★考研互动精品课程系列教程★

最新版
人大考研

# 考研数学
# 基础精编教程

组编 高教网
主编 王式安 武忠祥

高教网
HIGHER-EDU

考研互动精品课程配套用书


www.higher-edu.cn

良师 益友 快乐考研

附赠：高教网10小时无限畅听卡

中国人民大学出版社

★考研互动精品课程系列教程★

最新版

人大考研

# 考研数学

# 基础精编教程

组编 高教网

主编 王式安 武忠祥

高教网 HIGHER-EDU 考研互动精品课程配套用书

www.higher-edu.cn

良师 益友 快乐考研

中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目（CIP）数据

考研数学基础精编教程/王式安，武忠祥主编.—北京：中国人民大学出版社，2012.5
ISBN 978-7-300-15850-1

Ⅰ.①考… Ⅱ.①王… ②武… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 105772 号

考研互动精品课程系列教程
**考研数学基础精编教程**
组编 高教网
主编 王式安 武忠祥
Kaoyan Shuxue Jichu Jingbian Jiaocheng

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 中国人民大学出版社 | | |
| 社　　址 | 北京中关村大街 31 号 | 邮政编码 | 100080 |
| 电　　话 | 010-62511242（总编室） | | 010-62511398（质管部） |
| | 010-82501766（邮购部） | | 010-62514148（门市部） |
| | 010-62515195（发行公司） | | 010-62515275（盗版举报） |
| 网　　址 | http://www.higher-edu.cn | | |
| | http://www. 1kao.com.cn（中国 1 考网） | | |
| 经　　销 | 新华书店 | | |
| 印　　刷 | 北京市鑫霸印务有限公司 | | |
| 规　　格 | 185mm×260mm　16 开本 | 版　　次 | 2012 年 6 月第 1 版 |
| 印　　张 | 15 | 印　　次 | 2012 年 6 月第 1 次印刷 |
| 字　　数 | 202 000 | 定　　价 | 28.00 元 |

# 前 言

有人说数学容易学，但得分难，特别是得高分更是难上难！为什么呢？

数学是一门建立在基本概念、基本理论基础之上的推理演绎学科，因此，入门容易。但要得高分，特别是考研数学，作为选拔性考试，考查的是考生的全面综合素质和能力，其难度可想而知。纵观近二十几年的考题，我们发现考研数学主要考查以下四个方面：

一是考基础（基本概念、基本理论、基本方法）。

二是考解综合题的能力。

三是考分析问题和解决问题的能力，即解应用题的能力。

四是考解题的熟练程度（通过大题量、大计算量考核）。

由以上可以看出，基本概念、基本理论、基本方法是根本，是考查的第一要素，也是后面三种能力的基础。

本书正是从“抓基础、讲概念、析原理”开始，结合考研互动精品课堂中老师的讲解，形成一套“从考纲要求出发——分析历年本章命题规律——总结出本章所考查题型——透析各题型后的基本概念、原理——分析出最佳的解题方法——将方法用练习进行巩固运用”的科学复习体系。

“从目标出发→找到源头→发现规律→形成方法→解题运用”的教学流程，结合“互动视频——在线研友互动——线下图书互动”的三位一体互动模式，形成了高教网独一无二的考研互动立体化学习新模式。

在该模式下，考生可实现对每个章节知识点的轻松、高效、快乐学习。

考生在结合视频，深入掌握本体系中的 137 个基本概念、公式、原理和 116 种题型后，就可以彻底解决基本功的问题，为强化阶段的全面综合复习打下坚实的基础。

数学的知识点是不变的，变的只是出题的方式和角度，只有对基本概念、基本理论有充分的理解、把握和运用，再加以综合训练提高，才可实现以不变应万变。

为了方便读者学习，本教程中有些章节的编排顺序与大纲略有不同。在每章标题下，标注了与本章关联的视频课程。

由于时间仓促，若有不当之处，恳请广大读者和数学界同仁指正。

编 者

# 目 录

## 第一篇 高等数学

## 第三篇　概率论与数理统计

# 第一篇　高等数学

## 第一章　函数、极限、连续

【本章视频】高教网(www. higher-edu. cn)考研数学互动精品课程基础阶段高等数学第 1 ～ 6 课.

### §1　考试内容与要求及名师点拨

#### 考试内容

函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，复合函数、反函数、分段函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，函数关系的建立，数列极限与函数极限的定义及其性质，函数的左极限和右极限，无穷小量和无穷大量的概念及其关系，无穷小量的性质及无穷小量的比较，极限的四则运算，极限存在的两个准则，单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质.

#### 考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

名师点拨

函数是微积分的研究对象，极限是用来研究函数的主要工具，连续性是函数的基本性态，也是可导性与可积性的重要条件.

本章的重点内容是：

1. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性及复合函数；

2. 极限的性质、存在准则及求极限的方法(这里主要是五种方法：有理运算法则，基本极限，等价无穷小代换，夹逼准则，单调有界准则)；

3. 无穷小量及其阶的比较；

4. 间断点及其分类.

## §2 概念、公式与方法精讲

### 一、函数

1. 函数的概念(定义域，对应法则，值域).

2. 函数的性态：单调性、奇偶性、周期性、有界性.

有界性：若 $\exists M>0$，使得 $\forall x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 $I$ 上有界.

3. 复合函数与反函数(求复合函数和反函数).

4. 基本初等函数与初等函数.

(1) 基本初等函数：

将幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 了解它们的定义域、性质、图形.

(2) 初等函数：

初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除和复合所得到且能用一个解析式表示的函数.

### 二、极限

**1. 极限的概念**

(1) 数列极限：

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，当 $n>N$ 时，恒有

$$|a_n-A|<\varepsilon.$$

(2) 函数极限：

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

类似地定义 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A.$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

左极限：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ 或 $f(x_0 - 0)$；

右极限：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$ 或 $f(x_0 + 0)$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

几个值得注意的极限：

(ⅰ) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$（错）. 正确的是 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

(ⅱ) $\lim\limits_{x\to \infty} e^x = \infty$（错）. 正确的是 $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$，$\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$.

(ⅲ) $\lim\limits_{x\to 0} \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$（错）. 正确的是 $\lim\limits_{x\to 0^+} \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^-} \arctan \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$.

(ⅳ) $\lim\limits_{x\to \infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$（错）. 正确的是 $\lim\limits_{x\to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$.

(ⅴ) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$（错）. 正确的是 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$，$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} = -1$.

**2. 极限的性质**

(1) 局部有界性：

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 某去心邻域内有界.

(2) 保号性：

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

(ⅰ) 如果 $A > 0$，则存在 $\delta > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，$f(x) > 0$.

(ⅱ) 如果当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，$f(x) \geqslant 0$，那么 $A \geqslant 0$.

(3) 有理运算性质：

若 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，那么

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B.$$

$$\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B.$$

$$\lim\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}\ (B \neq 0).$$

【注】以上性质要求极限 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，如果这两个极限中一个存在，另一个不存在或两个都不存在，则有以下结论：

(1) 存在 $\pm$ 不存在 $=$ 不存在；

(2) 不存在 $\pm$ 不存在 $=$ 不一定；

(3) 存在 $\times(\div)$ 不存在 $=$ 不一定；

(4) 不存在 $\times(\div)$ 不存在 $=$ 不一定.

两个常用结论：

(1) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，$\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$；

(2) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0, \lim f(x) = 0 \Rightarrow \lim g(x) = 0.$

**【注】**这是两个常用的结论，不仅要知道结论而且应知道为什么.事实上

(1) 由 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，$\lim g(x) = 0$ 及极限的乘法法则知

$$\lim f(x) = \lim\left[\frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x)\right] = \lim \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim g(x) = 0;$$

(2) 由 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0, \lim f(x) = 0$ 及极限的除法法则知

$$\lim g(x) = \lim \frac{f(x)}{\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]} = \frac{\lim f(x)}{\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}} = \frac{0}{A} = 0;$$

(3) 极限值与无穷小之间的关系

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x).$$

其中 $\lim \alpha(x) = 0$.

数列极限也有以上对应的性质.

**3. 极限的存在准则**

(1) 夹逼准则：若存在 $N$，当 $n > N$ 时，$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

(2) 单调有界准则：单调有界数列必有极限.

**4. 常用的基本极限**

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$，　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$，　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$，

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$，　$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$，　$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$，

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$，　$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

**5. 无穷小量**

(1) 无穷小量的概念：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$，则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量.

(2) 无穷小的比较：设 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = 0$，且 $\beta(x) \neq 0$，则

(ⅰ) 高阶无穷小：若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$，记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$；

(ⅱ) 同阶无穷小：若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$；

(ⅲ) 等价无穷小：若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$，记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$；

(ⅳ) 无穷小的阶：若 $\lim \dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C \neq 0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 $k$ 阶无穷小.

(3) 常用的等价无穷小：当 $x \to 0$ 时，

$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim \mathrm{e}^x - 1$，

$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$，$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$，$a^x - 1 \sim x\ln a$.

(4) 等价无穷小代换：

若 $\alpha \sim \bar{\alpha}, \beta \sim \bar{\beta}$，且 $\lim \dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ 存在，则 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$.

(5) 无穷小的性质：

(ⅰ) 有限个无穷小的和仍是无穷小；

(ⅱ) 有限个无穷小的积仍是无穷小；

(ⅲ) 无穷小量与有界量的积仍是无穷小.

**【注】** 性质(ⅰ)和(ⅱ)中的“有限”二字不可去掉.

**6. 无穷大量**

(1) 无穷大量的概念：若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷大量.

(2) 常用的一些无穷大量的比较：

(ⅰ) 当 $x \to +\infty$ 时 $\ln^{\alpha} x \ll x^{\beta} \ll a^{x}$，其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$.

(ⅱ) 当 $n \to \infty$ 时 $\ln^{\alpha} n \ll n^{\beta} \ll a^{n} \ll n! \ll n^{n}$，其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$.

(3) 无穷大量与无界变量的关系：无穷大量 $\Rightarrow$ 无界变量.

(4) 无穷大量与无穷小量的关系：在同一极限过程中，如果 $f(x)$ 是无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小；反之，如果 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

## 三、连续

**1. 连续的定义**

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$（或 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$），则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续.

左连续：若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 处左连续.

右连续：若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 处右连续.

$$f(x) \text{ 连续} \Leftrightarrow f(x) \text{ 左连续且右连续}.$$

**2. 间断点**

若 $f(x)$ 在 $x_0$ 某去心邻域有定义，但在 $x_0$ 处不连续，则称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的间断点.

(1) 第一类间断点：左、右极限均存在的间断点.

可去间断点：左极限 $=$ 右极限.

跳跃间断点：左极限 $\neq$ 右极限.

(2) 第二类间断点：左、右极限中至少有一个不存在的间断点.

无穷间断点：$x \to x_0$ 时，$f(x) \to \infty$，如 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处.

振荡间断点：$x \to x_0$ 时，$f(x)$ 振荡，如 $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处.

**3. 连续函数性质**

(1) 连续函数的和、差、积、商(分母不为零)及复合仍为连续函数.

(2) 基本初等函数在其定义域内是连续的，初等函数在其定义区间内是连续的.

(3) 有界性:若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界.

(4) 最值性:若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上必有最大值和最小值.

(5) 介值性:若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $f(a)\neq f(b)$,则对 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间任一数 $C$,至少存在一个 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=C$.

**推论** 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$ 在$[a,b]$可取到介于最小值 $m$ 与最大值 $M$ 之间的任何值.

(6) 零点定理:若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则必 $\exists\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$.

## §3 考研基本题型与例题

### 题型一 有关函数有界性、单调性、周期性及奇偶性的判定

**【例 1】** $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$ 是(  ).

(A) 有界函数  (B) 单调函数  (C) 周期函数  (D) 偶函数

**【解】** 应选(D). 由于 $|x\sin x|$ 和 $e^{\cos x}$ 都是偶函数,则 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$ 是偶函数,故应选(D).

**【例 2】** 设 $f(x)$ 为连续函数,$F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$,即 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数.

证明:(1) 当 $f(x)$ 为奇函数时 $F(x)$ 为偶函数;

(2) 当 $f(x)$ 为偶函数时 $F(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow C=0$.

**【证明】** 考察 $F_1(x)=\int_0^x f(t)dt$.

$$(1)F_1(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt\xlongequal{令 u=-t}\int_0^x f(-u)(-du)=\int_0^x f(u)du=F_1(x)$$

所以 $F_1(x)$ 为偶函数.

所以 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C=F_1(x)+C$ 为偶函数.

$$(2)F_1(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt\xlongequal{令 u=-t}\int_0^x f(-u)(-du)=-\int_0^x f(u)du=-F_1(x)$$

所以 $F_1(x)$ 为奇函数.

所以 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C=F_1(x)+C$ 为非奇非偶函数,当且仅当 $C=0$ 时 $F(x)$ 是奇函数.

**【评注】** 设 $f(x)$ 的导数存在,有以下结论:

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数,则 $f'(x)$ 是偶函数;若 $f(x)$ 是偶函数,则 $f'(x)$ 是奇函数.

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数,则 $f(x)$ 的一切原函数都是偶函数;若 $f(x)$ 是偶函数,则只有一个原函数 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数.

(3) 若 $f(x)$ 是周期函数,则 $f'(x)$ 也是周期函数.

(4) 若 $f(x)$ 是周期为 $T$ 的周期函数,则 $\int_a^x f(t)dt$ 是以 $T$ 为周期的周期函数 $\Leftrightarrow\int_0^T f(t)dt=0$.

【例 3】函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界?(　　)

(A)$(-1,0)$　　(B)$(0,1)$　　(C)$(1,2)$　　(D)$(2,3)$

【解】**方法一**　直接法

由于 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在$(-1,0)$上连续,且

$$f(-1+0)=\lim_{x\to-1^+}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 3}{18}.(存在)$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 2}{4}.(存在)$$

则 $f(x)$ 在$(-1,0)$上有界.

故选(A).

**方法二**　排除法

由于 $f(1-0)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty$.

则 $f(x)$ 在$(0,1)$上无界.(B)不正确.

由于 $f(1+0)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty$.

则 $f(x)$ 在$(1,2)$上无界.(C)不正确.

由于 $f(2+0)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{|x|}{x(x-1)(x-2)}=\infty$,

则 $f(x)$ 在$(2,3)$上无界.(D)不正确.

故应选(A).

## 题型二　复合函数

【例 1】已知 $f(x)=\sin x,f(\varphi(x))=1-x^2$,则 $\varphi(x)$ ________,定义域为________.

【解】应填 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$,定义域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

由 $f(x)=\sin x,f[\varphi(x)]=1-x^2$,

得 $\sin\varphi(x)=1-x^2$,

则 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$.

令 $|1-x^2|\leqslant1$,得 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

【例 2】设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$　$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant0,\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$ 和 $f[g(x)]$.

【解】$g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant0;\end{cases}$　$f[g(x)]=\begin{cases}x-2, & x\leqslant0,\\ -(x+2), & x>0.\end{cases}$

【例 3】设 $f(x-1)=\begin{cases}x^2, & x>1,\\ x-2, & x\leqslant1,\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}-x & x>0,\\ x & x\leqslant0,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)$.

【解】对于 $f(x-1)=\begin{cases}x^2, & x>1\\ x-2, & x\leqslant1\end{cases}$

令 $t = x - 1$ 得 $\quad f(t) = \begin{cases} (t+1)^2, & t > 0 \\ t - 1, & t \leqslant 0 \end{cases}$

所以 $f(x)g(x) = \begin{cases} -x(x+1)^2, & x > 0 \\ x(x-1), & x \leqslant 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}[-x(x+1)^2] = 0$,

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x(x-1) = 0$,

所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)g(x) = 0$.

## 题型三 求极限

### 方法 1 有理运算

**【例 1】** 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\sin x + x^2 \cos \dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)x}$.

**【解】** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\sin x + x^2 \cos \dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)x} = \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\sin x}{x} + \lim\limits_{x \to 0} x\cos \dfrac{1}{x}\right)$

$$= \frac{1}{2}(3+0) = \frac{3}{2}.$$

**【例 2】** 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$.

**【解】** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x[(1+x)^{\frac{2}{3}} + (1-x^2)^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{2}{3}}]}{2x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = \dfrac{3}{2}$.

### 方法 2 基本极限

**【例 1】** 求 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$，其中 $a > 0, b > 0, c > 0$.

**【分析】** 本题是一个“$1^\infty$”型极限，关于此类极限有以下常用结论：

若 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = \infty$，且 $\lim \alpha(x)\beta(x) = A$，则 $\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)} = e^A$.

**【解】** 由于 $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3}\right)^n = \left[1 + \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} - 3}{3}\right)\right]^n$，且

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} - 3}{3} \cdot n = \frac{1}{3} \lim_{n \to \infty} \frac{(\sqrt[n]{a} - 1) + (\sqrt[n]{b} - 1) + (\sqrt[n]{c} - 1)}{\dfrac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{3}(\ln a + \ln b + \ln c) = \ln \sqrt[3]{abc},$$

则 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3}\right)^n = e^{\ln \sqrt[3]{abc}} = \sqrt[3]{abc}$.

**【例 2】** 极限 $\lim\limits_{x \to \infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x = (\quad)$.

(A) 1 (B) e (C) $e^{a-b}$ (D) $e^{b-a}$

**【解】方法一** $\lim\limits_{x \to \infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x}{x-a}\right)^x\cdot\left(\frac{x}{x+b}\right)^x\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x-a}\right)^x\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-b}{x+b}\right)^x$$

$$=e^a\cdot e^{-b}=e^{a-b}.$$

**方法二** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{-x}$$

$$=e^a\cdot e^{-b}=e^{a-b}.$$

故应选(C).

**【例 3】** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$ ____________.

**【解】** 应填 $e^{-\sqrt{2}}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x-\cos x}{\cos x-\sin x}$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}=-\sqrt{2}$$

则 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=e^{-\sqrt{2}}$.

**【例 4】** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

**【解】** $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)\beta(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\cdot x$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$=1+\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{x}}=1.$$

则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=e.$

### 方法 3　等价无穷小代换

**【例 1】** 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{x\ln(1+x^2)}$.

**【解】** $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{x\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\tan x}(e^{\sin x-\tan x}-1)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(\cos x-1)}{x^3}$$