



高等学校理工类课程学习辅导丛书

高等数学教程学习指导

主 编 蔡光程 戴 琳
副主编 董艳梅 李怀远



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



高等学校理工类课程学习辅导丛书

高等数学教程学习指导

Gaodeng Shuxue Jiaocheng Xuexi Zhidao

主 编 蔡光程 戴 琳

副主编 董艳梅 李怀远

参编人员(以汉语拼音为序):

蔡光程 蔡言颖 戴 琳 董艳梅 李怀远

吕井明 马凤兴 吴劲鹏 张卫锋 张中健



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是与昆明理工大学主编的《高等数学教程》相配套的学习辅导书,内容丰富,题型齐全,自成体系。

各章内容包括内容提要与复习重点、基本概念分析题、典型例题分析、提高题。选用教材中具有一定代表性、同时又较难的习题作了解答,以帮助学生更好地理解教材中的主要内容和解题方法。另外,习题中还充实了大量近十年的考研题及较难的提高题。

本书可作为高等学校理工类学生高等数学课程的辅导教材、复习参考书,对报考研究生的学生也是一本很好的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学教程学习指导/蔡光程,戴琳主编. —北京:高等教育出版社, 2011. 10

ISBN 978-7-04-033929-1

I. ①高… II. ①蔡…②戴… III. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 188021 号

策划编辑	张长虹	责任编辑	张长虹	封面设计	张志	版式设计	马敬茹
插图绘制	黄建英	责任校对	姜国萍	责任印制	刘思涵		

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京人卫印刷厂	网上订购	http://www.landaco.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.landaco.com.cn
印 张	21.75	版 次	2011 年 10 月第 1 版
字 数	410 千字	印 次	2011 年 10 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	29.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。
版权所有 侵权必究
物 料 号 33929-00

前 言

本书是与昆明理工大学系统科学与应用数学系李继彬教授主编的《高等数学教程》(由高等教育出版社出版)相配套的学习辅导书,主要面向使用该教材的学生与教师。全书以“内容提要与复习重点、基本概念分析题、典型例题分析、提高题”的结构形式来组织,按《高等数学教程》的章节顺序进行编排,内容紧扣教材,并对教材的内容和习题解法做了补充与提升,针对学生在学习对应教材章节中碰到的常见问题作有启发性解答。由于某些提高题的综合性及知识点之间的相互联系,需要在学完《高等数学教程》后才能完成,这些题不仅是综合性强、理论意义深、解题技巧较巧妙的习题,也是属于考研类型的题目。另外,还选用了教材中具有代表性、同时又较难的习题作了解答,以帮助学生更好地理解教材中的主要内容和解题方法。

各节内容具体安排如下(部分章节内容略有减少):

一、内容提要与复习重点

对教材中的主要概念、定理、公式以及概念之间的相关性进行了简要描述,使学生更易理解。考虑到本书配合主教材一起使用,对一些定义、定理不再详细叙述,学生可根据《高等数学教程》进行查阅与回顾。

二、基本概念分析题

对教材中碰到的问题或疑问作出较好的解释,特别是一些理论容易混淆和条件存在“陷阱”的概念题,在这部分都给出了详细分析和归纳;同时还选用了教材中的一些基本题目作出解答,以便学生学习。

三、典型例题分析

利用每节中基本理论、典型方法进行解题,使学生了解每节中的重点知识和常用解题思路,并希望通过典型例题分析帮助学生掌握重要的理论与方法。

四、提高题

选用教材中稍难些的题,训练学生解答综合题的能力;还选用近十年考研真题,引导学生了解考研题的知识点和难度以及需要掌握的方法、解题技巧等。

本书内容丰富,题型齐全,自成体系,可作为理工类学生学习高等数学课程的参考书。此外,书中还充实了大量的考研题及较难的提高题,对报考研究生的学生也是一本很好的参考书。

本书由昆明理工大学系统科学与应用数学系的下列教师编写:第一章、第七

章由蔡光程、吴劲鹏、吕井明编写,第二、三章、四章由李怀远、蔡言颖编写,第五、六、十一章由董艳梅、张中健、张卫锋编写,第八、九、十章由戴琳、马凤兴编写,书中的所有图形由何维刚完成。

限于编者的水平,书中不妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

蔡光程

2011年7月

目 录

第一章 空间解析几何	1
第一节 空间曲面的轨迹与方程	1
一、内容提要与复习重点	1
二、基本概念分析题	2
三、典型例题分析	3
四、提高题	4
第二节 空间曲线及其方程	4
一、内容提要与复习重点	4
二、基本概念分析题	5
三、提高题	6
第三节 向量及其运算	9
一、内容提要与复习重点	9
二、基本概念分析题	11
三、典型例题分析	13
四、提高题	14
第四节 平面及其方程	17
一、内容提要与复习重点	17
二、基本概念分析题	18
三、典型例题分析	19
四、提高题	20
第五节 空间直线及其方程	23
一、内容提要与复习重点	23
二、基本概念分析题	24
三、典型例题分析	25
四、提高题	27
第二章 函数 极限与连续性	31
第一节 函数	31
一、内容提要与复习重点	31
二、基本概念分析题	34

三、典型例题分析	35
四、提高题	36
第二节 极限的概念	37
一、内容提要 with 复习重点	37
二、基本概念分析题	38
三、典型例题分析	39
四、提高题	40
第三节 极限运算	41
一、内容提要 with 复习重点	41
二、基本概念分析题	42
三、典型例题分析	42
四、提高题	43
第四节 极限存在准则 两个重要极限	43
一、内容提要 with 复习重点	43
二、基本概念分析题	44
三、典型例题分析	44
四、提高题	45
第五节 无穷小的比较	45
一、内容提要 with 复习重点	45
二、基本概念分析题	46
三、典型例题分析	47
四、提高题	48
第六节 函数的连续性	49
一、内容提要 with 复习重点	49
二、基本概念分析题	51
三、典型例题分析	52
四、提高题	54
第三章 导数与微分	56
第一节 导数的概念	56
一、内容提要 with 复习重点	56
二、基本概念分析题	57
三、典型例题分析	58
四、提高题	60
第二节 函数的求导法则	61
一、内容提要 with 复习重点	61

二、基本概念分析题	63
三、典型例题分析	67
四、提高题	69
第三节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数	69
一、内容提要与复习重点	69
二、典型例题分析	70
三、提高题	74
第四节 微分及其在近似计算中的运用	76
一、内容提要与复习重点	76
二、基本概念分析题	77
三、典型例题分析	79
四、提高题	79
第四章 导数的应用	81
第一节 中值定理	81
一、内容提要与复习重点	81
二、基本概念分析题	81
三、典型例题分析	83
四、提高题	84
第二节 洛必达法则	86
一、内容提要与复习重点	86
二、基本概念分析题	86
三、典型例题分析	87
四、提高题	88
第三节 泰勒(Taylor)公式	90
一、内容提要与复习重点	90
二、基本概念分析题	91
三、典型例题分析	92
四、提高题	93
第四节 函数的单调性与凹凸性	94
一、内容提要与复习重点	94
二、基本概念分析题	95
三、典型例题分析	97
四、提高题	98
第五节 函数的极值与最值	99
一、内容提要与复习重点	99

二、基本概念分析题	101
三、典型例题分析	104
四、提高题	105
第五章 一元函数积分学	107
第一节 定积分的概念与性质	107
一、内容提要与复习重点	107
二、基本概念分析题	108
三、典型例题分析	109
第二节 微积分基本定理	111
一、内容提要与复习重点	111
二、基本概念分析题	112
三、典型例题分析	113
四、提高题	114
第三节 不定积分的概念和性质	116
一、内容提要与复习重点	116
二、基本概念分析题	117
三、典型例题分析	118
第四节 积分方法	118
一、内容提要与复习重点	118
二、基本概念分析题	120
三、典型例题分析	122
四、提高题	130
第五节 反常积分	134
一、内容提要与复习重点	134
二、典型例题分析	134
三、提高题	136
第六章 无穷级数	139
第一节 无穷级数的敛散性及其性质	139
一、内容提要与复习重点	139
二、基本概念分析题	140
三、典型例题分析	140
四、提高题	142
第二节 常数项级数的审敛法	143
一、内容提要与复习重点	143
二、基本概念分析题	145

三、典型例题分析	147
四、提高题	150
第三节 函数项级数与幂级数	152
一、内容提要与复习重点	152
二、基本概念分析题	154
三、典型例题分析	155
四、提高题	158
第四节 函数展开成幂函数	162
一、内容提要与复习重点	162
二、基本概念分析题	163
三、典型例题分析	164
四、提高题	166
第五节 傅里叶级数	168
一、内容提要与复习重点	168
二、基本概念分析题	171
三、典型例题分析	172
四、提高题	174
第七章 多元函数微分学	175
第一节 多元函数的基本概念	175
一、内容提要与复习重点	175
二、基本概念分析题	176
三、典型例题分析	177
四、提高题	178
第二节 偏导数	179
一、内容提要与复习重点	179
二、基本概念分析题	180
三、典型例题分析	181
四、提高题	183
第三节 全微分	184
一、内容提要与复习重点	184
二、基本概念分析题	184
三、典型例题分析	185
四、提高题	186
第四节 多元复合函数的求导法则	189
一、内容提要与复习重点	189

二、典型例题分析	190
三、提高题	191
第五节 隐函数的求导公式	192
一、内容提要与复习重点	192
二、典型例题分析	193
三、提高题	196
第六节 多元函数微分学的几何应用	199
一、内容提要与复习重点	199
二、基本概念分析题	200
三、典型例题分析	201
第七节 方向导数与梯度	203
一、内容提要与复习重点	203
二、基本概念分析题	204
三、典型例题分析	205
第八节 多元函数的极值	207
一、内容提要与复习重点	207
二、基本概念分析题	208
三、典型例题分析	209
四、提高题	212
第八章 重积分	215
第一节 二重积分的概念与性质	215
一、内容提要与复习重点	215
二、典型例题分析	216
第二节 利用直角坐标计算二重积分	218
一、内容提要与复习重点	218
二、基本概念分析题	219
三、典型例题分析	221
四、提高题	226
第三节 利用极坐标计算二重积分	228
一、内容提要与复习重点	228
二、基本概念分析题	229
三、典型例题分析	230
四、提高题	231
第四节 三重积分及其在直角坐标系下的计算方法	234
一、内容提要与复习重点	234

二、基本概念分析题	235
三、典型例题分析	236
四、提高题	238
第五节 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	240
一、内容提要与复习重点	240
二、基本概念分析题	241
三、典型例题分析	242
四、提高题	244
第九章 曲线积分与曲面积分	248
第一节 曲线积分	248
一、内容提要与复习重点	248
二、基本概念分析题	251
三、典型例题分析	252
四、提高题	254
第二节 格林公式	256
一、内容提要与复习重点	256
二、基本概念分析题	257
三、典型例题分析	258
四、提高题	261
第三节 曲面积分	266
一、内容提要与复习重点	266
二、基本概念分析题	268
三、典型例题分析	270
四、提高题	273
第四节 高斯公式和斯托克斯公式	278
一、内容提要与复习重点	278
二、典型例题分析	279
三、提高题	281
第十章 积分学的应用	286
第一节 积分学在几何上的应用	286
一、内容提要与复习重点	286
二、典型例题分析	287
三、提高题	293
第二节 积分学在物理上的应用	298
一、内容提要与复习重点	298

二、典型例题分析	300
三、提高题	303
第十一章 常微分方程	311
第一节 微分方程的基本概念	311
一、内容提要与复习重点	311
二、基本概念分析题	311
第二节 一阶微分方程	312
一、内容提要与复习重点	312
二、基本概念分析题	313
三、典型例题分析	313
四、提高题	319
第三节 可降阶的高阶微分方程	322
一、内容提要与复习重点	322
二、典型例题分析	322
第四节 高阶线性微分方程	323
一、内容提要与复习重点	323
二、基本概念分析题	325
三、典型例题分析	327
四、提高题	330
参考文献	334

第一章 空间解析几何

第一节 空间曲面的轨迹与方程

一、内容提要与复习重点

1. 极坐标与参数方程

(1) 极坐标 在平面上取一固定点 O 称为极点, 自点 O 引一条固定的轴 Ox 称为极轴, 对于平面上的任一点 P , 记射线 OP 与极轴间的有向角为 θ , 点 P 到点 O 的距离为 ρ , 显然 $\rho \geq 0$. 称 ρ 为点 P 的极半径或极径, θ 为点 P 的极角.

(2) 参数方程 记 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} (a \leq t \leq b)$ 为曲线的参数方程, 消去参数 t 就得出曲线的普通方程.

2. 空间直角坐标系

过空间一点 O , 作三条互相垂直的数轴 Ox, Oy, Oz , 这三条轴分别叫做横轴、纵轴、竖轴或 x 轴、 y 轴、 z 轴. 三个坐标轴中任意两条可以确定一个平面, 这样确定的三个平面统称为坐标面.

在空间中, 点 M 唯一地确定了一个有序数组 (x, y, z) , 该组数 (x, y, z) 称为点 M 的坐标, 记为 $M(x, y, z)$.

3. 空间两点之间的距离

空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的距离公式为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

4. 几种常见曲面的方程

球面方程 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

母线平行于坐标轴的柱面方程 如母线平行 z 轴的柱面方程 $f(x, y) = 0$, 其他类同.

(1) 圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$, 准线是 xOy 面上的圆 $x^2 + y^2 = R^2$;

(2) 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 准线是 xOy 面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

(3) 双曲柱面 $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 准线是 xOy 面上的双曲线 $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

(4) 抛物柱面 $y^2 = 2px (p > 0)$, 准线是 xOy 面上的抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$.

旋转曲面

yOz 面上的曲线 $f(y, z) = 0$, 绕 z 轴旋转一周得旋转曲面的方程 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$. 同理, 曲线 $f(y, z) = 0$ 绕 y 轴旋转得到的旋转曲面方程 $f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0$.

(1) 旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$;

(2) 旋转椭球面 $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$;

(3) 单叶旋转双曲面 $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$;

(4) 双叶旋转双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$;

(5) 旋转锥面或正圆锥面 $z^2 = x^2 + y^2$.

5. 简单二次曲面(下面方程若无特别说明均视 a, b, c 为正数, p, q 同号)

(1) 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

(2) 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

(3) 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

(4) 椭圆抛物面 $z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$;

(5) 双曲抛物面(马鞍面) $z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$;

(6) 锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.

二、基本概念分析题

例1 将曲线的极坐标方程 $\rho = 2\cos\theta + 3\sin\theta$ 化为直角坐标方程.

解 $\rho^2 = 2\rho\cos\theta + 3\rho\sin\theta$, 即 $x^2 + y^2 = 2x + 3y$, 所以极坐标方程化为直角坐标方程为

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}.$$

例2 将曲线的直角坐标方程 $x=2$ 化为极坐标方程.

解 把 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$ 代入直角坐标方程 $x=2$, 得 $\rho\cos\theta = 2$, 即

$$\rho = \frac{2}{\cos\theta} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right).$$

例3 求球面方程 $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5z - 8 = 0$ 的球心和半径.

解 方程 $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5z - 8 = 0$ 经配方得

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{5}{2}z + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 4 + \left(\frac{5}{4}\right)^2,$$

即

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{89}{4^2} = \left(\frac{\sqrt{89}}{4}\right)^2,$$

则所求球心为 $\left(0, 0, \frac{5}{4}\right)$, 半径为 $\frac{\sqrt{89}}{4}$.

例 4 建立以点 $(1, 3, -2)$ 为球心, 且通过坐标原点的球面方程.

解 点 $(1, 3, -2)$ 到坐标原点 $(0, 0, 0)$ 的距离为 $\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$, 即所求球面的半径为 $\sqrt{14}$, 而球心坐标为 $(1, 3, -2)$, 则球面方程为

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 14.$$

例 5 说明下列旋转曲面是怎样形成的:

$$(1) \ x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1; \quad (2) \ (z-a)^2 = x^2 + y^2.$$

解 (1) $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ 即 $(\pm \sqrt{x^2 + z^2})^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, 因此该旋转曲面是由 yOz 面上的曲线 $z^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 绕 y 轴旋转一周所得, 或由 xOy 面上的曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 绕 y 轴旋转一周而得.

(2) $(z-a)^2 = x^2 + y^2$ 即 $(z-a)^2 = (\pm \sqrt{x^2 + y^2})^2$, 因此该旋转曲面是由 xOz 面上的曲线 $(z-a)^2 = x^2$, 即直线 $z = a + x$ 或 $z = a - x$ 绕 z 轴旋转一周所得, 或由 yOz 面上的曲线 $(z-a)^2 = y^2$, 即直线 $z = a + y$ 或 $z = a - y$ 绕 z 轴旋转一周而得.

三、典型例题分析

例 1 已知动点到点 $(2, 0, 0)$ 的距离为到点 $(-4, 0, 0)$ 的距离的一半, 求该动点的轨迹方程.

解 设动点坐标为 (x, y, z) , 由该动点到点 $(2, 0, 0)$ 的距离为到点 $(-4, 0, 0)$ 的距离的一半, 得

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2},$$

$$4(x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2) = x^2 + 8x + 16 + y^2 + z^2,$$

化简得 $x^2 - 8x + y^2 + z^2 = 0$, 即所求方程为 $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 4^2$.

例 2 指出下列方程在空间解析几何中表示什么图形:

$$(1) \ x^2 + y^2 - 2x = 0; (2) \ y^2 = 2x; (3) \ x^2 = 1; (4) \ x^2 + y^2 - 4y + z^2 + 2x = 0.$$

解 (1) 方程 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 化为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, 即母线平行于 z 轴的圆柱面;

(2) 方程 $y^2 = 2x$ 化为 $x = \frac{y^2}{2}$, 即母线平行于 z 轴的抛物柱面;

(3) 方程 $x^2 = 1$ 化为两个部分 $x = 1$ 或 $x = -1$, 即为两个平面;

(4) 方程 $x^2 + y^2 - 4y + z^2 + 2x = 0$ 经配方后得 $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = (\sqrt{5})^2$, 即以 $(-1, 2, 0)$ 为球心, $\sqrt{5}$ 为半径的球面.

例 3 求下列曲线绕指定的坐标轴旋转一周所成的旋转曲面的方程:

(1) xOy 坐标面上曲线 $x^2 + 4y^2 = 1$, 分别绕 x 轴, y 轴旋转;

(2) xOz 坐标面上曲线 $z = x^2$, 分别绕 x 轴, z 轴旋转.

解 (1) 绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面的方程为 $x^2 + 4(\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2 = 1$, 即 $x^2 + 4(y^2 + z^2) = 1$, 也即

$$x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1,$$

为椭球面.

绕 y 轴旋转一周所得旋转曲面的方程为 $(\pm\sqrt{x^2 + z^2})^2 + 4y^2 = 1$, 即 $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$, 也即

$$x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + z^2 = 1.$$

(2) 绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面的方程为 $\pm\sqrt{y^2 + z^2} = x^2$, 舍弃负的, 得方程

$$\sqrt{y^2 + z^2} = x^2 \quad \text{或} \quad y^2 + z^2 = x^4.$$

绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面的方程为 $z = (\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2$, 即 $z = x^2 + y^2$.

四、提高题

例 (2010 年考研题) 设 P 为椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点, 若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 平面垂直, 求点 P 的轨迹.

解 设 P 的坐标为 (x, y, z) , 由 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 得 S 在点 P 处的切平面的法向量为 $\mathbf{n} = (2x, 2y - z, 2z - y)$. 因为 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直, 所以有 $y = 2z$, 注意到 $P \in S$, 所以点 P 的轨迹方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1, \\ y = 2z. \end{cases}$$

第二节 空间曲线及其方程

一、内容提要与复习重点

1. 空间曲线的一般方程

设 $F(x, y, z) = 0$ 和 $G(x, y, z) = 0$ 是两个曲面的方程, 其交线 C 的方程为