21 世纪高等院校经典教材同步辅导

ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

数学分析

第四版

全程导学及习题全解（上册）

主 编 闫晓红

中国时代经济出版社

21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

数学分析

第四版

全程导学及习题全解（上册）

主　编　闫晓红

中国时代经

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(第4版)全程导学及习题全解. 上册 / 闫晓红主编. —北京：中国时代经济出版社，2012.1
21世纪高等院校经典教材同步辅导
ISBN 978-7-5119-0995-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①闫… Ⅲ.①数学分析—高等学校—题解 Ⅳ.①O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第238434号

书　　名：数学分析(第4版)全程导学及习题全解. 上册
作　　者：闫晓红
出版发行：中国时代经济出版社
社　　址：北京市丰台区玉林里25号楼
邮政编码：100069
发行热线：(010)68320825　83910219
传　　真：(010)68320634　68320584
网　　址：www.cmepub.com.cn
电子邮箱：zgsdjj@hotmail.com
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京市优美印刷有限责任公司
开　　本：787×1092　1/16
字　　数：350千字
印　　张：19.25
版　　次：2012年1月第1版
印　　次：2012年1月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5119-0995-4
定　　价：28.50元

前 言

本书是华东师范大学数学系编写的《数学分析》(第四版)的配套参考用书。数学分析是数学系最重要的一门基础课,大学本科乃至研究生阶段的许多后续课程本质上都可以看作是数学分析的延伸、深化或应用。数学分析的基本概念、思想和方法更是渗透到整个数学体系中。数学专业的后续专业课程如微分方程、概率论、泛函分析、微分几何等都要以数学分析为基础,正因为如此,几乎所有的数学类专业研究生入学考试都将数学分析作为专业考试课之一。但数学分析的逻辑性、技巧性都很强,学习者往往是听懂了课堂内容,但对课后习题感到无从下手。针对上述困难,我们编写了本套辅导用书,以帮助学生尽快掌握数学分析的思想方法。全书作如下编排:

一、知识要点及思想方法。本部分依据小节编排,简要概括了各节要点,并对重点、难点以及基本概念、定理理解中容易出现偏差的内容进行细致说明。使学生在学习过程中做到目标明确,有的放矢。

二、课后习题详解。本部分全面、规范的对教材中的课后习题做了解答,其中包括详细的解题步骤以及解题思路的阐述,以利于学生深入理解和掌握所学知识点,做到触类旁通,举一反三。

三、练习与提高。本部分按照内容单元编排,选取了部分高校历年硕士研究生入学考试真题,并给出参考答案,可以供学有余力和准备进一步深造的同学参考使用。

本书不仅适合高等院校数学类相关专业的教师和学生阅读参考,也适合准备参加研究生入学考试的学生、自考生作为参考读物。任何参考书都只是启发思维的工具,只有经过独立思考再对照相应的参考教材,才能有所收获。希望读者善用本书,达到提高数学素养和学好数学分析的双重目的。

本书由闫晓红(天津城市建设学院)编写,在编写过程中参阅了大量的文献资料,在此对原作者一并表示感谢。由于编者水平有限,加之时间仓促,错误和不当之处在所难免,敬请读者批评指正。

编 者
2011 年 11 月

目　　录

一元函数极限

第一章　实数集与函数

§1　实　数

知识要点及思想方法

一、实数及其性质

1. 实数用无限小数表示的方法

为了把有限小数(包括整数)表示为无限小数,规定:对于正有限小数(包括正整数)x,$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n$时,其中$0\leqslant a_i\leqslant 9$,$i=1,2,\cdots,n$,$a_n\neq 0$,$a_0$为非负整数,记$x=a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)9999\cdots$;而当$x=a_0$为正整数时,则记$x=(a_0-1).9999\cdots$;对于负有限小数(包括负整数)$y$,则先将$-y$表示为无限小数,再在所得无限小数之前加负号;又规定数0表示为$0.000\cdots$.

2. 实数的大小

(1) 实数大小

给定两个非负实数$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,$y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$,其中$a_k$,$b_k$为非负整数,$0\leqslant a_k,b_k\leqslant 9$.若有(ⅰ)$a_k=b_k$,$k=0,1,2,\cdots$则称$x$与$y$相等,记为$x=y$;(ⅱ)若存在非负整数$l$,使得$a_k=b_k$,$(k=0,1,2,\cdots,l)$,而$a_{l+1}>b_{l+1}$,则称$x$大于$y$(或$y$小于$x$),分别记为$x>y$(或$y<x$).

对于负实数x,y,有$-x>-y$,则称$x<y$或$y>x$;规定任何非负实数大于任何负实数;

(2) 不足近似与过剩近似

设$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$为非负实数,称有理数$x_n=a_0.a_1a_2\cdots a_n$为实数$x$的$n$位不足近似值,而有理数$\overline{x}_n=x_n+\dfrac{1}{10^n}$称为$x$的$n$位过剩近似值.

3. 实数的性质

(1) 四则运算封闭性.

(2) 有序性:任何两个实数 a,b,必满足下述三个关系之一:

$a<b,a=b,a>b$.

(3) 实数大小有传递性,即 $a>b,b>c$ 则有 $a>c$.

(4) 阿基米德性:对于任意 $a,b\in\mathbf{R},b>a>0$,存在 $n\in\mathbf{N}$,使得 $na>b$.

(5) 稠密性:有理数和无理数的稠密性.

(6) 实数集的几何表示:数轴.

二、绝对值与不等式

1. 绝对值

(1) 定义:$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0\end{cases}$ 为 a 的绝对值.

从数轴上看的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.

(2) 绝对值的性质

(i) $|a|=|-a|\geqslant 0$;当且仅当 $a=0$ 时 $|a|=0$.

(ii) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

(iii) $|a|<h\Leftrightarrow -h<a<h$;$|a|\leqslant h\Leftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h,h>0$.

(iv) $|a|-|b|\leqslant |a\pm b|\leqslant |a|+|b|$.

(v) $|ab|=|a||b|$.

(vi) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|},b\neq 0$.

2. 几个重要的不等式

(1) 绝对值不等式:定义 $|a|=\max\{-a,a\}$.

(2) 其它不等式

(i) $a^2+b^2\geqslant 2|ab|$,　$|\sin x|\leqslant 1$,$|\sin x|\leqslant |x|$.

(ii) 均值不等式:对任意 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$,记

$$M(a_i)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i,\text{(算术平均值)}$$

$$G(a_i)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}},\text{(几何平均值)}$$

$$H(a_i)=\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}=\frac{1}{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}}=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}}.\text{(调和平均值)}$$

平均值不等式:

$H(a_i)\leqslant G(a_i)\leqslant M(a_i)$,等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

(3) 伯努利不等式:任意 $x>-1$,有不等式 $(1+x)^n\geqslant 1+nx,n\in\mathbf{N}$.
当 $x>-1$ 且 $x\neq 0,n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2$ 时,有严格不等式 $(1+x)^n>1+nx$.

课后习题详解

1. 设 a 为有理数,x 为无理数.证明:

(1) $a+x$ 是无理数;(2) 当 $a\neq 0$ 时,ax 是无理数.

证明　这种题目通常用反证法.

(1) 假设 $a+x$ 是有理数,则 $(a+x)-a=x$ 是有理数,这与题设 x 为无理数相矛盾.故 $a+x$ 是无理数.

(2) 假设 ax 是有理数,又 $a\neq 0$,则 $\frac{ax}{a}=x$ 为有理数,这与题设 x 是无理数相矛盾.故 ax 是无理数.

2. 试在数轴上表示出下列不等式的解:

(1) $x(x^2-1)>0$;　　(2) $|x-1|<|x-3|$;

(3) $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant\sqrt{3x-2}$.

解　(1) 由原不等式有

$$\begin{cases}x>0\\x^2-1>0\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}x<0\\x^2-1<0\end{cases}$$

前一个不等式组的解是 $x>1$,后一个不等式组的解为 $-1<x<0$,故 $x(x^2-1)>0$ 的解为 $\{x\mid -1<x<0$ 或 $x>1\}$,其在数轴上表示如图 1—1.

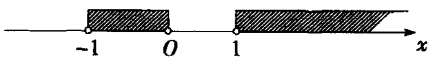

图 1—1

(2) 当 $x\neq 3$ 时,由原不等式有 $\left|\frac{x-1}{x-3}\right|<1$,从而有 $\left|1+\frac{2}{x-3}\right|<1$,所以 $-1<1+\frac{2}{x-3}<1$,解此不等式,得 $x<2$,故 $|x-1|<|x-3|$ 的解为 $\{x\mid x<2$ 且 $x\neq 3\}=\{x\mid x<2\}$,其在数轴上表示如图 1—2.

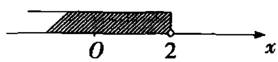

图 1—2

(3) 由题设知

$$\begin{cases}x-1\geqslant 0\\2x-1\geqslant 0\\3x-2\geqslant 0\end{cases}\quad\text{解之得}:x\geqslant 1.$$

又 $\sqrt{3x-2}\geqslant 0,\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant 0$,

从而不等式两端平方,有 $x-1+2x-1-2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\geqslant 3x-2$,因而有 $2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\leqslant 0$,所以 $\sqrt{(x-1)(2x-1)}=0$,由此解得 $x=1$ 或 $x=\frac{1}{2}$,又 $x\geqslant 1$,故有 $x=1$,但 $x=1$ 不符合原不等式,所以原不等式无解.

3. 设 $a、b\in\mathbf{R}$,证明:若对任何正数 ε 有 $|a-b|<\varepsilon$,则 $a=b$.

证明　假设 $a\neq b$,则根据实数集的有序性,有 $a>b$ 或 $a<b$,从而必有 $|a-b|>0$,令 $\varepsilon=|a-b|>0$,则 ε 为正数且满足 $|a-b|=\varepsilon$,这与假设 $|a-b|<\varepsilon$ 矛盾,从而必有 $a=b$ 成立.即原命题成立.

4. 设 $x\neq 0$,证明 $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2$,并说明其中等号何时成立.

证明　由于 $\left(\sqrt{|x|}-\sqrt{\frac{1}{|x|}}\right)^2=|x|+\frac{1}{|x|}-2\sqrt{|x|\cdot\frac{1}{|x|}}\geqslant 0$,

所以 $|x|+\frac{1}{|x|}\geqslant 2$. 因 x 与 $\frac{1}{x}$ 同号，从而 $\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\frac{1}{|x|}\geqslant 2$.

等号成立当且仅当 $\left(\sqrt{|x|}-\sqrt{\frac{1}{|x|}}\right)^2=0$ 成立，即 $|x|=\frac{1}{|x|}$，进而 $x=\pm 1$ 时成立.

5. 证明：对任何 $x\in\mathbf{R}$ 有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$;　　(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$.

证明　此题目运用绝对值的三角形不等式性质.

(1) 因为 $1-|x-1|\leqslant|1-(x-1)|=|1-x+1|=|x-2|$，
所以 $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$.

(2) 因为 $2-|x-3|\leqslant|2+(x+3)|=|x-1|\leqslant|x-1|+|x-2|$，
所以 $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$.

6. 设 $a、b、c\in\mathbf{R}^+$ ($\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数的集合)，证明

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|.$$

你能说明此不等式的几何意义吗?

证明　对任意的 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，由 $a^2(b-c)^2\geqslant 0$，有

$2a^2bc\leqslant a^2(b^2+c^2)$，两端同时加 $a^4+b^2c^2$，有

$a^4+b^2c^2+2a^2bc\leqslant a^2b^2+a^2c^2+a^4+b^2c^2$，

即　$(a^2+bc)^2\leqslant(a^2+b^2)(a^2+c^2)$，

所以　$a^2+bc\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$，

又　$2a^2-2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\leqslant -2bc$，

两端再同加 b^2+c^2，则

$$(a^2+b^2)-2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}+(a^2+c^2)\leqslant a^2-2bc+c^2$$

即 $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|$.

不等式 $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|$ 的几何意义为：

当 $b\neq c$ 时，表示以 (a,b)，(a,c)，$(0,0)$ 三点为顶点的三角形，其两边之差小于第三边.

当 $b=c$ 时，此时不等式为等式 $\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+c^2}=0$，三角形变为以 (a,c)，$(0,0)$ 为端点的线段.

7. 设 $x>0,b>0,a\neq b$. 证明 $\frac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间.

证明　因为 $1-\frac{a+x}{b+x}=\frac{b-a}{b+x}$，$\frac{a+x}{b+x}-\frac{a}{b}=\frac{x(b-a)}{b(b+x)}$，

且 $x>0,b>0,a\neq b$，所以

当 $a>b$ 时，有 $1-\frac{a+x}{b+x}<0$，$\frac{a+x}{b+x}-\frac{a}{b}<0$，

从而　$1<\frac{a+x}{b+x}<\frac{a}{b}$，

当 $a<b$ 时，$1-\frac{a+x}{b+x}>0$，$\frac{a+x}{b+x}-\frac{a}{b}>0$，

从而　$\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}<1$，

所以$\frac{a+x}{b+x}$总介于1与$\frac{a}{b}$之间.

8. 设p为正整数.证明:若p不是完全平方数,则$\sqrt{p}$是无理数.

证明　反证法　假设$\sqrt{p}$为有理数,则存在正整数m,n,且m,n互质,使得$\sqrt{p}=\frac{m}{n}$,于是$p=\frac{m^2}{n^2}$,$m^2=pn^2=n\cdot(pn)$,可见n能整除m^2,由于m,n互质,从而它们的最大公约数为1,这与m,n互质矛盾,所以$\sqrt{p}$是无理数.

9. 设a、b为给定实数.试用不等式符号(不用绝对值符号)表示下列不等式的解:

(1) $|x-a|<|x-b|$;

(2) $|x-a|<x-b$;

(3) $|x^2-a|<b$.

解　(1) 原不等式可化为$\left|\frac{x-a}{x-b}\right|=\left|\frac{b-a}{x-b}+1\right|<1$,因此有

$-1<\frac{b-a}{x-b}+1<1$,即$0<\frac{a-b}{x-b}<2$,由此可得不等式组

$$\begin{cases}x>b\\0<a-b<2x-2b,\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}x<b,\\2x-2b<a-b<0,\end{cases}$$

即$\begin{cases}x>b\\x>\frac{a+b}{2},\\a>b\end{cases}$　　或$\begin{cases}x<b,\\x<\frac{a+b}{2},\\a<b\end{cases}$

故当$a>b$时,不等式的解为$x>\frac{a+b}{2}$;当$a<b$时,不等式解为$x<\frac{a+b}{2}$;当$a=b$时,不等式的解集为$\varnothing$.

(2) 原不等式可化为$\begin{cases}x>b\\b-x<x-a<x-b,\end{cases}$　　即$\begin{cases}x>b\\a>b\\x>\frac{a+b}{2},\end{cases}$

故当$a>b$时,不等式的解为$x>\frac{a+b}{2}$;当$a\leqslant b$时,不等式的解集为$\varnothing$.

(3) 当$b\leqslant 0$时,原不等式的解集为$\varnothing$.

当$b>0$时,原不等式等价于:$a-b<x^2<a+b$,因此有

当$a+b\leqslant 0$时,不等式的解集为$\varnothing$;

当$a+b>0$时,

(i) 如果$a>b$,则解为$\sqrt{a-b}<|x|<\sqrt{a+b}$,即$\sqrt{a-b}<x<\sqrt{a+b}$或$-\sqrt{a+b}<x<-\sqrt{a-b}$;

(ii) 如果$a<b$,则解为$|x|<\sqrt{a+b}$,即$-\sqrt{a+b}<x<\sqrt{a+b}$.

§2 数集·确界原理

知识要点及思想方法

一、区间与邻域

1. 区间

(ⅰ) $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间,记作 (a,b);

(ⅱ) $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间,记作 $[a,b]$;

(ⅲ) $\{x \mid a < x \leqslant b\}$ 和 $\{x \mid a \leqslant x < b\}$ 称为半开半闭区间,记作 $(a,b]$ 和 $[a,b)$.

2. 邻域

(ⅰ) 设 a 和 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,称点集 $U_\delta(a) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域,记作 $U_\delta(a)$.

(ⅱ) 设 a 和 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,称点集 $U_\delta(a) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域,记作 $U_\delta^\circ(a)$.

二、有界数集、确界原理

1. 有界数集

设 S 为 $\mathbf{R}$ 中的一个数集.若存在数 $M(L)$,使得对一切 $x \in S$,都有 $x \leqslant M(x \geqslant L)$,则称 S 为有上界(下界)的数集,数 $M(L)$ 称为 S 的一个上界(下界)若 S 既有上界又有下界,则称 S 为有界集.

2. 确界

(1) 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集,若数 η 满足以下两条:

(ⅰ) 对一切 $x \in S$ 有 $x \leqslant \eta$,即 η 是数集 S 的上界;

(ⅱ) 对任何 $\alpha < \eta$ 存在 $x_0 \in S$ 使得 $x_0 > \alpha$(即 η 是 S 的最小上界)则称数 η 为数集 S 的上确界.记作 $\eta = \sup S$.

(2) 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中的一个数集,若数 ξ 满足以下两条:

(ⅰ) 对一切 $x \in S$ 有 $x \geqslant \xi$,即 ξ 是数集 S 的下界;

(ⅱ) 对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $x_0 \in S$ 使得 $x_0 < \xi + \varepsilon$(即 ξ 是 S 的最大下界),则称数 ξ 为数集 S 的下确界.记作 $\xi = \inf S$.

(3) 确界原理

设 S 为非空数集,若 S 有上界,则 S 必有上确界;若 S 有下界,则 S 必有下确界.

注意 (1) 确界不一定属于原集合.

(2) E 的最值必属于 E,但确界未必,确界是一种临界点.

(3) 非空有界数集必有确界,但未必有最值.

(4) 若 $\max E$ 存在,必有 $\max E = \sup E$.

课后习题详解

1. 用区间表示下列不等式的解：

(1) $|1-x|-x \geqslant 0$；

(2) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 6$；

(3) $(x-a)(x-b)(x-c)>0$　(a,b,c 为常数，且 $a<b<c$)；

(4) $\sin x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

解　(1) 当 $1-x\geqslant 0$ 时，不等式化为 $1-x-x\geqslant 0$，其解为 $x\leqslant \dfrac{1}{2}$；

当 $1-x<0$ 时，不等式化为 $x-1-x\geqslant 0$，无解.

综合，原不等式的解为　$x\leqslant \dfrac{1}{2}$，用区间表示为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$.

(2) 绝对值不等式 $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 6$ 等价于 $-6\leqslant x+\dfrac{1}{x}\leqslant 6$，而这又等价于不等式组：

$$\begin{cases} x>0 \\ -6x\leqslant x^2+1\leqslant 6x \end{cases} \quad 或 \begin{cases} x<0 \\ -6x\geqslant x^2+1\geqslant 6x \end{cases}$$

前者不等式的解集为 $[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$，后者的解集为 $[-3-2\sqrt{2},-3+2\sqrt{2}]$，从而原不等式的解集为 $[-3-2\sqrt{2},-3+2\sqrt{2}]\cup[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$.

(3) **法一**　运用不等式的等价形式来计算.

原不等式等价于不等式组：

$$\begin{cases} x-a>0 \\ x-b>0 \\ x-c>0 \end{cases} 或 \begin{cases} x-a>0 \\ x-b<0 \\ x-c<0 \end{cases} 或 \begin{cases} x-a<0 \\ x-b>0 \\ x-c<0 \end{cases} 或 \begin{cases} x-a<0 \\ x-b<0 \\ x-c>0 \end{cases}$$

第一个不等式组的解集为 $(c,+\infty)$，第二个不等式组的解集为 (a,b)，

第三、四个不等式组的解集均为空集，所以原不等式的解集为 $(a,b)\cup(c,+\infty)$.

法二　构造函数 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$，$x\in\mathbf{R}$，则由 $a<b<c$，知

$$f(x)\begin{cases} <0，当 x\in(-\infty,a)\cup(b,c) \\ =0，当 x=a,b,c \\ >0，当 x\in(a,b)\cup(c,+\infty) \end{cases}$$

因此 $f(x)>0$，当且仅当 $x\in(a,b)\cup(c,+\infty)$.

故原不等式的解集为 $(a,b)\cup(c,+\infty)$.

(4) 若 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$，则当且仅当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3}{4}\pi\right]$ 时，$\sin x\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，再由正弦函数的周期性知：$\sin x\geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的解集是

$$\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3}{4}\pi\right],k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

2. 设 S 为非空数集,试对下列概念给出定义:

(1)S 无上界;　　(2)S 无界.

解　(1)S 无上界可定义为:设 S 为非空数集,若对任意的 $M>0$,总存在 $x_0\in S$,使得 $x_0>M$,则称数集 S 无上界.

(2)S 无界可定义为:设 S 为非空数集,若对任意正数 $M\in\mathbf{R}$,总存在 $x_0\in S$,使 $|x_0|>M$,则称数集 S 无界.

3. 试证明由(3)式所确定的数集 S 有上界而无下界.

证明　运用有上界、无下界的定义来证明.

(1)　由(3)式所确定的数集 $S=\{y\mid y=2-x^2,x\in\mathbf{R}\}$,对任何 $x\in\mathbf{R}$, $y=2-x^2\leqslant 2$,任何一个大于 2 的实数都是 S 的上界,故 S 有上界.

(2) 对任意 $M>0$,取 $x_0=\sqrt{3+M}\in\mathbf{R}$,存在 $y_0=2-x_0^2=2-3-M=-1-M\in S$,而 $y_0<-M$,因此数集 S 无下界.

4. 求下列数集的上、下确界、并依定义加以验证:

(1) $S=\{x\mid x^2<2\}$;

(2) $S=\{x\mid x=n!,n\in\mathbf{N}_+\}$;

(3) $S=\{x\mid x$ 为$(0,1)$ 内的无理数$\}$;

(4) $S=\left\{x\mid x=1-\frac{1}{2^n},n\in\mathbf{N}_+\right\}$

解　先根据上、下确界的定义推出的性质 $\eta=\sup S\in S\Leftrightarrow\eta=\max S(\eta=\inf S\in S\Leftrightarrow\eta=\min S)$ 猜测出 S 的上、下确界,再根据上、下确界的定义来验证.

(1)$\mathrm{Sup}S=\sqrt{2},\inf S=-\sqrt{2}$,下面依定义加以验证.

因 $x^2<2$ 等价于 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$,所以对任意的 $x\in S$,有 $x<\sqrt{2}$ 且 $x>\sqrt{2}$,即$\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ 分别是 S 的上、下界,又对任意的 $\varepsilon>0$,不妨设 $\varepsilon<2\sqrt{2}$,于是存在 $x_0=\sqrt{2}-\frac{\varepsilon}{2}$, $x_1=-\sqrt{2}+\frac{\varepsilon}{2}$,使 x_0, $x_1\in S$,使 $x_0>\sqrt{2}-\varepsilon$, $x_1<-\sqrt{2}+\varepsilon$,所以由上、下确界的定义知 $\sup S=\sqrt{2},\inf S=-\sqrt{2}$.

(2)$\sup S=+\infty,\inf S=1$,下面依定义验证.

对任意的 $x\in S$, $1\leqslant x<+\infty$,所以 1 是 S 的下界. 因对任意的 $M>0$,取 $n=[M]+1\in\mathbf{N}_+$,而 $x=n!\geqslant n>M$,故 S 无上界,所以 $\sup S=+\infty$;对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $x_0=1!=1\in S$,使 $x_0<1+\varepsilon$,所以 $\inf S=1$.

(3)$\sup S=1,\inf S=0$,下面依定义验证.

对任意 $x\in S$,有 $0<x<1$,所以 1,0 分别是 S 的上、下界,又对任意的 $\varepsilon>0$,不妨设 $\varepsilon<1$,由无理数的稠密性,总存在无理数 $\eta\in(0,\varepsilon)$,则有无理数, $x_0=1-\eta\in S$,使 $x_0=1-\eta>1-\varepsilon$;有无理数 $x_1=\eta\in S$,使 $x_1=\eta<0+\varepsilon$,所以 $\sup S=1,\inf S=0$.

(4)$\sup S=1,\inf S=\frac{1}{2}$,下面依定义验证.

对任意的 $x\in S$,有 $\frac{1}{2}\leqslant x<1$,所以 $1,\frac{1}{2}$ 分别是 S 的上、下界. 对任意的 $\varepsilon>0$,必有正整数 $n_0\in N_+$ 使 $\frac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon$,则存在 $x_0=1-\frac{1}{2^{n_0}}\in S$,使 $x_0>1-\varepsilon$,所以 $\mathrm{Sup}S=1$,又存在 $x_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\in S$,使 $x_1<\frac{1}{2}+\varepsilon$, 所以 $\inf S=\frac{1}{2}$.