

高等学校教学用书

边界元法及其在 岩体力学中的应用

郭兰波 编著

中国矿业大学出版社

高等学校教学用书

边界元法及其在 岩体力学中的应用

郭 兰 波 编著

中国矿业大学出版社

(苏)新登字第010号

内 容 提 要

本书系统地阐述了直接边界元法与间接边界元法的基本原理、方法及实际应用、算例和电算程序。介绍了近年来边界元法的新发展,以及在岩体力学中的应用,其中包括线弹性分析、材料非线性、非均质、节理效应、岩土-结构物相互作用等方面的内容。

本书内容详尽,深入浅出,自成系统,可作为采矿类和地下工程专业研究生的教材,亦可供岩土工程学与固体力学专业的师生、工程技术人员与科学研究工作者参考。

责任编辑 吴秀文

责任校对 冀锦蓉

高等学校教学用书

边界元法及其在

岩体力学中的应用

郭兰波 编著

中国矿业大学出版社 出版发行

新华书店经销 中国矿业大学印刷厂印刷

开本850×1168毫米1/32 印张7 字数175千字

1991年12月第1版 1991年12月第1次印刷

印份: 1—1000册

ISBN 7-81021-052-1

N·1

定价1.85元

前 言

最近二十多年来,随着电子计算机的广泛使用,数值应力分析法得到迅速发展,已经用来代替实验应力分析法完成大部分结构计算工作。

工程岩石力学问题,大多数情况下难以解析地求出特解,现场监测与室内模拟试验又非常麻烦,不可能广泛实行。因此,岩石力学工作者非常重视发展数值应力分析法。目前应用比较广泛的主要是有限元法与边界元法两种。这两种方法都在求解岩体力学问题中得到了进一步发展,具有相当广泛的通用性。由于两者各有特色,各具本身的优缺点,使用者最好对这两种方法都有初步了解,以便根据实际问题选用不同的方法,收到扬长避短、事半功倍的效果。

有限元法是一种把问题的支配方程(governing equation)在全定义域离散化的求解方法,其最突出的优点是能灵活地处理材料非均质及非线性性状。自六十年代以来,这种方法已广为传播,出版了大量专著与教材。但是国内外介绍边界元法的书籍至今寥寥无几。然而边界元法在岩体力学中的应用,前景相当广阔。因为它在以下两方面对有限元法作了根本的改进:其一,边界元法把一个均质区域看作一个大单元,只将它的边界离散化,区域内部不划分单元,场变量处处连续。其二,对于无限区域,场变量自动满足无穷远边界条件;对于半无限区域,场变量也自动满足无穷远边界条件及自然表面状态。由于这两个特点,许多岩体力学问题用边界元法求解比用有限元法求解要简便的多,而且计算精度与效率更高。

本书目的在于对边界元法的原理及其在岩体力学中的应用作初步介绍。书中首先对有关的力学知识作一简略回顾,然后从力学概念出发,介绍边界元法基本理论。内容安排,重点放在均质线弹性问题的边界元法,详细介绍了公式体系与计算程序,以便使读者对边界元法基础有较为深入的了解。

求解岩体力学问题,必然要涉及岩体的非均质、弹塑性、流变、节理效应、支护作用等复杂因素。关于这些问题,边界元法已经提供了一些求解技术,并且正在迅速发展,是当前进行开发的一个活跃领域。本书对这些问题的解法分别作了介绍,同时把它与有限元法的求解技术加以比较,指出其异同及优缺点。书末附有有关的参考文献目录。关心边界元法进一步发展的读者,或许能从中得到一些启发。

本书是以笔者编写的同名讲义为基础修改而成。由于笔者水平有限,书中错误之处诚恐难免,敬希读者批评指正。

山东矿业学院冯豫教授对本书提出了宝贵意见。淮南矿业学院朱效嘉教授校核书稿并提供了许多改进意见,笔者谨在此一并表示衷心感谢。

编 者

1986年元月于淮南矿业学院

目 录

第一章 力学基础知识	(1)
第一节 应力及平衡方程	(1)
第二节 应变及几何方程	(6)
第三节 坐标变换、主应力及应力偏量	(4)
第四节 广义虎克定律	(11)
第五节 平面问题	(15)
第六节 纳维尔方程及求解方法	(18)
第七节 基本积分关系式	(22)
第八节 基本解与边界积分	(35)
第九节 例题	(44)
第二章 边界元法基础	(49)
第一节 概述	(49)
第二节 间接边界元法	(52)
第三节 直接边界元法	(69)
第四节 计算机程序	(104)
第五节 三维弹性问题	(131)
第三章 岩石力学问题的边界元分析法	(145)
第一节 开挖问题的弹性分析	(145)
第二节 弹-塑性分析	(149)
第三节 流变分析	(156)
第四节 裂隙岩体中的开挖问题	(174)
第五节 材料非均质问题	(189)
第六节 锚杆-围岩相互作用问题	(195)
参考文献	(208)

第一章 力学基础知识

在固体力学问题中,有荷载、应力、应变及位移四个基本量值。这些基本量值之间存在一定的关系:荷载与应力的关系由平衡条件决定,应力与应变的关系由本构方程决定,而应变与位移的关系则由几何方程决定。此外,在物体的表面上,荷载或者位移通常是已知的,称为边界条件。应力分析的基本内容,就是根据以上关系去求出满足边界条件的未知量(应力与位移)。

弹性体在微小变形情况下,其基本方程是线性的,在分析上较为方便。非弹性材料的本构方程不是线性的,但是可以将它分段线性化,然后反复应用小变形弹性体的分析方法,求解非线性问题。在各种岩体力学问题中,经常先假定岩体为弹性体而求其近似解。当近似解对工程目的来说精度不够时,就对岩体的非线性性状做一定的试验研究,并在分析中加以考虑。本章概述弹性力学的基本知识,引出有关应力与位移的基本积分方程。在第三章中再把它推广到弹塑性问题与流变问题。边界元法乃是用来求解这些积分方程的一种数值方法,故本章也是边界元法的理论基础。

第一节 应力及平衡方程

作用于物体一点内力的集度称为应力,其量纲为[力]·[长度]⁻²。一点的应力状态用应力张量(tensor)来描述。在三维问题中,它由9个应力分量组成,即 $\sigma_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ 。9个应力分量按一定顺序排列成 3×3 的矩阵,形式如下:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

在本书中,我们同时运用矩阵表示法与指标表示法。黑体 σ_{ij} 表示应力张量,即上述方阵。而 σ_{ij} 表示应力分量, i 与 j 轮换取 1, 2, 3, 就表示 9 个应力分量 $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \dots$ 。

在直角坐标系中,各应力分量的作用面及方向如图 1-1, a 所

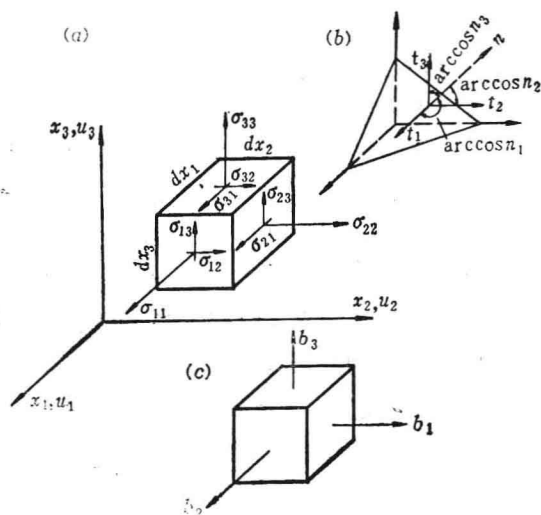


图 1-1 应力、位移及体力的张量表记法

示。也就是说,应力分量的第一个下标表示应力作用面的法线方向,第二个下标表示应力的方向。我们约定,当两个下标所指示的方向都与坐标轴同向(或都与坐标轴反向)时,该应力之值为正,否则为负。故图示各应力分量均为正值。 $i=j$ 时, σ_{ij} 为法向应力;否则 σ_{ij} 为剪应力。

根据单元体 $dx_1 dx_2 dx_3$ 的力矩平衡条件可以推知:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i \neq j) \quad (1-2)$$

故应力张量是二阶对称张量,其 9 个应力分量中只有 6 个是独立的。取列阵为:

$$\sigma_i = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}^T \quad (1-3)$$

也能代表一点的应力状态,称为应力列阵。

根据单元体在三个坐标轴方向力的平衡条件,可得:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1-4)$$

此式称为平衡方程,是三个联立微分方程。其中 b_i 是体力分量,量纲为[力]·[长度]⁻³。关于第一项 $\sigma_{ij,j}$,我们使用了指标记法,它有两个规则:

第一个是求和规则,当表达式的某一项出现重复指标时,称此指标为哑标(dummy index),它表示该项对哑标定义集合的求和,也就是

$$\sigma_{ij,j} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij,j} = \sigma_{i1,1} + \sigma_{i2,2} + \sigma_{i3,3}$$

第二个是求偏导数规则,若场变量的下标中有逗号“,”,则表示该变量对逗号后面各下标所代表的坐标求偏导数。例如:

$$\sigma_{i1,1} = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1}, \quad u_{i,jk} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \text{ 等}$$

按照这两个规则,式(1-4)可以展开成为:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 = 0$$

为了节省篇幅,我们以后将广泛采用指标记法来写表达式及方程组,一般不再写出其展开式。

若已知一点的应力张量 σ_{ij} , 则可以求出包括该点的任一微面上的应力, 以 $\mathbf{n}_j$ 表示单位方向矢量, 即:

$$\mathbf{n}_j = \{n_1, n_2, n_3\}^T \quad (1-5)$$

式中 n_j 是矢量相对于坐标轴 x_j 的方向余弦, 定义为

$$n_1 = \cos(n, x_1), n_2 = \cos(n, x_2), n_3 = \cos(n, x_3)$$

设图 1-1, b 中斜截面的外法线方向矢为 $\mathbf{n}_j$, 斜面上的应力为

$$\mathbf{t}_j = (t_1, t_2, t_3)^T$$

$\mathbf{t}_j$ 称为表面应力矢量(vector)或表面力, t_1, t_2, t_3 是 $\mathbf{t}_j$ 的坐标分量, 其量纲与应力相同。研究四面体的力平衡条件, 可得:

$$t_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3$$

$$t_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3$$

$$t_3 = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3$$

简写成

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

也可以用矩阵形式表达为:

$$\mathbf{t}_i = \boldsymbol{\sigma}_{ij}\mathbf{n}_j \quad (1-6)$$

第二节 应变及几何方程

连续体任一点的变形状态用应变张量来描述。应变张量与应力张量相对应, 也由 9 个分量组成, 记为:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

各分量 ε_{ij} , 当 $i = j$ 时为法向应变, 当 $i \neq j$ 时为剪应变。法向应变大于零表示相对伸长, 小于零表示相对缩短。剪应变大于零表示

两矢量夹角缩小,小于零表示两矢量夹角增大。

剪应变满足互等关系 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, 故一点的应变状态可以用 ε_{11} 、 ε_{22} 、 ε_{33} 、 ε_{12} 、 ε_{13} 、 ε_{23} 等 6 个分量来定义, 在矩阵运算中, 一点的应变状态用应变列阵表示, 其形式为:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}\}^T \quad (1-8)$$

今后我们将只讨论线性微小变形。这种变形的特点是: 连续体内任一微分直线段变形后仍然是直线; 直角微分单元体 $dx_1 dx_2 dx_3$ 变形后成为斜平行六面体, 且在其内部变形是均匀的。线性微小变形具有可叠加性, 并且与变形的先后次序无关。基于以上特点, 研究微分单元体 $dx_1 dx_2 dx_3$ 变形前后的几何关系, 可以导出应变-位移关系式:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1-9)$$

这一组关系式称为几何方程, 其中, u_i 是位移分量, $u_{i,j}$ 是 u_i 对 x_j 的偏导数。

微分单元体在变形之后, 体积也发生变化, 因此引入体积应变 θ 。设单元体原来的体积为 V , 变形后的体积为 $V + dV$, 则体积应变定义为:

$$\theta = \frac{dV}{V} \quad (1-10)$$

根据几何关系得知, 单元体原来体积 $V = dx_1 dx_2 dx_3$ 。变形之后, 斜平行六面体的体积为:

$$V + dV = V \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \quad (1-11)$$

将上式展开,并略去偏导数二次以上的项,可得:

$$V + dV = V(1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

因此

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii} \quad (1-12)$$

当 $\theta = 0$ 时,这就表示材料是不可压缩的。不可压缩的条件是

$$\varepsilon_{ii} = 0 \quad (1-13)$$

理想流体(例如水)是不可压缩的。岩体在进入塑性状态后,常伴随有剪张现象,即 $\varepsilon_{ii} > 0$ 。体积应变对岩体的塑性变形规律有明显的影响。但是对这种影响目前研究得还不够透彻,工程上一般假定岩体在塑性状态下是不可压缩的,以便作近似的塑性分析。

第三节 坐标变换、主应力及应力偏量

坐标系平移对矢量与张量都没有影响,因此我们只考虑坐标系旋转。设 (x_1, x_2, x_3) 与 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 分别为两个直角坐标系,并设 ξ 系对 x 系的旋转变换矩阵为:

$$\beta_{ij} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

式中 第 i 行三个元素 $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \beta_{i3}$ 是 ξ_i 轴在空间 (x_1, x_2, x_3) 的方向余弦,故有:

$$\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2 + \beta_{13}^2 = 1$$

$$\beta_{21}^2 + \beta_{22}^2 + \beta_{23}^2 = 1$$

$$\beta_{31}^2 + \beta_{32}^2 + \beta_{33}^2 = 1$$

另外,三根 ξ 轴在 (x_1, x_2, x_3) 空间两两相互垂直,因而又有三个关系式,即:

$$\beta_{11}\beta_{21} + \beta_{12}\beta_{22} + \beta_{13}\beta_{23} = 0$$

$$\beta_{11}\beta_{31} + \beta_{12}\beta_{32} + \beta_{13}\beta_{33} = 0$$

$$\beta_{21}\beta_{31} + \beta_{22}\beta_{32} + \beta_{23}\beta_{33} = 0$$

上述六个方程式可以用指标规则表示成一个表达式,即:

$$\beta_{ij}\beta_{kj} = \begin{cases} 1 & (\text{当 } i=k) \\ 0 & (\text{当 } i \neq k) \end{cases} \quad (1-15)$$

利用上式可以进而证明:

$$\beta_{ij}\beta_{ij}^T = I \quad (1-16)$$

式中 β_{ij}^T 是 β_{ij} 的转置矩阵, I 是单位矩阵。这就表明, β_{ij} 有逆矩阵, 并且

$$\beta_{ij}^{-1} = \beta_{ij}^T \quad (1-17)$$

现在我们来考察坐标系旋转时, 矢量(如力及位移)如何变化。

图 1-2 表示 ξ 坐标系中一个矢量 $\vec{OP}$, 它可以分解为三个坐

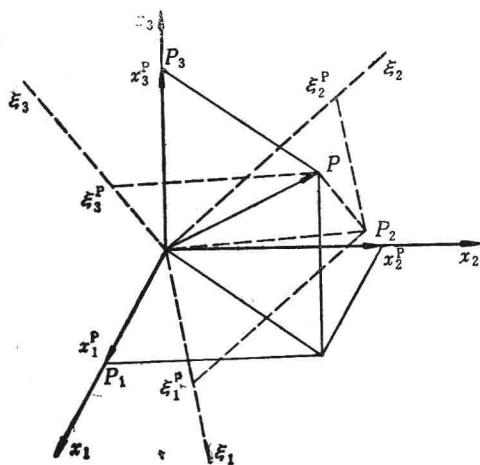


图 1-2 矢量的坐标变换

标分量 $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ 。设 P 点的坐标为 (x_1^P, x_2^P, x_3^P) , 则该矢量也可以表为:

$$x_i^P = \{x_1^P, x_2^P, x_3^P\}^T \quad (1-18)$$

当坐标系绕原点旋转至新的位置 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 时, P 点的坐标为 $(\xi_1^P, \xi_2^P, \xi_3^P)$, 故矢量 $\vec{OP}$ 在新坐标系中可表为:

$$\xi_i^P = \{\xi_1^P, \xi_2^P, \xi_3^P\}^T \quad (1-19)$$

由此可见, 矢量的转轴变换等同于矢量端点坐标的转轴变换, 故

$$\xi_i^P = \beta_{ij} x_j^P \quad (1-20)$$

为了说明几何意义, 将上式展开如下:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1^P \\ \xi_2^P \\ \xi_3^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1^P \\ x_2^P \\ x_3^P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1^P \beta_{11} + x_2^P \beta_{12} + x_3^P \beta_{13} \\ x_1^P \beta_{21} + x_2^P \beta_{22} + x_3^P \beta_{23} \\ x_1^P \beta_{31} + x_2^P \beta_{32} + x_3^P \beta_{33} \end{Bmatrix}$$

其中: 第 i 式 ($i=1, 2, 3$) 表明局部坐标 ξ_i^P 是矢量 $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$ 在 ξ_i 轴上的投影之和。

坐标系旋转时, 应力张量的变化可以根据式(1-6)来考察。现在我们以 t_{i1} 代替 t_i , 表示斜面上的应力, 以 β_{1j} 代替 n_j , 表示斜截面的外法线方向余弦。因而式(1-6)可以改写成:

$$t_{i1} = \sigma_{ij} \beta_{1j}^T \quad (1-21)$$

这里 t_{i1} 是 x 坐标系中的一个矢量。变换到 ξ 坐标系中, 此矢量成为 σ'_{i1} 。由式(1-20)与式(1-21)可得:

$$\sigma'_{i1} = \beta_{ij} t_{i1} = \beta_{ij} \sigma_{ij} \beta_{1j}^T \quad (1-22)$$

考虑三个斜截面, 使其外法线分别与 ξ 坐标系的三个坐标轴重合。第一个斜截面上的应力由式(1-22)给出。其他两个斜截面上的应力可以类似地写为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_{i2} &= \beta_{ij} \sigma_{ij} \beta_{2j}^T \\ \sigma'_{i3} &= \beta_{ij} \sigma_{ij} \beta_{3j}^T \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

将式(1-23)合并写成:

$$\sigma'_{ij} = \beta_{ik} \sigma_{kl} \beta_{lj}^T \quad (1-24)$$

式中 σ'_{ij} 构成 ξ 坐标系的应力张量。故此式表示将 x 坐标系应

力张量变换为 ξ 坐标系应力张量。

上述讨论同样适用于应变张量。仿照式(1-24)可以写出:

$$\varepsilon'_{ij} = \beta_{i,} \varepsilon_{ij} \beta_{j,}^T \quad (1-25)$$

这里, ε'_{ij} 是 ξ 坐标系的应变张量。

坐标系旋转时, 应力张量的各分量都发生变化。可以找到这样一个坐标系, 在这个坐标系内, 剪应力消失, 而法向应力达到极值。这种状态下的法向应力称为主应力。主应力作用面称为主平面。主应力的方向称为主方向。以 σ 表示主应力, n_1, n_2, n_3 表示主应力在 x 坐标系中的方向余弦。将主应力矢量分解为三个坐标分量, 记为 $t_i (i=1, 2, 3)$, 则有:

$$t_i = \sigma n_i \quad i=1, 2, 3 \quad (1-26)$$

因为主平面是 x 坐标系中的斜截面, 并且其外法线与主应力方向相同, 故 t_i 也应满足式(1-6)。将式(1-26)代入式(1-6), 得:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma)n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 &= 0 \\ \sigma_{21}n_1 + (\sigma_{22} - \sigma)n_2 + \sigma_{23}n_3 &= 0 \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + (\sigma_{33} - \sigma)n_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-27)$$

此方程组有解的必要条件是:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (1-28)$$

将行列式展开得:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (1-29)$$

其中

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii}$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}^2) \quad \left. \begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{3}(3I_1I_2 - I_1^3 + \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}) \end{aligned} \right\}$$

(1-30)

方程式(1-29)有三个实根。亦即主应力有三个,按其大小依次记为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 。故此方程式可以写成:

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0$$

展开得:

$$\sigma^3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\sigma^2 + (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)\sigma - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0$$

对照式(1-29),得到 I_i 与 σ_i 的关系,即:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (1-31)$$

在应力分析过程中,一点的应力张量随坐标变换而变化,但主应力只有一种状态,也就是说,方程式(1-29)的解是唯一的。由此知系数 I_1, I_2, I_3 不随坐标变换而变化。故称他们为应力不变量。

第一应力不变量 I_1 与式(1-12)中体积应变相对应。为了对固体的体积变形与形状变形的特性分别进行研究,需要引入应力球张量(spherical tensor)及应力偏张量(deviatoric tensor)概念。应力球张量定义为:

$$\sigma_m = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (1-32)$$

式中

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \quad (1-33)$$

是平均法向应力,它也是一个应力不变量。应力球张量相当于静水应力状态。

应力偏张量定义为应力张量与应力球张量之差,即:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (1-34)$$

在坐标系旋转时, S_{ij} 的每个分量都发生变化。当 $\sigma_{ij} = 0$ ($i \neq j$) 时, 也就是 $S_{ij} = 0$ ($i \neq j$)。在这种状态下, 法向应力偏量达到极值, 称为主应力偏量, 记为 S 。它是如下三次方程的解

$$S^3 - J_2 S - J_3 = 0 \quad (1-35)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2] \\ &\quad + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \\ J_3 &= \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} \end{aligned} \right\} \quad (1-36)$$

方程式(1-35)有三个实根, 记为 S_1, S_2, S_3 , 依次叫做最大主应力偏量, 中间主应力偏量, 最小主应力偏量。主应力偏量也只有一组, 故式(1-35)中的系数 J_2 与 J_3 必定与坐标系无关, 称它们为应力偏量不变量。

应力不变量与应力偏量不变量在塑性理论中非常有用。因为塑性判据必须与坐标系无关, 故一般利用应力不变量或应力偏量不变量来描述塑性判据。

与应力相对应地有主应变、应变球张量、应变偏张量等定义, 有关的公式与上述应力状态的公式系列完全相似, 故不再赘述。

第四节 广义虎克定律

固体的应力状态与应变状态之间存在着一定的关系。这种关