

★ 考研互动精品课程系列教程 ★



考研数学 基础精编教程

组编 高教网
主编 王式安 武忠祥



高教网
HIGHER-EDU

考研互动精品课程配套用书



www.higher-edu.cn

良师 益友 快乐考研

附赠：高教网10小时无限畅听卡

中国人民大学出版社

★ 考研互动精品课程系列教程 ★



考研数学 基础精编教程

组编 高教网
主编 王式安 武忠祥



高教网
HIGHER-EDU

考研互动精品课程配套用书



www.higher-edu.cn

良师 益友 快乐考研

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

考研数学基础精编教程/王式安, 武忠祥主编.—北京: 中国人民大学出版社, 2012.5
ISBN 978-7-300-15850-1

I. ①考… II. ①王… ②武… III. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 105772 号

考研互动精品课程系列教程

考研数学基础精编教程

组编 高教网

主编 王式安 武忠祥

Kaoyan Shuxue Jichu Jingbian Jiaocheng

出版发行	中国人民大学出版社		
社 址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电 话	010-62511242 (总编室)		010-62511398 (质管部)
	010-82501766 (邮购部)		010-62514148 (门市部)
	010-62515195 (发行公司)		010-62515275 (盗版举报)
网 址	http://www.higher-edu.cn		
	http://www.1kao.com.cn (中国 1 考网)		
经 销	新华书店		
印 刷	北京市鑫霸印务有限公司		
规 格	185mm × 260mm 16 开本	版 次	2012 年 6 月第 1 版
印 张	15	印 次	2012 年 6 月第 1 次印刷
字 数	202 000	定 价	28.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

前言

有人说数学容易学，但得分难，特别是得高分更是难上难！为什么呢？

数学是一门建立在基本概念、基本理论基础之上的推理演绎学科，因此，入门容易。但要得高分，特别是考研数学，作为选拔性考试，考查的是考生的全面综合素质和能力，其难度可想而知。纵观近二十几年的考题，我们发现考研数学主要考查以下四个方面：

- 一是考基础（基本概念、基本理论、基本方法）。
- 二是考解综合题的能力。
- 三是考分析问题和解决问题的能力，即解应用题的能力。
- 四是考解题的熟练程度（通过大题量、大计算量考核）。

由以上可以看出，基本概念、基本理论、基本方法是根本，是考查的第一要素，也是后面三种能力的基础。

本书正是从“抓基础、讲概念、析原理”开始，结合考研互动精品课堂中老师的讲解，形成一套“从考纲要求出发——分析历年本章命题规律——总结出本章所考查题型——透析各题型后的基本概念、原理——分析出最佳的解题方法——将方法用练习进行巩固运用”的科学复习体系。

“从目标出发→找到源头→发现规律→形成方法→解题运用”的教学流程，结合“互动视频——在线研友互动——线下图书互动”的三位一体互动模式，形成了高教网独一无二的考研互动立体化学习新模式。

在该模式下，考生可实现对每个章节知识点的轻松、高效、快乐学习。

考生在结合视频，深入掌握本体系中的 137 个基本概念、公式、原理和 116 种题型后，就可以彻底解决基本功的问题，为强化阶段的全面综合复习打下坚实的基础。

数学的知识点是不变的，变的只是出题的方式和角度，只有对基本概念、基本理论有充分的理解、把握和运用，再加以综合训练提高，才可实现以不变应万变。

为了方便读者学习，本教程中有些章节的编排顺序与大纲略有不同。在每章标题下，标注了与本章关联的视频课程。

由于时间仓促，若有不当之处，恳请广大读者和数学界同仁指正。

编者

目 录

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续	(1)
§1 考试内容与要求及名师点拨	(1)
§2 概念、公式与方法精讲	(2)
§3 考研基本题型与例题	(6)
§4 精选练习题	(17)
§5 习题提示与参考答案	(19)
第二章 导数与微分	(21)
§1 考试内容与要求及名师点拨	(21)
§2 概念、公式与方法精讲	(21)
§3 考研基本题型与例题	(24)
§4 精选练习题	(34)
§5 习题提示与参考答案	(35)
第三章 微分中值定理与应用	(36)
§1 考试内容与要求及名师点拨	(36)
§2 概念、公式与方法精讲	(37)
§3 考研基本题型与例题	(40)
§4 精选练习题	(52)
§5 习题提示与参考答案	(53)
第四章 不定积分	(55)
§1 考试内容与要求及名师点拨	(55)
§2 概念、公式与方法精讲	(55)
§3 考研基本题型与例题	(57)
§4 精选练习题	(61)
§5 习题提示与参考答案	(62)
第五章 定积分	(64)
§1 考试内容与要求及名师点拨	(64)

II

§ 2 概念、公式与方法精讲	(64)
§ 3 考研基本题型与例题	(67)
§ 4 精选练习题	(79)
§ 5 习题提示与参考答案	(80)
第六章 定积分应用	(81)
§ 1 考试内容与要求及名师点拨	(81)
§ 2 概念、公式与方法精讲	(81)
§ 3 考研基本题型与例题	(83)
§ 4 精选练习题	(86)
§ 5 习题提示与参考答案	(87)
第七章 多元函数微分学	(89)
§ 1 考试内容与要求及名师点拨	(89)
§ 2 概念、公式与方法精讲	(90)
§ 3 考研基本题型与例题	(92)
§ 4 精选练习题	(101)
§ 5 习题提示与参考答案	(102)
第八章 二重积分	(103)
§ 1 考试内容与要求及名师点拨	(103)
§ 2 概念、公式与方法精讲	(103)
§ 3 考研基本题型与例题	(104)
§ 4 精选练习题	(109)
§ 5 习题提示与参考答案	(110)

第二篇 线性代数

第一章 行列式	(111)
§ 1 考试内容与要求及名师点拨	(111)
§ 2 概念、公式与方法精讲	(111)
§ 3 考研基本题型与例题	(115)
§ 4 精选练习题	(117)
§ 5 习题提示与参考答案	(119)
第二章 矩阵及其运算	(120)
§ 1 考试内容与要求及名师点拨	(120)
§ 2 概念、公式与方法精讲	(121)
§ 3 考研基本题型与例题	(128)
§ 4 精选练习题	(129)
§ 5 习题提示与参考答案	(132)

第三章 向量与向量空间	(134)
§1 考试内容与要求及名师点拨	(134)
§2 概念、公式与方法精讲	(134)
§3 考研基本题型与例题	(140)
§4 精选练习题	(145)
§5 习题提示与参考答案	(147)
第四章 特征值与特征向量	(149)
§1 考试内容与要求及名师点拨	(149)
§2 概念、公式与方法精讲	(149)
§3 考研基本题型与例题	(156)
§4 精选练习题	(158)
§5 习题提示与参考答案	(160)
第五章 二次型	(161)
§1 考试内容与要求及名师点拨	(161)
§2 概念、公式与方法精讲	(161)
§3 考研基本题型与例题	(166)
§4 精选练习题	(168)
§5 习题提示与参考答案	(169)

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率	(171)
§1 考试内容与要求及名师点拨	(171)
§2 概念、公式与方法精讲	(171)
§3 考研基本题型与例题	(173)
§4 精选练习题	(176)
§5 习题提示与参考答案	(177)
第二章 一维随机变量及其分布	(178)
§1 考试内容与要求及名师点拨	(178)
§2 概念、公式与方法精讲	(178)
§3 考研基本题型与例题	(181)
§4 精选练习题	(185)
§5 习题提示与参考答案	(186)
第三章 多维随机变量及其概率分布	(188)
§1 考试内容与要求及名师点拨	(188)
§2 概念、公式与方法精讲	(188)
§3 考研基本题型与例题	(192)
§4 精选练习题	(196)

§ 5 习题提示与参考答案	(198)
第四章 随机变量的数字特征	(199)
§ 1 考试内容与要求及名师点拨	(199)
§ 2 概念、公式与方法精讲	(199)
§ 3 考研基本题型与例题	(201)
§ 4 精选练习题	(205)
§ 5 习题提示与参考答案	(207)
第五章 大数定律与中心极限定理	(208)
§ 1 考试内容与要求及名师点拨	(208)
§ 2 概念、公式与方法精讲	(208)
§ 3 考研基本题型与例题	(209)
§ 4 精选练习题	(210)
§ 5 习题提示与参考答案	(211)
第六章 数理统计基本概念	(213)
§ 1 考试内容与要求及名师点拨	(213)
§ 2 概念、公式与方法精讲	(214)
§ 3 考研基本题型与例题	(216)
§ 4 精选练习题	(218)
§ 5 习题提示与参考答案	(218)
第七章 参数估计	(220)
§ 1 考试内容与要求及名师点拨	(220)
§ 2 概念、公式与方法精讲	(221)
§ 3 考研基本题型与例题	(222)
§ 4 精选练习题	(225)
§ 5 习题提示与参考答案	(226)
第八章 假设检验	(227)
§ 1 考试内容与要求及名师点拨	(227)
§ 2 概念、公式与方法精讲	(227)
§ 3 考研基本题型与例题	(229)
§ 4 精选练习题	(229)
§ 5 习题提示与参考答案	(230)



第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续

【本章视频】高教网(www. higher-edu. cn) 考研数学互动精品课程基础阶段高等数学第1~6课.

§ 1 考试内容与要求及名师点拨

考试内容

函数的概念及表示法,函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性,复合函数、反函数、分段函数和隐函数,基本初等函数的性质及其图形,初等函数,函数关系的建立,数列极限与函数极限的定义及其性质,函数的左极限和右极限,无穷小量和无穷大量的概念及其关系,无穷小量的性质及无穷小量的比较,极限的四则运算,极限存在的两个准则,单调有界准则和夹逼准则,两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

函数连续的概念,函数间断点的类型,初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质.

考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

**名师点拨**

函数是微积分的研究对象,极限是用来研究函数的主要工具,连续性是函数的基本性态,也是可导性与可积性的重要条件.

本章的重点内容是:

1. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性及复合函数;
2. 极限的性质、存在准则及求极限的方法(这里主要是五种方法:有理运算法则,基本极限,等价无穷小代换,夹逼准则,单调有界准则);
3. 无穷小量及其阶的比较;
4. 间断点及其分类.

§ 2 概念、公式与方法精讲

一、函数

1. 函数的概念(定义域,对应法则,值域).

2. 函数的性态:单调性、奇偶性、周期性、有界性.

有界性:若 $\exists M > 0$, 使得 $\forall x \in I$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 I 上有界.

3. 复合函数与反函数(求复合函数和反函数).

4. 基本初等函数与初等函数.

(1) 基本初等函数:

将幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 了解它们的定义域、性质、图形.

(2) 初等函数:

初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除和复合所得到且能用一个解析式表示的函数.

二、极限

1. 极限的概念

(1) 数列极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{当 } n > N \text{ 时, 恒有}$$

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

(2) 函数极限:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } |x| > X \text{ 时, 恒有}$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

类似地定义 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$



(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

左极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ 或 $f(x_0 - 0)$;

右极限: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$ 或 $f(x_0 + 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

几个值得注意的极限:

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ (错). 正确的是 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ (错). 正确的是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ (错). 正确的是 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

(iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ (错). 正确的是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.

(v) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$ (错). 正确的是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -1$.

2. 极限的性质

(1) 局部有界性:

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域内有界.

(2) 保号性:

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

(i) 如果 $A > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > 0$.

(ii) 如果当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) \geq 0$, 那么 $A \geq 0$.

(3) 有理运算性质:

若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 那么

$$\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B.$$

$$\lim [f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B.$$

$$\lim \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

【注】 以上性质要求极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在, 如果这两个极限中一个存在, 另一个不存在或两个都不存在, 则有以下结论:

- (1) 存在 \pm 不存在 = 不存在;
- (2) 不存在 \pm 不存在 = 不一定;
- (3) 存在 \times (\div) 不存在 = 不一定;
- (4) 不存在 \times (\div) 不存在 = 不一定.

两个常用结论:

(1) $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, $\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$;



$$(2) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0, \lim f(x) = 0 \Rightarrow \lim g(x) = 0.$$

【注】这是两个常用的结论,不仅要知道结论而且应知道为什么.事实上

(1) 由 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, $\lim g(x) = 0$ 及极限的乘法法则知

$$\lim f(x) = \lim \left[\frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) \right] = \lim \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim g(x) = 0;$$

(2) 由 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0, \lim f(x) = 0$ 及极限的除法法则知

$$\lim g(x) = \lim \frac{f(x)}{\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]} = \frac{\lim f(x)}{\lim \frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{0}{A} = 0;$$

(3) 极限值与无穷小之间的关系

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x).$$

其中 $\lim \alpha(x) = 0$.

数列极限也有以上对应的性质.

3. 极限的存在准则

(1) 夹逼准则:若存在 N , 当 $n > N$ 时, $x_n \leq y_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

(2) 单调有界准则:单调有界数列必有极限.

4. 常用的基本极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

5. 无穷小量

(1) 无穷小量的概念:若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量.

(2) 无穷小的比较:设 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = 0$, 且 $\beta(x) \neq 0$, 则

(i) 高阶无穷小:若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$;

(ii) 同阶无穷小:若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$;

(iii) 等价无穷小:若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

(iv) 无穷小的阶:若 $\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C \neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

(3) 常用的等价无穷小:当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1,$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, a^x - 1 \sim x \ln a.$$



(4) 等价无穷小代换:

若 $\alpha \sim \bar{\alpha}, \beta \sim \bar{\beta}$, 且 $\lim \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ 存在, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$.

(5) 无穷小的性质:

(i) 有限个无穷小的和仍是无穷小;

(ii) 有限个无穷小的积仍是无穷小;

(iii) 无穷小量与有界量的积仍是无穷小.

【注】性质(i)和(ii)中的“有限”二字不可去掉.

6. 无穷大量

(1) 无穷大量的概念: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量.

(2) 常用的一些无穷大量的比较:

(i) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $\ln^a x \ll x^\beta \ll a^x$, 其中 $a > 0, \beta > 0, a > 1$.

(ii) 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\ln^n n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$, 其中 $a > 0, \beta > 0, a > 1$.

(3) 无穷大量与无界变量的关系: 无穷大量 \Rightarrow 无界变量.

(4) 无穷大量与无穷小量的关系: 在同一极限过程中, 如果 $f(x)$ 是无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 是无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

三、连续

1. 连续的定义

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (或 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$), 则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

左连续: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处左连续.

右连续: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处右连续.

$f(x)$ 连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 左连续且右连续.

2. 间断点

若 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域有定义, 但在 x_0 处不连续, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

(1) 第一类间断点: 左、右极限均存在的间断点.

可去间断点: 左极限 = 右极限.

跳跃间断点: 左极限 \neq 右极限.

(2) 第二类间断点: 左、右极限中至少有一个不存在的间断点.

无穷间断点: $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) \rightarrow \infty$, 如 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处.

振荡间断点: $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 振荡, 如 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处.

3. 连续函数性质

(1) 连续函数的和、差、积、商(分母不为零)及复合仍为连续函数.

(2) 基本初等函数在其定义域内是连续的, 初等函数在其定义区间内是连续的.



- (3) 有界性:若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.
 (4) 最值性:若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值和最小值.
 (5) 介值性:若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \neq f(b)$, 则对 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间任一数 C , 至少存在一个 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = C$.

推论 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可取到介于最小值 m 与最大值 M 之间的任何值.

- (6) 零点定理:若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则必 $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$.

§ 3 考研基本题型与例题

题型一 有关函数有界性、单调性、周期性及奇偶性的判定

【例 1】 $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x} (-\infty < x < +\infty)$ 是().

- (A) 有界函数 (B) 单调函数 (C) 周期函数 (D) 偶函数

【解】 应选(D). 由于 $|x \sin x|$ 和 $e^{\cos x}$ 都是偶函数, 则 $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x}$ 是偶函数, 故应选(D).

【例 2】 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(x) = \int_0^x f(t) dt + C$, 即 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数.

证明:(1) 当 $f(x)$ 为奇函数时 $F(x)$ 为偶函数;

(2) 当 $f(x)$ 为偶函数时 $F(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow C = 0$.

【证明】 考察 $F_1(x) = \int_0^x f(t) dt$.

$$(1) F_1(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \stackrel{\text{令 } u = -t}{=} \int_0^x f(-u) (-du) = \int_0^x f(u) du = F_1(x)$$

所以 $F_1(x)$ 为偶函数.

所以 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + C = F_1(x) + C$ 为偶函数.

$$(2) F_1(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \stackrel{\text{令 } u = -t}{=} \int_0^x f(-u) (-du) = -\int_0^x f(u) du = -F_1(x)$$

所以 $F_1(x)$ 为奇函数.

所以 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + C = F_1(x) + C$ 为非奇非偶函数, 当且仅当 $C = 0$ 时 $F(x)$ 是奇函数.

【评注】 设 $f(x)$ 的导数存在, 有以下结论:

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f'(x)$ 是偶函数; 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f'(x)$ 是奇函数.

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 的一切原函数都是偶函数; 若 $f(x)$ 是偶函数, 则只有一个原函数 $\int_0^x f(t) dt$ 是奇函数.

(3) 若 $f(x)$ 是周期函数, 则 $f'(x)$ 也是周期函数.

(4) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数, 则 $\int_a^{x+T} f(t) dt$ 是以 T 为周期的周期函数 $\Leftrightarrow \int_0^T f(t) dt = 0$.



【例 3】 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界? ()

- (A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 3)$

【解】 方法一 直接法

由于 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在 $(-1, 0)$ 上连续, 且

$$f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = -\frac{\sin 3}{18}. \text{ (存在)}$$

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = -\frac{\sin 2}{4}. \text{ (存在)}$$

则 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上有界.

故选(A).

方法二 排除法

$$\text{由于 } f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \infty.$$

则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上无界. (B) 不正确.

$$\text{由于 } f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \infty.$$

则 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上无界. (C) 不正确.

$$\text{由于 } f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x|}{x(x-1)(x-2)} = \infty,$$

则 $f(x)$ 在 $(2, 3)$ 上无界. (D) 不正确.

故应选(A).

题型二 复合函数

【例 1】 已知 $f(x) = \sin x, f(\varphi(x)) = 1 - x^2$, 则 $\varphi(x)$ _____, 定义域为 _____.

【解】 应填 $\varphi(x) = \arcsin(1 - x^2)$, 定义域为 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

$$\text{由 } f(x) = \sin x, f[\varphi(x)] = 1 - x^2,$$

$$\text{得 } \sin \varphi(x) = 1 - x^2,$$

$$\text{则 } \varphi(x) = \arcsin(1 - x^2).$$

$$\text{令 } |1 - x^2| \leq 1, \text{ 得 } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$$

【例 2】 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases} f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $g[f(x)]$ 和 $f[g(x)]$.

【解】 $g[f(x)] = \begin{cases} x^2+2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0; \end{cases} f[g(x)] = \begin{cases} x-2, & x \leq 0, \\ -(x+2), & x > 0. \end{cases}$

【例 3】 设 $f(x-1) = \begin{cases} x^2, & x > 1, \\ x-2, & x \leq 1, \end{cases} g(x) = \begin{cases} -x & x > 0, \\ x & x \leq 0, \end{cases}$ 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$.

【解】 对于 $f(x-1) = \begin{cases} x^2, & x > 1 \\ x-2, & x \leq 1 \end{cases}$



$$\text{令 } t = x - 1 \text{ 得 } f(t) = \begin{cases} (t+1)^2, & t > 0 \\ t-1, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{所以 } f(x)g(x) = \begin{cases} -x(x+1)^2, & x > 0 \\ x(x-1), & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [-x(x+1)^2] = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x(x-1) = 0,$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0.$$

题型三 求极限

方法 1 有理运算

$$\text{【例 1】求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x)x}.$$

$$\begin{aligned} \text{【解】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x)x} &= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{2} (3 + 0) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{【例 2】求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$$

$$\text{【解】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x[(1+x)^{\frac{2}{3}} + (1-x^2)^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{2}{3}}]}{2x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = \frac{3}{2}.$$

方法 2 基本极限

$$\text{【例 1】求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n, \text{ 其中 } a > 0, b > 0, c > 0.$$

【分析】本题是一个“ 1^∞ ”型极限,关于此类极限有以下常用结论:

若 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = \infty$, 且 $\lim \alpha(x)\beta(x) = A$, 则 $\lim [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = e^A$.

【解】由于 $\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n = \left[1 + \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} - 3}{3} \right) \right]^n$, 且

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} - 3}{3} \cdot n &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{a} - 1) + (\sqrt[n]{b} - 1) + (\sqrt[n]{c} - 1)}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{3} (\ln a + \ln b + \ln c) = \ln \sqrt[3]{abc}, \end{aligned}$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n = e^{\ln \sqrt[3]{abc}} = \sqrt[3]{abc}.$$

$$\text{【例 2】极限 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = (\quad).$$

(A) 1

(B) e

(C) e^{a-b} (D) e^{b-a}

$$\text{【解】方法一 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{x}{x-a} \right)^x \cdot \left(\frac{x}{x+b} \right)^x \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x-a} \right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-b}{x+b} \right)^x \\
 &= e^a \cdot e^{-b} = e^{a-b}.
 \end{aligned}$$

方法二

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{x} \right)^{-x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{x} \right)^{-x} \\
 &= e^a \cdot e^{-b} = e^{a-b}.
 \end{aligned}$$

故应选(C).

【例 3】 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} =$ _____.

【解】应填 $e^{-\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x - \cos x}{\cos x - \sin x} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} = -\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

则 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} = e^{-\sqrt{2}}$.

【例 4】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$.

【解】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x)\beta(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) \cdot x$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} \\
 &= 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{x}} = 1.
 \end{aligned}$$

则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = e$.

方法 3 等价无穷小代换

【例 1】求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x \ln(1+x^2)}$.

【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x \ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} (e^{\sin x - \tan x} - 1)}{x^3}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (\cos x - 1)}{x^3}
 \end{aligned}$$