-x_{n-1}$，两端取极限可得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，这显然不可能. 因$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在，做这一类题应先证明极限存在，然后再利用递推公式，对两端取极限，求得极限.

33. 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，则 $\forall x_n\to a$，$\lim\limits_{x\to a}f(x_n)=A$?

答：不一定．如$f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=A$，但$x_n=0\to 0,n\to\infty$，而$f(x_n)$无意义，从而$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$更不存在．

关于海涅定理，还有以下形式，证明见参考文献[4]．

定理 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在的充分必要条件是$\forall x_n\neq a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$存在．

34．对于$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$型极限如何计算？

答：(1)对数列情形，除通常的消去因子法外，还有类似于 L'Hospital 法则的 stotz 定理．

定理 设$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，且在某一项以后$y_n$严格单调增加，若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=A$（有穷或无穷），则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A$

例如，证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a$

令$y_n=n$，则y_n单调趋向于$+\infty$，$x_n=a_1+\cdots+a_n$，则由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}x_n=a,\text{故}\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a$$

(2) 对于函数极限，除消去分子、分母公因子外，可利用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$．如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$$

(3) 在参考文献[1]第5章有 L'Hospital 法则、Taylor 公式方法，第7章用定积分定义，第9章用收敛级数的一般项趋于零等方法也是求极限的有效方法．

35．下列计算是否正确？

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+n}=0+\cdots+0=0$$

答：不对．这是因为极限运算法则仅对有限项适用，而对无限项则不一定对．（事实上，此极限可用定积分计算得到结果为 ln2．）

36．对任意p，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+p}-x_n)=0$，是否有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在？

答：否．如$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，$\forall p$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(x_{n+p}-x_n)&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+n}=0+\cdots+0=0\end{aligned}$$

但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在（见参考文献[1]第9章）．

37．若数列$\{x_n\}$有子列$\{x_{n_i}\}$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_i}=a$，且$\forall k$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_i+k}=a$，是否有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$．

答：否．

例，设$\{x_n\}$如下定义：

$$x_n=2^{-k},n=2^k;$$

$$x_n=2^{-n},n=2^k+1,2^k+2,\cdots,2^{k+1}-2;$$

$$x_n = n, n = 2^{k+1} - 1.$$

则 $x_{2^n} \to 0$，且 $\forall k, \exists n_0, 2^{n_0+1} - 2^{n_0} > k$，则 $n > 2^{n_0}$ 时，$x_{2^n+k} = \dfrac{1}{2^n + k}$，且 $2^n + k \neq 2^m, \forall m \geqslant n$，故 $x_{2^n+k} \to 0$，但是，由于 $x_{2^n-1} = 2^n - 1 \to \infty$，从而，$\{x_n\}$不收敛.

（三）连续函数与实数连续性

38. $f(x) \cdot g(x)$的连续性如何？

答：(1) 设$f(x), g(x)$在 x_0 连续，则$f(x) \cdot g(x)$在 x_0 连续.

(2) $f(x)$在 x_0 连续，$g(x)$在 x_0 不连续，则$f(x) \cdot g(x)$在 x_0 可能连续. 如

$$f(x) = x^2, \; g(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$f(x) \cdot g(x)$在 $x_0 = 0$ 可能不连续，如$f(x) = \cos x, g(x) = \operatorname{sgn} x, x_0 = 0$.

(3) $f(x), g(x)$在 x_0 均不连续，则$f(x) \cdot g(x)$在 x_0 可能连续，如

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases},$$

$f(x) \cdot g(x)$在 $x_0 = 0$ 可能不连续，如$f(x) = g(x) = \begin{cases} 2, & x \geqslant 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$，在 $x_0 = 0$ 点.

39. $f(x) + g(x)$的连续性如何？

答：(1) 设$f(x), g(x)$在 x_0 连续，则$f(x) + g(x)$在 x_0 连续.

(2) $f(x)$在 x_0 连续，$g(x)$在 x_0 不连续，则$f(x) + g(x)$在 x_0 不连续.

用反证法，若$f(x) + g(x)$在 x_0 连续，由(1)，$g(x) = (f(x) + g(x)) - f(x)$在 x_0 连续，矛盾.

(3) $f(x), g(x)$在 x_0 不连续，$f(x) + g(x)$在 x_0 可能连续，如$f(x) = -g(x)$为任一在 x_0 不连续的函数. $f(x) + g(x)$在 x_0 可能不连续，如$f(x) = g(x) = \operatorname{sgn} x$.

40. 复合函数的连续性如何？

答：(1) $y = f(u)$在 u_0 连续，$u = \varphi(x)$在 x_0 连续. 且 $u_0 = \varphi(x_0)$，则 $y = f(\varphi(x))$在 x_0 连续.

(2) $y = f(u)$在 u_0 连续，$u = \varphi(x)$在 x_0 不连续. 且 $u_0 = \varphi(x_0)$，则 $y = f(\varphi(x))$在 x_0 可能连续. 如 $y = f(u) = \sin^2 u - \sin^2 1, \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$，则 $y = f(\varphi(x)) = \sin^2\varphi(x) - \sin^2 1 \equiv 0 \in C(\mathbf{R})$. 这里 $C(\mathbf{R})$表示 $\mathbf{R}$ 上连续函数全体. $x_0 = 0, u_0 = 1$.

$y = f(\varphi(x))$可能不连续. 如$f(x) = \sin u, u = \varphi(x) = \operatorname{sgn} x, x_0 = 0, u_0 = 0$.

(3) $y = f(u)$在 u_0 不连续，$u = \varphi(x)$在 x_0 连续且 $u_0 = \varphi(x_0)$，$y = f(\varphi(x))$在 x_0 可能连续. 如 $y = f(u) = D(u)$（Dirlchlet 函数），$u = \varphi(x) = R(x)$（Rlemann 函数）.

$y = f(\varphi(x))$在 x_0 可能不连续. 如 $y = f(u) = D(u), u = \varphi(x) = x, x_0 \in \mathbf{R}$.

(4) $y = f(u)$在 u_0 不连续，$u = \varphi(x)$在 x_0 不连续，但 $y = f(\varphi(x))$在 x_0 可能连续. 如 $y = f(u) = D(u), u = \varphi(x) = \operatorname{sgn} x, x_0 = 0$.

$y = f(\varphi(x))$在 x_0 可能不连续，如 $y = f(u) = \operatorname{sgn} u, u = \varphi(x) = \dfrac{1}{x}, x_0 = 0$.

41. 若 $y = f(x)$在$[a, b]$上连续，且存在反函数 $x = \varphi(y)$，则 $x = \varphi(y)$连续？

答：是. 可由下述命题得知.

命题 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$f(x)$存在反函数的充分必要条件是$f(x)$严格单调.

一般的,有下列定理成立.

定理 设f是$X\to Y$的连续映射,若X为紧的,Y为T_2的,且$f(x)$存在反函数,则$f(x)$为同胚映射(即$f(x)$为一一映射,且与反函数皆连续).

上述命题见参考文献[9],定理见参考文献[15].

42. 分段函数必存在间断点?

答:否. 如

$$y=f(x)=\begin{cases}e^x, & x\geqslant 0\\ \cos x, & x<0\end{cases}$$

43. 若$f(x)$在(a,b)的任意内闭区间上连续,则$f(x)$在(a,b)内连续?

答:是. 这由连续函数的局部性质即知.

44. 是否存在定义在$[a,b]$上的有无限个间断点的严格增加函数?

答:存在. 如

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x, & x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right)\\[2mm] \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2^2}, & x\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2^2}\right)\\[2mm] \dfrac{x}{2}+\sum\limits_{i=2}^{n+1}\dfrac{1}{2^i}, & x\in\left[\dfrac{2^n-1}{2^n},\dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right),n=1,2,\cdots\\[2mm] 1, & x=1\end{cases}$$

45. 是否存在在所有有理点间断的严格增加函数?

答:存在. 如,设$r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$,为$\mathbf{R}$上全部有理点,则$f(x)=\sum\limits_{r_k<x}\dfrac{1}{2^k}$在任意有理点间断,在任意无理点连续,且严格增加(证明见参考文献[11],第226页).

Riemann 函数$R(x)$也在有理点不连续,但不单调.

46. 是否存在在任意有理点连续,在无理点间断的函数?

答:不存在.(见参考文献[11]).

47. $f(x)$在x_0连续还有哪些等价说法?

答:以下条件与$f(x)$在x_0连续等价.

(1) 当$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$时,$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$,这里$\{x_n\}$为任意数列.

(2) 对于$\mathbf{R}$上任一个包含$f(x_0)$的开集G,其原象$f^{-1}(G)$为开集.

(3) 对于$\mathbf{R}$上每一个包含$f(x_0)$的闭集F,其原象$f^{-1}(F)$为闭集.

(4) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$|x'-x_0|<\delta,|x''-x_0|<\delta$时,$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

证明见参考文献[10].

48. 若$f(x)$定义在$[a,b]$上,且$\forall x_1,x_2\in[a,b]$ $(x_1<x_2)$及$\forall C,f(x_1)\leqslant C\leqslant f(x_2)$,都存在$\xi\in[x_1,x_2]$,使$f(\xi)=C$,则称$f(x)$在$[a,b]$上满足 Darboux 性质,若$f(x)$在$[a,b]$上满足 Darboux 性质,则$f(x)$在$[a,b]$上连续?

答:不一定. 如

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

若$f(x)$在$[a,b]$上具有 Darboux 性质，且满足$\forall y_0\in f([a,b])$，集$\mathbf{E}=\{x|f(x)=y_0\}$为闭集，则$f(x)$在$[a,b]$上连续. 证明见参考文献[11].

19 世纪早期一些数学家曾认为，具有 Darboux 性质的函数是连续的，即 Darboux 性质与连续等价，由于 Darboux 的工作才澄清了这一混淆. 于是，有时也称满足 Darboux 性质的函数为 Darboux 函数.

49. 无界区间的连续函数是否有界？

答：否. 如$y=x,x\in\mathbf{R}$.

50. 若集$A\in\mathbf{R}$是一个有界集，且$f(x)$为定义在A上的连续函数，则$f(x)$有界？

答：否. 如$y=\dfrac{1}{x},x\in(0,1)$.

51. 无界区间$[a,+\infty)$上的连续函数是否一致连续？若否，增加什么条件可保证其一致连续？

答：不一定. 如$f(x)=\sin x^2$在$[a,+\infty)$上连续且有界，但不一致连续.

定理 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，增加下列条件之一，即可保证$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在.

(2) $f(x)$在$[a,+\infty)$上满足 Lipschitz 条件(连续条件可去掉).

(3) $f(x)$在$[a,+\infty)$上上凸，单调增加.

(4) $y=f(x)$有渐近线.

证明 满足(1)、(2)条件的情形见参考文献[1].

(3) 的证法，注意到在连续条件下，凸函数定义可改为$f(x)$在区间I上凸，如果$\forall t\in[0,1)f(tx_1+(1-t)x_2)>tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$.

再利用$f(x)$上凸、单调，易知$\forall x_1<x_2<x_3$，有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}>\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$$

于是

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$$

进而可推得 $\forall x_1<x_2<x_3<x_4$，有

$$\frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4}>\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

再利用单调性可得

$$|f(x_3)-f(x_4)|\leqslant\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right||x_3-x_4|$$

若取定x_1,x_2且$x_2>x_1$，则知$\forall x_3,x_4>x_2$，有

$$|f(x_3)-f(x_4)|\leqslant\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right||x_3-x_4|=L|x_3-x_4|$$

再利用(2)即知$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

(4) 的证法，因$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，于是$y=f(x)$仅有一条斜渐近线，设$y=ax+b$为其渐近线，其中$a,b\in\mathbf{R}$. 由定义$F(x)=f(x)-ax-b$，在$[a,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，利用(1)知$F(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续，而$y=ax+b$在$\mathbf{R}$上一致连续，于是$f(x)=F(x)+ax+b$在$[a,+\infty)$上一致连续.

52. 如果某区间上函数的曲线有一处最陡，则函数在该区间一致连续吗？反之，若某区间上函

数的曲线没有一处最陡,则函数在该区间不一致连续吗?

答:第一问是肯定的,此时,在最陡的地方的 δ 可以作为一致连续定义中公共的 δ.

第二问是不对的,例如:

$$f(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)=\cos\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

当 $x_n=\dfrac{1}{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$ 时,$x_n\to 0$,$f'(x_n)=-(n\pi+\dfrac{\pi}{2})\to-\infty$,$x=0$ 时 $f'(0)$ 不存在,故 $f(x)$ 在 0 的附近无一处最陡.

但由 Cantor 定理,明显 $f(x)$ 在任何包含 0 的有限区间上一致连续.

53. 一致连续的函数的运算性质如何?

答 设 $f(x)$,$\varphi(x)$ 在区间 I 上一致连续,则有如下结论.

(1) $\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,$\alpha f(x)+\beta\varphi(x)$ 在 I 上一致连续.

(2) $f(x)g(x)$ 在 I 上不一定一致连续,如 $f(x)=x$,$\varphi(x)=\sin x$ 均在 $\mathbf{R}$ 上一致连续,但 $f(x)\varphi(x)=x\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上不一致连续;另一方面,$f(x)g(x)$ 在 I 上仍一致连续的例子是容易找到的. 事实上,有以下定理.

定理 设 $f(x)$,$\varphi(x)$ 均在 I 上一致连续且有界,则 $f(x)\varphi(x)$ 在 I 上一致连续且有界.(若 I 为有限区间,则有界性条件可去掉.)

(3) 若 $f(x)$ 在 I 上有界,$|\varphi(x)|\geqslant\alpha(\alpha>0)$,则 $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ 在 I 上一致连续. 条件改为在有限区间时,只要 $|\varphi(x)|\geqslant\alpha$ 即可. 并且此处 $|\varphi(x)|\geqslant\alpha$ 不可去掉. 如 $f(x)\equiv 1$,$\varphi(x)=x$ 均在 $(0,1)$ 内,但 $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内不一致连续.

(4) 一致连续的函数的反函数未必一致连续. 如 $y=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续,但其反函数 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续.

对有限区间 I,若 $y=f(x)$ 在 I 上一致连续,且存在反函数,则其反函数仍一致连续. 事实上,因为 $f(x)$ 在 I 上一致连续,不妨假定 I 为开区间 (a,b),定义函数:

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(a,b)\\ f(a+0), & x=a\\ f(b-0), & x=b\end{cases}$$

则 $F(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数,且由条件,$F(x)$ 存在反函数,于是,反函数严格单调(见 38 题),不妨设 $F^{-1}(x)$ 严格单调增加,于是其定义域为 $[f(a+0),f(b-0)]$,从而,$F^{-1}(x)$ 在 $[f(a+0),f(b-0)]$ 一致连续,更在 $(f(a+0),f(b-0))$ 内 $F^{-1}(x)=f^{-1}(x)$,得证.

(5) $f(u)$ 在 U 上一致连续,$\varphi(x)$ 在 I 上一致连续,且 $\{\varphi(x)\mid x\in I\}\subset U$,则复合函数 $f(\varphi(x))$ 在 I 上一致连续.

54. 一个有界凸函数处处连续,且处处存在左、右导数.

证明见题 117.(本问题以参考文献[1]中的定义为依据.)

55. 若数集 A 有上界,则上界是否唯一,是否有最小上界?

答:上界不唯一,但所有上界必有最小的(即上确界存在原理).