奥林匹克竞赛题解精编

数学

南京大学出版社
学林出版社

数学奥林匹克竞赛题解精编

单 墫　胡炳生　胡礼祥　吴 俊　张振环　编

南京大学出版社
学林出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克竞赛题解精编 / 单墫等编. —南京：南京大学出版社，1999.10

ISBN 7 - 305 - 03282 - 4

Ⅰ.数... Ⅱ.单... Ⅲ.数学课 - 高中 - 解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 51145 号

书　　名	数学奥林匹克竞赛题解精编
编　　者	单墫　胡炳生　胡礼祥　吴　俊　张振环
出版发行	南京大学出版社　学林出版社
社　　址	南京汉口路 22 号　邮编 210093
	上海文庙路 120 号　邮编 200010
电　　话	025 - 3596923　传真 025 - 3303347
	021 - 63777108　传真 021 - 63768540
网　　址	WWW.njupress.com
电子函件	nupress1 @ public1.ptt.js.cn
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	南京印刷制版厂
开　　本	850×1168　1/32　印张 21.5　字数 915 千
版　　次	2001 年 7 月第 1 版第 3 次印刷
ISBN	7-305-03282-4/O·219
定　　价	29.00 元

序

中学学科(数、理、化)竞赛题典,九十年代问世后,颇受欢迎,很快销售一空.为了适应各方面的需要,我们编成这套最新的竞赛题典,既搜集了近五年来的赛题,又从原来的题典中精选出一部分内容.这样,主要的竞赛(如国际竞赛)均保持完整,篇幅又不过于庞大,可以称为最新最精的题典.

信息科学(计算机)竞赛,五年前刚刚起步,现在材料已经很多.这次也编为一册.随着计算机的广泛使用,信息科学竞赛将会越来越引起人们的关注.

对于学科竞赛,有各种各样的看法,总的说来,与体育竞赛类似,正面效应远远超过负面影响.所以近年来,各学科的竞赛,不仅没有停滞的趋势,反而蓬勃发展,日益扩大.

"天下大事,必作于细。"我们希望,这套新题典的出版,对于中学学科竞赛的发展,对于科学知识的普及,对于国民素质的提高,能够起着一点积极有益的作用.

单　墫

《学科奥林匹克竞赛题解精编》

编　委　会

主　编　单　墫

副主编　胡炳生（常务）　杜先智

王金理　江　涛

编　委　（按姓氏笔画为序）

王金理　巴健全　刘　峰　许有霞

杜先智　吴　俊　吴朝晖　张振环

张御冬　宛炳生　单　墫　胡礼祥

胡炳生　黄晓华　魏先文

数学卷编写组

单　墫　胡炳生　胡礼祥

吴　俊　张振环

前　言

本书是在原《数学奥林匹克题典》基础上新编的增订、精选本．删除了原书中 1950 年以前的陈题，精简了重复、次要和过于繁杂的题型，增补了 1992 年～1997 年间国内外重要竞赛的新题．时间跨度约为 50 年，收题 1451 个．与原书相比，篇幅减小一半，新题占五分之二，是一本内容更新，更切于实用，尤其是适合中学生阅读的数学竞赛辅导书．

在编写体例上，与原书保持一致．每题由题目、题说、解答三部分组成．在题说中说明该题的来源和出处．所给解答，尽可能选择最好的一种，有时还给出其他优秀的“别解”．对某些题解，还适当给以评注，指出其可注意之处．

在题目编排上，按数学内容分为五部分：

A——整数；**B**——代数；**C**——几何；**D**——三角；**E**——组合数学．

每部分下分若干子类，子类目录在原书基础上有所调整，使其更符合题解实际内容，方便读者查用．

参加本书新题编写工作的有单墫、胡炳生、张振环、胡礼祥、吴俊．单墫对题解作了全面审订、修改，有的还另给新解．胡炳生对原书题解进行了精选和校订，整理、编制了全部图稿，并对全书进行分类和总纂．

由于数学竞赛题遍及世界各国，题解精微奥妙，囿于作者能力和水平，有的好题可能有遗漏，有的题解也未必精到，敬请广大读者批评指正．

编者

目　　录

序
编写说明
A　整数 …… (1)
　A1　特殊的自然数(A1－001～028) …… (1)
　A2　求解问题(A2－001～045) …… (9)
　A3　数字问题(A3－001～024) …… (27)
　A4　整除(A4－001～034) …… (36)
　A5　综合题(A5－001～039) …… (49)
B　代数 …… (68)
　B1　集合、数、式(B1－001～084) …… (68)
　　集合(B1－001～018) …… (68)
　　数(有理数、实数、复数)(B1－019～050) …… (76)
　　多项式(B1－051～074) …… (89)
　　恒等式(B1－075～084) …… (99)
　B2　方程(B2－001～078) …… (103)
　　一元整式方程(B2－001～032) …… (103)
　　多元整式方程(组)(B2－033～047) …… (115)
　　非整式方程(组)(B2－048～061) …… (124)
　　不定方程(组)(B2－062～078) …… (130)
　B3　不等式(B3－001～087) …… (135)
　　解不等式(B3－001～018) …… (135)
　　证明不等式(B3－019～087) …… (142)
　B4　二项式定理、数学归纳法、概率(B4－001～030) …… (172)
　B5　函数(B5－001～096) …… (184)
　　定义、性质(B5－001～020) …… (184)
　　求值(B5－021～037) …… (194)
　　求表达式(B5－038～064) …… (203)

极值 (B5-065～091) ……………………………… (216)
极限 (B5-092～096) ……………………………… (232)
B6 数列(B6-001～082) ……………………………… (235)
等差、等比数列(B6-001～008) ……………………………… (235)
求和(B6-009～022) ……………………………… (238)
递归数列(B6-023～051) ……………………………… (244)
杂题(B6-052～082) ……………………………… (260)
C 几何 ……………………………… (275)
C1 平面几何证明(C1-001～193) ……………………………… (275)
线段相等(C1-001～022) ……………………………… (275)
角相等(C1-023～040) ……………………………… (284)
几何恒等式(C1-041～053) ……………………………… (292)
垂直与平行(C1-054～068) ……………………………… (298)
三角形(C1-069～082) ……………………………… (305)
多边形(C1-083～091) ……………………………… (311)
圆(C1-092～110) ……………………………… (315)
面积问题(C1-111～121) ……………………………… (323)
几何不等式(C1-122～166) ……………………………… (329)
共点线(圆)、共线(圆)点(C1-167～193) ……………………………… (353)
C2 平面几何求解(C2-001～094) ……………………………… (366)
求角度(C2-001～007) ……………………………… (366)
求面积(C2-008～019) ……………………………… (368)
求距离及其他(C2-020～045) ……………………………… (373)
几何极值(C2-046～066) ……………………………… (388)
轨迹(C2-067～078) ……………………………… (398)
作图(C2-079～094) ……………………………… (405)
C3 立体几何证明(C3-001～036) ……………………………… (412)
C4 立体几何求解(C4-001～050) ……………………………… (427)
计算(C4-001～027) ……………………………… (427)
不等式和极值(C4-028～041) ……………………………… (439)
轨迹和作图(C4-042～050) ……………………………… (447)
C5 解析几何(C5-001～046) ……………………………… (450)
D 三角 ……………………………… (473)
D1 求值和作图(D1-001～017) ……………………………… (473)
D2 三角恒等式(D2-001～019) ……………………………… (480)
D3 三角不等式(D3-001～018) ……………………………… (488)

D4 解三角形(D4－001～011) …………………………… (495)
D5 三角方程(D5－001～009) …………………………… (500)
E 组合数学 …………………………………………… (504)
E1 存在性问题(E1－001～098) ……………………… (504)
关于数和集合(E1－001～027) ……………………… (504)
关于图形(E1－028～054) …………………………… (516)
关于人、物及其他(E1－055～098) ………………… (526)
E2 计数和离散极值(E2－001～087) ……………… (544)
计数(E2－001～054) ………………………………… (544)
离散极值(E2－055～087) …………………………… (565)
E3 组合几何(E3－001～068) ……………………… (580)
平面问题(E3－001～044) …………………………… (580)
立体问题(E3－045～053) …………………………… (608)
覆盖与剖分(E3－054～068) ………………………… (611)
E4 变换和操作(E4－001～052) …………………… (617)
E5 对策和逻辑(E5－001～075) …………………… (642)

A 整　　数

A1　特殊的自然数

A1 - 001　求一个四位数，它的前两位数字及后两位数字分别相同，而该数本身等于一个整数的平方．

【题说】　1956年～1957年波兰数学奥林匹克一试题1.

【解】　设所求的四位数为 $x=\overline{aabb}$　则

$$\begin{aligned} x &= 1000a+100a+10b+b \\ &= 11(100a+b) \end{aligned}$$

其中 $0<a\leqslant 9, 0\leqslant b\leqslant 9$. 可见平方数 x 被 11 整除，从而 x 被 11^2 整除．因此，数 $100a+b=99a+(a+b)$ 能被 11 整除，于是 $a+b$ 能被 11 整除．但 $0<a+b\leqslant 18$，以 $a+b=11$. 于是 $x=11^2(9a+1)$，由此可知 $9a+1$ 是某个自然数的平方．对 $a=1,2,\cdots,9$ 逐一检验，易知仅 $a=7$ 时，$9a+1$ 为平方数，故所求的四位数是 $7744=88^2$.

A1 - 002　假设 n 是自然数，d 是 $2n^2$ 的正约数．证明：n^2+d 不是完全平方．

【题说】　1953年匈牙利数学奥林匹克题2.

【证】　设 $2n^2=kd$，k 是正整数，如果 n^2+d 是整数 x 的平方，那么

$$k^2x^2=k^2(n^2+d)=n^2(k^2+2k)$$

但这是不可能的，因为 k^2x^2 与 n^2 都是完全平方，而由 $k^2<k^2+2k<(k+1)^2$ 得出 k^2+2k 不是平方数．

A1 - 003　试证四个连续自然数的乘积加上 1 的算术平方根仍为自然数．

【题说】　1962年上海市赛高三决赛题1.

【证】　四个连续自然数的乘积可以表示成

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) &= (n^2+3n)(n^2+3n+2) \\ &= (n^2+3n+1)^2-1 \end{aligned}$$

因此，四个连续自然数乘积加上1，是一完全平方数，故知本题结论成立．

A1 - 004　已知各项均为正整数的算术级数，其中一项是完全平方数，证明：此级数一定含有无穷多个完全平方数．

【题说】　1963年全俄数学奥林匹克十年级题2. 算术级数有无穷多项．

【证】　设此算术级数公差是 d，且其中一项 $a=m^2(m\in\mathbf{N})$. 于是

$$a+(2km+dk^2)d=(m+kd)^2$$

对于任何 $k\in\mathrm{N}$，都是该算术级数中的项，且又是完全平方数．

A1-005　求一个最大的完全平方数，在划掉它的最后两位数后，仍得到一个完全平方数（假定划掉的两个数字中的一个非零）.

【题说】 1964 年全俄数学奥林匹克十一年级题 1.

【解】 设 n^2 满足条件，令 $n^2=100a^2+b$，其中 $0<b<100$. 于是 $n>10a$，即 $n\geqslant 10a+1$. 因此

$$b=n^2-100a^2\geqslant 20a+1$$

由此得　$20a+1<100$，所以 $a\leqslant 4$.

经验算，仅当 $a=4$ 时，$n=41$ 满足条件. 若 $n>41$ 则 $n^2-40^2\geqslant 42^2-40^2>100$. 因此，满足本题条件的最大的完全平方数为 $41^2=1681$.

A1-006　求所有的素数 p，使 $4p^2+1$ 和 $6p^2+1$ 也是素数.

【题说】 1964 年～1965 年波兰数学奥林匹克二试题 1.

【解】 当 $p\equiv\pm 1 \pmod 5$ 时，$5\mid 4p^2+1$. 当 $p\equiv\pm 2 \pmod 5$ 时，$5\mid 6p^2+1$. 所以本题只有一个解 $p=5$.

A1-007　证明存在无限多个自然数 a 有下列性质：对任何自然数 n，$z=n^4+a$ 都不是素数.

【题说】 第十一届（1969 年）国际数学奥林匹克题 1，本题由原民主德国提供.

【证】 对任意整数 $m>1$ 及自然数 n，有

$$\begin{aligned} n^4+4m^4 &= (n^2+2m^2)^2-4m^2n^2 \\ &= (n^2+2mn+2m^2)(n^2-2mn+2m^2) \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} n^2+2mn+2m^2 &> n^2-2mn+2m^2 \\ &= (n-m)^2+m^2\geqslant m^2>1 \end{aligned}$$

故 n^4+4m^4 不是素数. 取 $a=4\cdot 2^4, 4\cdot 3^4, \cdots$ 就得到无限多个符合要求的 a.

A1-008　将某个 17 位数的数字的顺序颠倒，再将得到的数与原来的数相加. 证明：得到的和中至少有一个数字是偶数.

【题说】 第四届（1970 年）全苏数学奥林匹克八年级题 4.

【证】 假设和的数字都是奇数. 在加法算式

$$\begin{array}{rr} & ab\cdots cd \\ +) & dc\cdots ba \\ \hline \end{array}$$

中，末一列数字的和 $d+a$ 为奇数，从而第一列也是如此，因此第二列数字的和 $b+c\leqslant 9$. 于是将已知数的前两位数字 a、b 与末两位数字 c、d 去掉，所得的 13 位数仍具有性质：将它的数字颠倒，得到的数与它相加，和的数字都是奇数. 照此进行，每次去掉首末各两位数字. 最后得到一位数，它与自身相加显然是偶数. 矛盾！

因此，和的数字中必有偶数.

A1-009　证明：如果 p 和 $p+2$ 都是大于 3 的素数，那么 6 是 $p+1$ 的因数.

【题说】 第五届（1973 年）加拿大数学奥林匹克题 3.

【证】 因为 p 是奇数，所以 2 是 $p+1$ 的因数．

因为 p、$p+1$、$p+2$ 除以 3 余数不同，p、$p+2$ 都不被 3 整除，所以 $p+1$ 被 3 整除．

于是 6 是 $p+1$ 的因数．

A1-010 证明：三个不同素数的立方根不可能是一个等差数列中的三项（不一定是连续的）.

【题说】 美国第二届（1973 年）数学奥林匹克题 5.

【证】 设 p、q、r 是不同素数．假如有自然数 l、m、n 和实数 a、d，使

$$\sqrt[3]{p}=a+ld,\ \sqrt[3]{q}=a+md,\ \sqrt[3]{r}=a+nd$$

消去 a，d，得

$$(m-n)\sqrt[3]{p}+(n-l)\sqrt[3]{q}+(l-m)\sqrt[3]{r}=0$$

化简得 $$(m-n)^3p=(l-n)^3q+(m-l)^3r+3(l-n)(m-l)\times(m-n)\sqrt[3]{pqr}$$

等式左边是有理数，右边是无理数，矛盾．因此原命题成立．

A1-011 设 n 为大于 2 的已知整数，并设 V_n 为整数 $1+kn$ 的集合，$k=1,2,\cdots$. 数 $m\in V_n$ 称为在 V_n 中不可分解，如果不存在数 $p,q\in V_n$ 使得 $pq=m$. 证明：存在一个数 $r\in V_n$ 可用多于一种方法表达成 V_n 中不可分解的元素的乘积．

【题说】 第十九届（1977 年）国际数学奥林匹克题 3. 本题由荷兰提供．

【证】 设 $a=n-1$，$b=2n-1$，则 a^2、b^2、a^2b^2 都属于 V_n. 因为 $a^2<(n+1)^2$，所以 a^2 在 V_n 中不可分解．

因为 $\frac{ab}{a^2}=\frac{2n-1}{n-1}=2+\frac{1}{n-1}$ 在 $n>2$ 时不是整数，所以在 ab 的分解式中不会出现 a^2.

$r=a^2b^2$ 有两种不同的分解方式：$r=a^2\cdot b^2=a^2\cdots$（直至 b^2 分成不可分解的元素之积）与 $r=ab\cdot ab=\cdots$（直至 ab 分成不可分解的元素之积），前者有因数 a^2，后者没有．

A1-012 证明在无限整数序列

$$10001,\ 100010001,\ 1000100010001,\cdots$$

中没有素数．

注意第一数（一万零一）后每一整数是由前一整数的数字连接 0001 而成．

【题说】 1979 年英国数学奥林匹克题 6.

【证】 序列 1，10001，100010001，…，可写成

$$1,\ 1+10^4,\ 1+10^4+10^8,\cdots$$

其通项为 $a_n=\frac{10^{4n}-1}{10^4-1}$，$n=1,2,3,\cdots$我们要证明对于 $n\geqslant2$，a_n 是一个合数．

由于 $$a_{2k}=\frac{10^{8k}-1}{10^4-1}=\frac{10^{8k}-1}{10^8-1}\cdot\frac{10^8-1}{10^4-1},\ k=2,3,\cdots$$

$$a_{2k+1}=\frac{10^{4(2k+1)}-1}{10^4-1}=\frac{10^{2(2k+1)}-1}{10^2-1}\cdot\frac{10^{2(2k+1)}+1}{10^2+1},\ k=1,2,\cdots$$

即对 $n>2$,a_n 均可分解为两个大于 1 的整数的乘积,而 $a_2=10001=137\cdot73$. 故对一切 $n\geqslant2$,a_n 均为合数.

A1-013 如果一个自然数是素数,并且任意地交换它的数字,所得的数仍然是素数,那么这样的数叫绝对素数. 求证:绝对素数的不同数字不能多于 3 个.

【题说】 第十八届(1984 年)全苏数学奥林匹克八年级题 8.

【证】 若不同数字多于 3 个,则这些数字只能是 1、3、7、9. 不难验证 1379、3179、9137、7913、1397、3197、7139 除以 7,余数分别为 0、1、2、3、4、5、6. 因此对任意自然数 M,$10^4\times M$ 与上述 7 个四位数分别相加,所得的和中至少有一个被 7 整除,从而含数字 1、3、7、9 的数不是绝对素数.

A1-014 设正整数 d 不等于 2、5、13. 证明在集合 $\{2,5,13,d\}$ 中可以找到两个不同元素 a、b,使得 $ab-1$ 不是完全平方数.

【题说】 第二十七届(1986 年)国际数学奥林匹克题 1. 本题由原联邦德国提供.

【证】 证明 $2d-1$、$5d-1$、$13d-1$ 这三个数中至少有一个不是完全平方数即可. 用反证法,设

$$2d-1=x^2 \tag{1}$$

$$5d-1=y^2 \tag{2}$$

$$13d-1=z^2 \tag{3}$$

其中 x、y、z 是正整数.

由(1)式知,x 是奇数,不妨设 $x=2n-1$. 代入有 $2d-1=(2n-1)^2$ 即

$$d=2n^2-2n+1 \tag{4}$$

(4) 式说明 d 也是奇数.

于是由(2)、(3)知 y、z 是偶数,设 $y=2p$,$z=2q$,代入(2)、(3)相减后除以 4 有

$$2d=q^2-p^2=(q+p)(q-p)$$

因 $2d$ 是偶数,即 q^2-p^2 是偶数,所以 p、q 同为偶数或同为奇数,从而 $q+p$ 和 $q-p$ 都是偶数,即 $2d$ 是 4 的倍数,因此 d 是偶数. 这与 d 是奇数相矛盾,故命题正确.

A1-015 求出五个不同的正整数,使得它们两两互素,而任意 $n(n\leqslant5)$ 个数的和为合数.

【题说】 第二十一届(1987 年)全苏数学奥林匹克十年级题 1.

【解】 由 n 个数

$$a_i=i\cdot n!+1,\ i=1,2,\cdots,n$$

组成的集合满足要求.

因为其中任意 k 个数之和为

$$m\cdot n!+k\quad(m\in\mathbf{N},2\leqslant k\leqslant n)$$

由于 $n!=1\cdot2\cdot\cdots\cdot n$ 是 k 的倍数,所以 $m\cdot n!+k$ 是 k 的倍数,因而为合数.

对任意两个数 a_i 与 $a_j(i>j)$，如果它们有公共的质因数 p，则 p 也是 $a_i-a_j=(i-j)n!$ 的质因数，因为 $0<i-j<n$，所以 p 也是 $n!$ 的质因数．但 a_i 与 $n!$ 互质，所以 a_i 与 a_j 不可能有公共质因数 p，即 a_i、$a_j(i\neq j)$ 互素．令 $n=5$，便得满足条件的一组数：121，241，361，481，601.

A1-016　已知 $n\geqslant 2$，求证：如果 k^2+k+n 对于整数 $k\left(0\leqslant k\leqslant\sqrt{\frac{n}{3}}\right)$ 是质数，则 k^2+k+n 对于所有整数 $k(0\leqslant k\leqslant n-2)$ 都是素数．

【题说】　第二十八届（1987 年）国际数学奥林匹克题 6. 本题由原苏联提供．

【证】　设 m 是使 k^2+k+n 为合数的最小正整数．若 $\sqrt{\frac{n}{3}}<m\leqslant n-2$，令 p 是 m^2+m+n 的最小素因子，则 $p\leqslant\sqrt{m^2+m+n}$.

(1) 若 $m\geqslant p$，则 $p\mid(m-p)^2+(m-p)+n$.

又 $(m-p)^2+(m-p)+n\geqslant n>p$，这与 m 是使 k^2+k+n 为合数的最小正整数矛盾．

(2) 若 $m\leqslant p-1$，则 $(p-1-m)^2+(p-1-m)+n=(p-1-m)(p-m)+n$ 被 p 整除，且

$$(p-1-m)^2+(p-1-m)+n\geqslant n>p$$

因为 $(p-1-m)^2+(p-1-m)+n$ 为合数，所以

$$p-1-m\geqslant m,\ p\geqslant 2m+1$$

由

$$2m+1\leqslant p\leqslant\sqrt{m^2+m+n}$$

得

$$4m^2+4m+1\leqslant m^2+m+n$$

即

$$3m^2+3m+1-n\leqslant 0$$

由此得

$$m\leqslant\frac{-3+\sqrt{12n-3}}{6}<\sqrt{\frac{n}{3}}$$

与已知条件矛盾．所以，对所有的 $\sqrt{\frac{n}{3}}<k\leqslant n-2$，$k^2+k+n$ 为素数．

A1-017　正整数 a 与 b 使得 $ab+1$ 整除 a^2+b^2. 求证：$(a^2+b^2)/(ab+1)$ 是某个正整数的平方．

【题说】　第二十九届（1988 年）国际数学奥林匹克题 6. 本题由原联邦德国提供．

【证】　令 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}=k$. 若 k 不是完全平方，考虑不定方程

$$a^2-kab+b^2=k \tag{1}$$

显然(1)的解 (a,b) 满足 $ab\geqslant 0$（否则 $ab\leqslant -1$，$a^2+b^2=k(ab+1)\leqslant 0$）.

又由于 k 不是完全平方，故 $ab>0$.

设 (a,b) 是(1)的解中适合 $a>0$（从而 $b>0$）并且使 $a+b$ 最小的那个解．不妨设 $a\geqslant b$. 固定 k 与 b，把(1)看成 a 的二次方程，它有一根为 a. 设另一根为 a'，则由韦达定理

$$\begin{cases} a+a'=kb & (2) \\ aa'=b^2-k & (3) \end{cases}$$

由(2)，a'为整数，因而(a',b)也是(1)的解．由于$b>0$，所以$a'>0$.
但由(3)

$$a'=\frac{b^2-k}{a}\leqslant\frac{b^2-1}{a}\leqslant\frac{a^2-1}{a}<a$$

从而$a'+b<a+b$，这与$a+b$的最小性矛盾，所以k必为完全平方．

A1-018 求证：对任何正整数n，存在n个相继的正整数，它们都不是素数的整数幂．

【题说】 第三十届(1989年)国际数学奥林匹克题5．本题由瑞典提供．

【证】 设$a=(n+1)!$，则$a^2+k(2\leqslant k\leqslant n+1)$，被$k$整除而不被$k^2$整除(因为$a^2$被$k^2$整除而$k$不被$k^2$整除)．如果$a^2+k$是质数的整数幂$p^l$，则$k=p^j$($l$、$j$都是正整数)，但$a^2$被$p^{2j}$整除因而被$p^{j+1}$整除，所以$a^2+k$被$p^j$整除而不被$p^{j+1}$整除，于是$a^2+k=p^j=k$，矛盾．因此

$$a^2+k(2\leqslant k\leqslant n+1)$$

这n个连续正整数都不是素数的整数幂．

A1-019 n为怎样的自然数时，数

$$3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n$$

是合数？

【题说】 第二十四届(1990年)全苏数学奥林匹克十一年级题5

【解】 $$3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n=(3^n-2^n)(3^{n+1}+2^{n+1})$$

当$n>1$时，$3^n-2^n>1$，$3^{n+1}+2^{n+1}>1$，所以原数是合数．当$n=1$时，原数是素数13.

A1-020 设n是大于6的整数，且a_1、a_2、…、a_k是所有小于n且与n互素的自然数，如果

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_k-a_{k-1}>0$$

求证：n或是素数或是2的某个正整数次方．

【题说】 第三十二届(1991年)国际数学奥林匹克题2．本题由罗马尼亚提供．

【证】 显然$a_1=1$.

由$(n-1,n)=1$，得$a_k=n-1$.

令$d=a_2-a_1>0$.

当$a_2=2$时，$d=1$，从而$k=n-1$，n与所有小于n的自然数互素．由此可知n是素数．

当$a_2=3$时，$d=2$，从而n与所有小于n的奇数互素．故n是2的某个正整数次方．

设$a_2>3$. a_2是不能整除n的最小素数，所以$2|n$，$3|n$. 由于$n-1=a_k=1+$

$(k-1)d$，所以 $3\nmid d$. 又 $1+d=a_2$，于是 $3\nmid 1+d$. 由此可知 $3\mid 1+2d$. 若 $1+2d<n$，则 $a_3=1+2d$，这时 $3\mid(a_3,n)$. 矛盾．若 $1+2d\geqslant n$，则小于 n 且与 n 互素自然数的个数为 2.

设 $n=2m(>6)$. 若 m 为偶数，则 $m+1$ 与 n 互质，若 m 为奇数，则 $m+2$ 与 m 互质．即除去 $n-1$ 与 1 外，还有小于 n 且与 n 互质的数．矛盾．

综上所述，可知 n 或是素数或是 2 的某个正整数次方．

A1-021　试确定具有下述性质的最大正整数 A：把从 1001 至 2000 所有正整数任作一个排列，都可从其中找出连续的 10 项，使这 10 项之和大于或等于 A.

【题说】 第一届(1992 年)中国台北数学奥林匹克题 6.

【解】 设任一排列，总和都是 $1001+1002+\cdots+2000=1500500$，将它分为 100 段，每段 10 项，至少有一段的和 $\geqslant 15005$，所以

$$A\geqslant 15005$$

另一方面，将 1001～2000 排列如下：

2000	1001	1900	1101	1800	1201	1700	1301	1600	1401
1999	1002	1899	1102	1799	1202	1699	1302	1599	1402
	…	…	…	…	…	…			
1901	1100	1801	1200	1701	1300	1601	1400	1501	1300

并记上述排列为

$$a_1,a_2,\cdots,a_{2000}$$

(表中第 i 行第 j 列的数是这个数列的第 $10(i-1)+j$ 项，$1\leqslant i\leqslant 20,1\leqslant j\leqslant 10$)

令 $$S_i=a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+9}(i=1,2,\cdots,1901)$$

则 $S_1=15005,S_2=15004$. 易知若 i 为奇数，则 $S_i=15005$；若 i 为偶数，则 $S_i=15004$.

综上所述 $A=15005$.

A1-022　相继 10 个整数的平方和能否成为完全平方数？

【题说】 1992 年友谊杯国际数学竞赛七年级题 2.

【解】
$$\begin{aligned}&(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(n+10)^2\\&=10n^2+110n+385=5(2n^2+22n+77)\end{aligned}$$

不难验证 $n\equiv 0,1,-1,2,-2(\bmod 5)$时，均有

$$2n^2+22n+77\equiv 2(n^2+n+1)\not\equiv 0(\bmod 5)$$

所以 $(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(n+10)^2$ 不是平方数．

A1-023　是否存在完全平方数，其数字和为 1993？

【题说】 第三届(1993 年)澳门数学奥林匹克第二轮题 2.

【解】 存在，事实上，

$$\overbrace{99\cdots9}^{n}97^2=(10^n-3)^2=10^{2n}-6\times 10^n+9=\overbrace{99\cdots9}^{n}4\,\overbrace{00\cdots0}^{n}9$$

取 $n=221$ 即可．

A1-024　能够表示成连续 9 个自然数之和，连续 10 个自然数之和，连续 11 个自然数之和的最小自然数是多少？

【题说】　第十一届（1993 年）美国数学邀请赛题 6.

【解】　答 495.

连续 9 个整数的和是第 5 个数的 9 倍；连续 10 个整数的和是第 5 项与第 6 项之和的 5 倍；连续 11 个整数的和是第 6 项的 11 倍，所以满足题目要求的自然数必能被 9、5、11 整除，这数至少是 495.

又　$495=51+52+\cdots+59=45+46+\cdots+54=40+41+\cdots+50$

A1-025　如果自然数 n 使得 $2n+1$ 和 $3n+1$ 都恰好是平方数，试问 $5n+3$ 能否是一个素数？

【题说】　第十九届（1993 年）全俄数学奥林匹克九年级一试题 1.

【解】　如果 $2n+1=k^2$，$3n+1=m^2$，则 $5n+3=4(2n+1)-(3n+1)=4k^2-m^2=(2k+m)(2k-m)$.

因为 $5n+3>(3n+1)+2=m^2+2>2m+1$，所以 $2k-m\neq 1$（否则 $5n+3=2k+m=2m+1$）. 从而 $5n+3=(2k+m)(2k-m)$ 是合数．

A1-026　设 n 是正整数．证明：$2n+1$ 和 $3n+1$ 都是平方数的充要条件是 $n+1$ 为两个相邻的平方数之和，并且为一平方数与相邻平方数 2 倍之和．

【题说】　1994 年澳大利亚数学奥林匹克二试题 2.

【证】　若 $2n+1$ 及 $3n+1$ 是平方数，因为 $2\nmid(2n+1)$，$3\nmid(3n+1)$，可设 $2n+1=(2k+1)^2$，$3n+1=(3t\pm1)^2$，由此可得

$$n+1=k^2+(k+1)^2,\ n+1=(t\pm1)^2+2t^2$$

反之，若 $n+1=k^2+(k+1)^2=(t\pm1)^2+2t^2$，则

$$2n+1=(2k+1)^2,\ 3n+1=(3t\pm1)^2$$

从而命题得证．

A1-027　设 a、b、c、d 为自然数，并且 $ab=cd$. 试问 $a+b+c+d$ 能否为素数．

【题说】　第五十八届（1995 年）莫斯科数学奥林匹克九年级题 10.

【解】　由题意知

$$a+b+c+d=a+b+c+\frac{ab}{c}=\frac{(a+c)(b+c)}{c}$$

为整数，从而存在正整数 c_1 与 c_2，使 $c=c_1c_2$，且 $\frac{a+c}{c_1}$ 与 $\frac{b+c}{c_2}$ 均为正整数，将它们分别记作 k 与 l. 由

$$a+c>c\geqslant c_1,\ b+c>c\geqslant c_2$$

所以，$k>1$ 且 $l>1$.

从而，$a+b+c+d=kl$ 为合数．

A1-028　设 $k_1<k_2<k_3<\cdots$ 是正整数，且没有两个是相邻的，又对于 $m=1,2,3,\cdots,S_m=k_1+k_2+\cdots+k_m$. 求证：对每一个正整数 n，区间 $[S_n,S_{n+1})$ 中至少