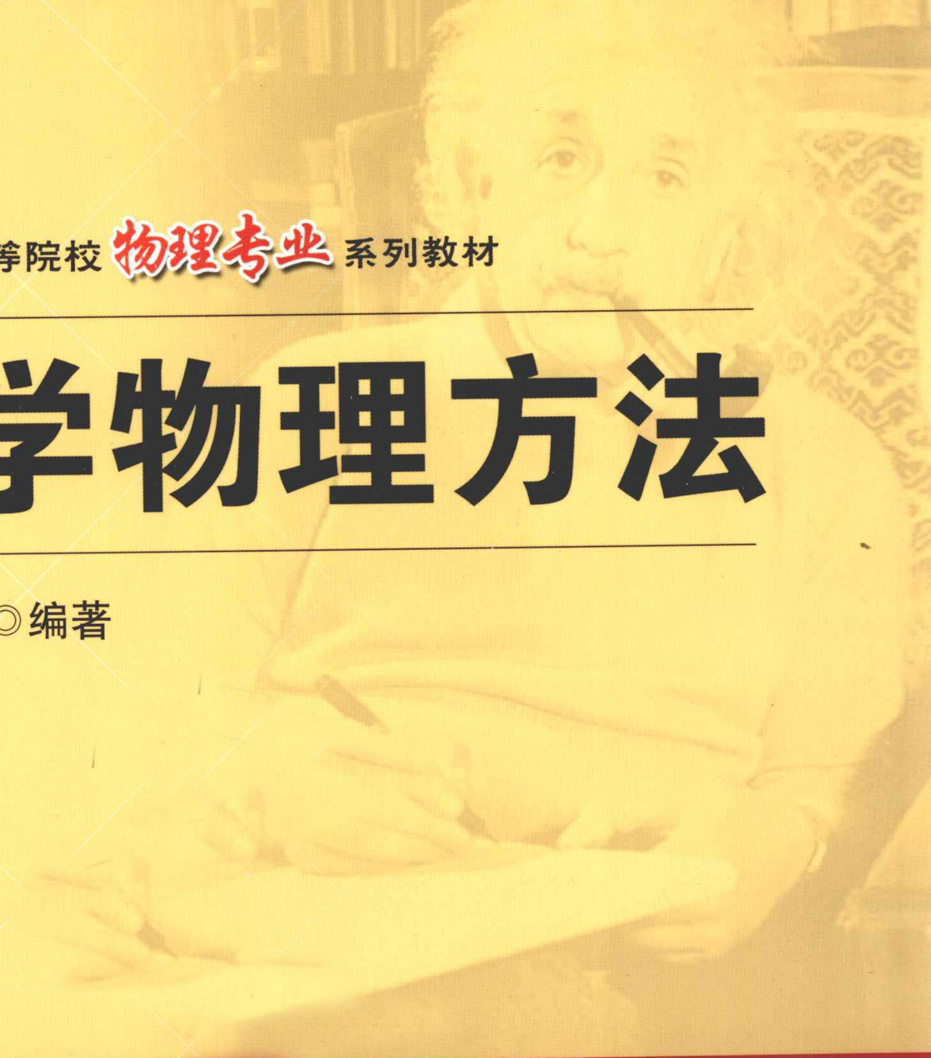

新编普通高等院校**物理专业**系列教材

数学物理方法

倪致祥◎编著

中国科学技术大学出版社

新编普通高等院校物理专业系列教材

数学物理方法

倪致祥◎编著

中国科学技术大学出版社

内容简介

本书内容主要包括函数理论、微分方程和对称性三部分.函数理论部分除介绍基本概念外,着重谈到泛函和变分法、解析函数、函数空间和积分变换等方面的内容;微分方程部分是本课程的中心内容,包括常微分方程的求解、各种各样的数学物理方程的建立过程和常用的求解方法;对称性部分包括算符理论和对称性理论两部分内容,这是现代物理学中最重要的内容之一.

本书将科学方法论与现代科学计算技术融入具体知识的讲授中,突出了探究性,加强了系统性,扩展了知识面,具有明显的教学改革特色.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/倪致祥编著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2012.6
(新编普通高等院校物理专业系列教材)
ISBN 978-7-312-02947-9

Ⅰ.数… Ⅱ.倪… Ⅲ.数学物理方法—高等学校—教材 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 020031 号

出版 中国科学技术大学出版社
地址:安徽省合肥市金寨路 96 号,邮政编码:230026
网址:http://press.ustc.edu.cn
印刷 安徽江淮印务有限责任公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×960 mm 1/16
印张 18.75
字数 346 千
版次 2012 年 6 月第 1 版
印次 2012 年 6 月第 1 次印刷
定价 33.00 元

新编普通高等院校物理专业系列教材

编　委　会

总　　序

物理学是研究物质的结构、性质、基本运动规律及其相互作用的科学.物理学拓展我们认识自然的疆界,深化我们对其他学科的理解,是科学发展和技术进步最重要的基础,并为人类文明做出了巨大贡献.物理学的进步对社会发展、人类生活的改善以及人类文明的进步有着不可估量的影响.

大学本科物理专业教育的主要目的是为社会培养训练有素的物理人才.不仅要向学生传授最基础的物理专业知识,而且要注重培养学生对现代物理概念和观念的深入理解,更要注重培养学生获取知识的能力、分析问题和解决问题的能力,掌握物理学中的科学研究方法,激发学生的求知热情、探索兴趣和创新精神,为物理专业学生的未来发展打下良好的基础.

科学在不断地创新,教育同样需要不断地创新.在科学技术迅速发展的新时代,如何进行物理专业教学的改革,以提高人才培养的质量和效率,是物理学工作者和物理教育工作者都应该关心的问题.2006 年 6 月成立的“2006～2010 年教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会物理学类专业教学指导分委员会”由来自 35 所高校的 39 名委员组成,主任委员是清华大学物理系的朱邦芬院士.根据教育部高教司《关于批准高等理工教育教学改革与实践项目立项的通知》(教高司函[2005]246 号)的文件精神,本届物理教指委在上届物理教指委(2001～2005 年)的大量工作基础上,认真学习,深入调查,充分讨论,广泛征求意见,多次反复修改,历时四年制定出《高等学校物理学本科指导性专业规范》(2010 年版)和《高等学校应用物理学本科指导性专业规范》(2010 年版),努力使这两个规范成为我国高等学校办本科物理学专业和应用物理学专业的指导性文件,成为制订培养方案和教学计划的基本依据.两个《规范》是高校办物理学专业和应用物理学专业的最低要求,低于这个要求就不能称为合格的物理学或应用物理学本科教育.鉴于各高校多层次办专业的实际情况,在两个《规范》中已留出了一定的自主设计空间,供各高校办专业时根据具体情况来选择,体现各自办学特色.鼓励各高校根据自身条件,超越《规范》要求,进一步提高教学质量.

安徽省几所大学物理院系的老师，也就是本套丛书的作者们，向来重视物理教学改革和教学研究，曾合作编写了一套适合非物理学专业学生的《大学物理学》教材，收到了良好的效果，并取得了宝贵的经验. 他们积极关注物理专业教学的发展方向，认真学习并决意按照最新的《高等学校物理学本科指导性专业规范》(2010年版)编写一套创新的教材：在《高等学校物理学本科指导性专业规范》所规定的知识结构的基础上，结合实际教学的学时要求，力求建立一个简洁的、贯通的物理教学体系，将一些基础性的、重要的物理概念讲清楚；结合最新的物理教学研究成果，努力将物理学中的重点、难点，尤其是以往教材始终未能很好地讲明白的问题，用最简洁的处理方式解释清楚；积极引入最新的教学手段，譬如将计算软件Mathematica引入到教学中，让学生学以致用，既简化了教学，同时也能激发学生的学习兴趣……

作者们这些富有创意的设想和勇于探索的精神都是值得肯定的. 作为"物理学类专业教学指导分委员会"的一员，我希望本套丛书的出版可以给物理专业的教学改革增添生气，同时也为新的《高等学校物理学本科指导性专业规范》的实施以及进一步改进提供宝贵的支持. 新教材本身是探索的结果，难免有不足之处，敬请广大物理同行、读者朋友提出批评指正的意见，相信作者们一定会欢迎并衷心感谢的.

尹　民

2012年3月于中国科学技术大学

前　　言

本书是作者二十多年来潜心研究数学物理方法课程的教学与改革的经验总结，主要特点有：

在内容上，适当降低了难度、增加了广度.具体地说，介绍了分析力学中所用的变分法、量子力学中常用的算符代数和现代物理学中的对称性方法，以及小波变换等数学工具.

在结构上，内部加强了复变函数、积分变换和数学物理方程等板块之间的联系，外部加强了与线性代数和计算方法的联系，特别是介绍了现代计算软件Mathematica在处理数学物理问题中的应用.利用 Mathematica 提供的绘图功能、解微分方程功能和特殊函数与正交多项式，提高了教学效率与学生使用计算机的能力.

在方法上，把科学方法论融入具体内容的讲解过程中，灵活地使用归纳法、演绎法和类比法等，既能简化推理过程，又能培养学生的创新精神和应用能力.

在练习上，除了常见的熟悉与理解等 A 类习题和巩固与应用等 B 类习题外，还增添了推广与深入等 C 类习题，可以为学生课后探究和撰写课程论文提供选题.

本书经过六年的时间得以完成，在此要衷心感谢安徽省教学改革示范专业、安徽省精品课程和教育部高等学校特色专业建设点等项目经费的资助，北京师范大学喀兴林教授、安徽大学易佑民教授、上海师范大学李新州教授和安徽师范大学黄时中教授等专家的鼓励和帮助，以及阜阳师范学院有关领导和部门的关心和支持，另外也要感谢中国科学技术大学出版社的精心组织和认真编辑.

由于作者的学识所限，书中难免有错误或疏漏之处，敬请读者不吝赐教.

编　者

2012 年 3 月

目　次

第 1 章　数 与 函 数

本章的目的是从新的角度简要地梳理过去所学过的数学知识，较自然地引出理论物理中常用的数学思想、方法和相关概念，为后面进一步学习奠定基础.

1.1　数 与 运 算

为了记录事物的量，人们发明了数，数是描述事物的量的基本概念. 人类对数的认识是在不断发展的，从整数到分数、从正数到负数、从有理数到无理数、从实数到复数、从 c 数到 q 数……这个发展过程从远古时代一直持续到现在，至今也没有结束.

认识发展的动力来自两个方面：生产生活的需要是外部推力，理论完善的要求是内部动力，这些推动着人们对数的认识不断深化.

1.1.1　数的扩张

1. 自然数

人类最先认识的数是自然数（当时不包括 0），自然数是从计算有限集合中元素个数的过程中逐渐抽象出来的. 自然数集合记为 $\mathbf{N}$. 两个自然数之间可以进行加法和乘法运算. 自然数的加法满足交换律 $a+b=b+a$ 与结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$，乘法也满足交换律 $a\cdot b=b\cdot a$ 与结合律 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$，这两种运算之间还满足分配律 $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$，上述五个运算律称为算术基本法则.

自然数集合对于加法和乘法运算是封闭的，即只要两个运算数都是自然数，所得到的运算结果也一定是自然数. 自然数之间还可以定义加法的逆运算——减法，乘法的逆运算——除法，不过这些逆运算不一定封闭，即运算的结果不一定属于自

然数集合.例如,$3-5\notin\mathbf{N}$.

2. 有理数

在生产与生活中,不仅需要计数,也需要度量长度、面积、重量和时间等.在选取一个适当的单位后,度量问题就变成了计数问题.然而,度量的对象是可以任意细分的,无法用自然数来自如地表示.这就产生了对自然数进行扩张的外部推力.

另一方面,自然数集合对乘法运算是封闭的,但是对于其逆运算除法来说就不封闭了.例如,在自然数范围内除法 $5\div3$ 就无法进行,或者说乘法方程 $3\times x=5$ 无解.随着认识的深入,人们逐渐意识到某些除法运算之所以没有意义,可能是自然数集合本身不够完善的缘故.将自然数集合完善化的设想,产生了对自然数进行扩张的内部动力.

按照对除法运算封闭的要求对自然数进行扩张,就是把任意两个自然数相除的结果定义为新数也吸纳到集合内,这样就得到了一个更大的数的集合——正有理数集合 $\mathbf{Q}^+$.在 $\mathbf{Q}^+$ 中对于乘法及其逆运算都是封闭的,或者说任意的乘法方程都有解.

虽然自然数集合是有理数集合的一个真子集,但是按照集合论的观点,可以认为两者所包含的元素同样多,即在正有理数与自然数之间可以建立一一对应关系.例如,我们可以用图 1.1 来证明两者之间的这种对应关系.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \cdots \\
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \\
\cdots & & & & &
\end{array}$$

图 1.1　正有理数序列

图中第 n 列的分子都是 n,第 k 行的分母都是 k.排列的方式是从左上角开始,按照斜行从上到下,自左向右.即按照如下方式排列

$$\left\{1,\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},\frac{2}{2},3,\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},4,\frac{1}{5},\frac{2}{4},\frac{3}{3},\frac{4}{2},5,\cdots\right\}$$

消去重复的元素之后,就得到了正有理数集合的一个序列

$$\{a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots\}=\left\{1,\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},3,\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},4,\frac{1}{5},5,\cdots\right\}$$

显然,这个序列的序号就给出了正有理数与自然数之间的一一对应关系.

凡是元素能够与自然数一一对应的集合称为可数集,可数集中的元素可以按其与自然数的对应关系编号,排成一个序列,正有理数集合是可数的.

类似地,正有理数集合对加法的逆运算也不封闭,即在正有理数集合范围内加法方程 $a+x=b$ 不一定有解.按照对减法运算封闭的要求对正有理数集合进行扩张,就得到了有理数集合 $\mathbf{Q}$.有理数集合也是可数的,且对于加法及其逆运算和乘法及其逆运算(除数不为 0)都是封闭的.用近世代数的术语,配备了加法和乘法,

对这些运算及其逆运算封闭并满足相应运算法则的集合称为数域.有理数是一个数域,称为有理数域.

按照测量意义,正有理数可以解释为一个可公度线段的长度.在一条直线上适当定义了原点和正向之后,可以把有理数用对应的点来表示,这样的直线称为数轴.

3. 实数

有理数集合在数轴中具有稠密性,即数轴上任意区间内都有有理数.不失一般性,设有理数 a,b 是区间两个端点,$a<b$,显然 $(a+b)/2$ 也是有理数,并且有 $a<(a+b)/2<b$.同理,在 $a,(a+b)/2$ 之间和 $(a+b)/2,b$ 之间也分别存在其他有理数.这样下去,可以推知任意非空区间内都存在无限多个有理数.那么有理数能不能充满整个数轴呢?早在两千多年以前,古希腊的 Pythagoras 学派就发现存在不可公度(即长度不能表示为有理数)的线段,例如单位正方形的对角线.这个事实表明有理数不能充满数轴,数轴上还存在许多空位.可以定义一类新的数与数轴上的空位对应起来,这种新数称为无理数.

由于度量的需要,我们常常用有理数来近似的表示一个无理数.因为有理数具有稠密性,这种近似表示可以无限的逼近无理数.换句话说,可以把无理数看成一个有理数序列的极限值,例如,无理数 $\sqrt{2}$ 对应的有理数序列为 $\{1,1.4,1.41,1.414,\cdots\}$.这种表示方法不是唯一的,有理数序列 $\{2,1.5,1.42,1.415,\cdots\}$ 的极限值也表示无理数 $\sqrt{2}$.具有极限的无穷序列称为收敛序列,法国数学家 A. L. Cauchy(1789~1857)发现收敛的序列 $\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$ 都满足条件

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-a_{n+m}|=0,\quad \forall m\in\mathbf{N} \tag{1.1.1}$$

这个条件称为 Cauchy 准则.

在一个数集中,如果所有的 Cauchy 序列(即满足上述准则的序列)都存在极限,该集合称为完备的(该收敛的都收敛了),否则就称为不完备的.不完备的数集可以完备化,即把 Cauchy 序列的极限定义为新的元素,添加到原来的集合之中.有理数组成的 Cauchy 序列在有理数集合中不一定能找到极限,因此有理数集合是不完备的.对有理数集合进行完备化后得到的集合称为实数,实数集合记为 **R**.

实数包括无理数与有理数,与数轴上的点有一一对应的关系,因此也可以把实数形象地称为(直线上的)点.由于数轴是有向的,因此实数可以按其在数轴上位置的前后规定大小,大小相同的实数具有唯一性,从这个意义上说实数是有序的.实数满足与有理数同样的运算法则,对四则运算也有封闭性,并且把有理数作为一个

子集包含在内，因此实数域是一个比有理数域更大的数域，即有理数域的扩域.

深入地研究发现无理数可以分为两类，一类可以表示为某个整数系数代数方程的根，例如$\sqrt{2}$，$3-\sqrt[5]{7}$，$1/\sqrt{3}$等，称之为代数数；另一类不能表示为某个整数系数代数方程的根，例如，π，e，$2^{\sqrt{2}}$等，称之为超越数. 德国数学家 G. Cantor(1845～1918)证明了代数数的集合是可数的，但实数集不可数，因此超越数的集合是不可数的.

4. *虚数的发现*

实数对加减乘除四则运算是封闭的，因此对乘方运算也是封闭的，然而对于乘方运算的逆运算开方却不封闭，即含有乘方的方程不一定都有解，例如 $x^2+1=0$ 就无法在实数的范围内找到解. 为了让任意的开方运算都能进行，还需要对实数进行扩充，把这些不在实数范围内的解看成一种新的数. 一开始人们没有发现这种新数的实际意义，因而把它们称为虚数. 实数和虚数合称复数，复数集合记为 **C**. 复数的一般形式为 $x+\mathrm{i}y$，其中 x,y 为实数，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$称为虚单位. 复数满足与实数同样的运算法则，对四则运算也是封闭的，因此复数域是实数域的扩域.

后来，C. F. Gauss(德国数学家，1777～1855)等发现复数可以与平面上的点一一对应，这就打开了复数实际应用的大门. 在此基础上，1799 年 Gauss 在他的博士论文中证明了代数基本定理：复系数 $n(n>0)$次方程在复数域中至少有一个根，这表明复数具有代数封闭性，即对于乘方及其逆运算也是封闭的. 可以证明，与实数集合相同，复数集合也具有完备性和不可数性.

5. *超复数的探究*

复数集合在代数运算方面具有封闭性，在序列收敛方面具有完备性，显得非常完善，那么它还能不能进一步扩充？向哪个方向扩充？是否存在比复数更大的数域——超复数？人们对此进行了积极的探索. 1835 年，W. R. Hamilton(爱尔兰数学家、物理学家，1805～1865)发现复数虽然可以表示为实数与纯虚数相加的形式，但是这种相加并不像在实数中那样具有合并的意义，只是在形式上放在一起而已，因此复数在本质上可以看成两个实数的有序组(x,y). 例如，两个复数相等的充分必要条件是它们的实部和虚部分别相等. 由此，他试图在保持原先性质的条件下把复数推广为三个甚至多个实数的有序组，从而得到一种超复数. Hamilton 对此进行了多年的探究，但始终没有成功，最后他猜想在保留复数现有运算性质的前提下进行扩充也许是不可能的. 1843 年，Hamilton 放弃了乘法交换律的要求，得到了一个由四个实数组成，可以保持其他运算法则的新数——四元数，创立了人类历史上

第一个非交换的代数. 四元数的一般形式为 $a+bi+cj+dk$(其中 a,b,c,d 为实数, i, j, k 为 3 个不同的虚单位元, 具有性质 $i^2=j^2=k^2=-1, ij=k=-ji, jk=i=-kj, ki=j=-ik$), 物理中常用的矢量代数就是在四元数的基础上发展起来的. 四元数不是复数的扩域, 也不是一个数域.

1844 年, H. G. Grassmann(德国数学家, 1809～1877)发表《线性扩张论》, 书中提出了 n 维空间的概念和被称为"扩张量"的新数. 他给出了 n 维空间中直线、平面和曲面的方程, 确定了扩张量的运算法则, 并形成了张量理论的初步基础. 然而, 扩张量也不能保持复数的所有代数运算性质, 不是超复数.

我们看到, 数系的前几次扩张都是因为原来的集合存在某种缺陷, 为了弥补这些缺陷而进行的, 这样的扩张称为自然扩张. 自然扩张后得到的新数集保持了原先所有的性质, 把原来的集合包含在内, 但是更完善. 在这个意义上, 复数集合不需要自然扩张, 也无法进行自然扩张. 后来, 数学家们证明了复数是最大的数域, 不可能在保持原来所有性质的前提下进一步扩张, 人们才停止了对超复数的探寻.

1.1.2 复数

1. 复数的表示

一般的复数可以用代数式表示为

$$z=x+\mathrm{i}y \tag{1.1.2}$$

其中 x,y 都是实数, 分别称为复数 z 的实部和虚部, 记为

$$x=\mathrm{Re}(z),\quad y=\mathrm{Im}(z) \tag{1.1.3}$$

作变换

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases} \tag{1.1.4}$$

立刻得到复数的三角形式

$$z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi) \tag{1.1.5}$$

其中

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi=\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases} \tag{1.1.6}$$

都是实数, 分别称为复数 z 的模和辐角, 记为

$$\rho=|z|,\quad \varphi=\mathrm{Arg}(z) \tag{1.1.7}$$

一个复数的辐角不是唯一的，可以取无数个不同的值，这些值之间相差 2π 的整数倍．为了明确起见，通常把在区间 $[0,2\pi)$ 或 $(-\pi,\pi]$ 之间的辐角值称为主辐角，记为 $\varphi_p=\arg(z)$．主辐角与辐角之间的关系为 $\mathrm{Arg}(z)=\arg(z)+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

2．Euler 公式

1740 年，瑞士数学家、物理学家 L. Euler(1707～1783)发现虚指数函数 $y(x)=e^{ix}+e^{-ix}$ 与三角函数 $2\cos x$ 满足同样的常微分方程 $y''(x)+y(x)=0$ 和同样的初始条件 $y(0)=2, y'(0)=0$．根据解的唯一性，必有

$$e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x \tag{1.1.8}$$

在此基础上，他得出了著名的 Euler 公式

$$e^{ix}=\cos x+\mathrm{i}\sin x \tag{1.1.9}$$

利用 Euler 公式，复数的三角形式又可以改写为指数形式

$$z=\rho\cdot e^{i\varphi} \tag{1.1.10}$$

3．复数的几何意义

在平面上建立一个直角坐标系，用横坐标表示实部，纵坐标表示虚部，就给出了复数与平面上点的一一对应关系，也可以进一步建立复数与从原点到对应点的矢量之间的一一对应关系．如图 1.2 所示．

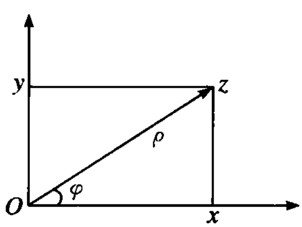

图 1.2　复数的几何表示

由图 1.2 中可以看出复数的指数形式与平面上的极坐标对应，其中模对应于矢径，辐角对应于极角．

动点成线，一个随着实变量 t 连续变化的复数 $z(t)$ 对应于复平面上的一条连续曲线，其实部 $x(t)$ 和虚部 $y(t)$ 组成了曲线的参数方程．如果 $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$ 对参数 t 可导，则对应的曲线是光滑的(有切线)；如果与参数是一一对应的，则对应的曲线没有重点，称为简单曲线．首尾相接的简单曲线称为简单闭曲线，它将复平面分为内外两个部分．直线也可以将复平面分为两个部分，有人将直线看成在无穷远处首尾相接的简单闭曲线，而将无穷远看成是一个点，称为无穷远点．

4．复数的运算

(ⅰ) 加减法

复数加减法的定义为

$$z_1\pm z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2) \tag{1.1.11}$$

两个复数相加的几何意义为矢量的合成，满足三角形法则

$$||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1|+|z_2| \tag{1.1.12}$$

(ii) 乘除法

两个复数相乘的结果为

$$z_1 \cdot z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)\cdot(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2) \tag{1.1.13}$$

对应的指数形式为

$$z_1z_2=\rho_1\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\rho_2\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}=\rho_1\rho_2\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1+\mathrm{i}\varphi_2} \tag{1.1.14}$$

这表明两个复数相乘，它们的模相乘，辐角相加，即

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2 \tag{1.1.15}$$

复数乘法的几何意义为矢量的缩放和旋转，$|z_1|z_2=\rho_1\rho_2\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$为对矢量$z_2$长度的缩放，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}z_2=\rho_2\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_2+\varphi_1)}$为对矢量$z_2$的旋转. 复数除法是乘法的逆运算，两个复数相除，它们的模相除，辐角相减.

(iii) 幂和开方

在乘法的基础上，容易得到复数的幂与开方为

$$z^n=(\rho\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^n=\rho^n\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi},\quad z^{1/n}=(\rho\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^{1/n}=\sqrt[n]{\rho}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/n} \tag{1.1.16}$$

由于辐角的多值性，复数$\rho\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$的$n$次方根有$n$个，分别是

$$\sqrt[n]{\rho}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_\mathrm{p}+2k\pi)/n},\quad k=0,1,\cdots,n-1 \tag{1.1.17}$$

(iv) 复共轭

复数还可以定义共轭运算

$$z^*=\bar{z}=\overline{x+\mathrm{i}y}=x-\mathrm{i}y \tag{1.1.18}$$

或等价指数形式

$$z^*=\bar{z}=\overline{\rho\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}=\rho\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \tag{1.1.19}$$

容易看出

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\bar{z}=\mathrm{Re}z,\quad \mathrm{Im}\bar{z}=-\mathrm{Im}z;\\ |\bar{z}|=|z|,\quad \mathrm{Arg}\bar{z}=-\mathrm{Arg}z,\quad \bar{z}z=|z|^2\end{gathered} \tag{1.1.20}$$

复共轭是复数特有的运算，它的几何意义为矢量关于实轴的镜像. 通过复共轭运算得到的新复数称为原复数的共轭复数，两个复数之间的共轭关系是相互的，即$(z^*)^*=z$.

例 1.1.1 将曲线$x=x(t),y=y(t),t\in[0,1]$逆时针转动60度，再向上平移5个单位，用复数表示所得结果.

解 在复平面上，曲线为$z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t),t\in[0,1]$，逆时针转动60度相

当于乘复数 $e^{i\pi/3}$，向上平移 5 个单位相当于加复数 5i，于是得到

$$z_1(t)=e^{i\pi/3}z(t)+5i=\frac{1}{2}[x(t)-\sqrt{3}y(t)]+i\,\frac{1}{2}[\sqrt{3}x(t)+y(t)+5]$$

例 1.1.2　证明 de Moiver 公式：$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi,\ n\in\mathbf{Z}$.

解　在(1.1.15)式中取 $\rho=1$，得到 $(e^{i\varphi})^n=e^{in\varphi}$，再利用 Euler 公式即得证.

1.1.3　运算的分析

1. 运算的本质

我们学过的自然数、实数等都不是单纯的集合，而是附加了四则运算的数集. 四则运算是双目的，即两个运算数通过运算操作得到一个新的数. 然而，有些运算也可以是单目的，即一个数通过运算得到一个新的数，例如，整数的平方运算、实数的开方运算、复数的求复共轭运算等.

从更一般的角度看，运算也可以认为是一种特殊的映射或者函数，其中运算数为自变量，所得到结果为函数值，而单目运算对应于一元函数，双目运算对应于二元函数. 例如，$f(x)=\sqrt{x}$，$g(x,y)=x\cdot y$.

运算的封闭性意味着相应函数的值域应该包含在定义域之内，与可交换的双目运算对应的函数必须是对称的，即 $g(x,y)=g(y,x)$，与可结合的双目运算对应的函数满足关系 $g(g(x,y),z)=g(x,g(y,z))$.

反过来说，也可以利用函数来定义新的运算，例如，狭义相对论中的速度合成法则就可以定义为一种特殊的双目运算——Einstein 加法，其表达式为

$$x\oplus y=\frac{x+y}{1+xy/c^2},\quad |x|,|y|\leqslant c \tag{1.1.21}$$

其中，c 为光速. 容易验证，Einstein 加法是封闭的，并且满足交换律和结合律.

2. 运算的分解

减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算，因此四则运算在本质上是两种代数运算，即加法和乘法. 有理数、实数和复数对加法是可逆的和封闭的，除了零之外对乘法也是可逆的和封闭的，而且这两种运算之间是相容的(满足分配律)，因此成为数域.

我们也可以定义一种更加简单和基本的代数系统，即只附加一种双目运算 · 的集合 K. 如果运算是封闭的，即 $\forall a,b\in K, a\cdot b\in K$，就把这种代数系统称为广群；如果广群中的运算还满足结合律，即对任意三个元素 a、b 和 c，有 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$，则称之为半群；如果半群中有一个唯一的单位元 e，对任意元素 a