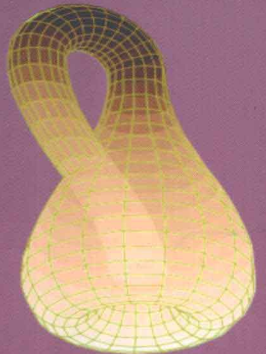
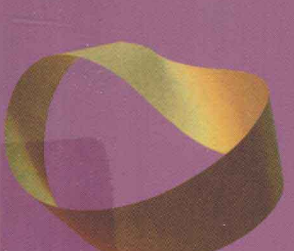
自主创新
方法先行

高等数学

（下册）

主编　张学山
主审　段承后





高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

自主创新
方法先行

高等数学

（下册）

主编　张学山
主审　段承后

GAODENG
SHUXUE

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是科技部创新方法工作专项项目——“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”（项目编号：2009IM010400）子课题“科学思维、科学方法在高等数学课程中的应用与实践”的研究成果。

本书在内容的确定和表述上，充分考虑了学生的学习能力、动力等实际状况，通过说理和问题驱动，增强了课程内容的可读性；密切联系实际，加强了对学生数学应用能力的培养；适当地融入了有关数学文化的内容。

本书分为上、下两册，下册包括空间解析几何与向量代数，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数等。本书可作为一般本科院校理工类各专业的高等数学课程教材，也可作为其他读者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册 / 张学山主编. -- 北京 : 高等教育出版社，2012.1

ISBN 978-7-04-033802-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第255911号

策划编辑 王 强　责任编辑 徐 可　封面设计 于 涛　版式设计 范晓红
插图绘制 黄建英　责任校对 王 雨　责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京铭成印刷有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 22
字 数 410千字
购书热线 010－58581118
咨询电话 400－810－0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 2012年1月第1版
印 次 2012年1月第1次印刷
定 价 29.90元

物 料 号 33802－00

高 等 数 学

（下册）

主　编：张学山

编　委：李　瑞　彭利平　张　颖　方　涛

江开忠　李　路　赵德钧　洪银萍

沈亦一　郑中团　吴中成　胡远波

主　审：段承后

目　　录

第五篇　空间解析几何

第六篇　多元函数微分学

第七篇 多元函数积分学

第八篇　无穷级数

第五篇　空间解析几何

本课程第二学期的主要内容是多元函数微积分，学习这些内容需要空间解析几何和向量代数作为基本的工具. 本篇将在空间直角坐标系的框架内，建立起向量、点、直线、平面、曲线、曲面的概念，给出它们的图像和坐标表示，并借助于代数的手段处理各种几何问题.

向量(vector)又称为矢量，起源于对力和速度问题的研究. 古希腊的亚里士多德(公元前 384 年—前 322 年)已经知道力可以表示为向量，两个力的合成可以运用平行四边形法则得到. 1637 年，法国数学家笛卡儿(R. Descartes,1596—1650)在他的著作中引进了坐标轴，将“数”与“形”统一起来，并引入了变量的思想，由此开创了用代数方法研究几何问题的新时代.

用代数方法研究几何问题，这是解析几何的基本思想.

坐标法是解析几何的基本方法. 为了用代数方法研究几何问题，首先要建立起几何中的最基本元素“点”与代数中的最基本元素“数”之间的联系，坐标系为我们架起了两者之间的桥梁. 有了坐标系，给点赋予坐标，就可以将直线上的点与单个实数一一对应，将平面上的点与两个实数的数组(x,y)一一对应. 不难想到，还可以将现实空间中的点与三个实数的数组(x,y,z)一一对应.

我们知道，平面上的曲线可以看做质点在某种约束条件下的运动轨迹，这种约束条件反映在坐标 x，y 上，就是 x，y 要满足某个方程 $F(x,y)=0$. 反过来，给定一个方程 $F(x,y)=0$，方程的每一组解 x，y 都对应平面上某一点，这种点形成一条平面曲线. 这样，以坐标为基础，就可以把平面曲线与方程对应起来. 借助于这种对应关系，通过解方程组，得到两曲线的交点；利用导数求得曲线的切线；利用积分求得曲线的弧长. 反过来，几何直观又可以为我们理解代数的、微积分的概念和问题提供很好的思路与帮助. 显然，如果将平面解析几何的方法扩展到空间，无疑将为我们研究或解决与空间图形相关的几何问题带来极大的方便.

向量、向量代数、向量分析的理论活跃在数学的各个分支，同时也是物理学、力学以及其他科学技术领域中不可缺少的工具. 本篇将介绍向量及其代数运算的概念和算法.

第七章　空间解析几何与向量代数

空间解析几何是平面解析几何的延续和发展，在处理与空间几何图形有关的问题时，空间解析几何的方法常常被用到. 例如，如果要表示一条空间曲线的切线，如同平面的情形，只要求出它的切线方程即可，但前提是要知道这条曲线的代数表示式. 又比如，要想求出由几张曲面所围成的立体的体积，首先要求出这些曲面的代数表示式. 怎样才能得到空间曲线和曲面的代数表示式? 答案是，利用空间解析几何！一般地，曲线或曲面可以看做动点在某些条件的约束下所形成的. 因此，通过引进空间直角坐标系，将空间点与三元数组 (x,y,z) 一一对应，然后针对约束条件建立起空间图形上点的坐标 (x,y,z) 所应该满足的代数方程，从而将这些图形与代数方程对应起来. 这样就可以借助于代数的方法、或者微积分的方法来处理几何问题. 反过来，有一些代数的、或者微积分的问题，可以结合它的几何背景找到简捷的解决办法.

向量代数包括向量的线性运算，向量的数量积、向量积以及混合积.

本章主要内容：向量及其线性运算，空间直角坐标系及向量的坐标，数量积、向量积以及混合积，曲面及其方程，空间曲线及其方程，平面及其方程，空间直线及其方程.

第一节　向量及其线性运算

我们将要看到，向量可以用有向线段来表示，从这个意义上来讲，向量是空间的一个图形. 本节将要借助于这样的图形，定义向量的加法运算和向量与数的“数乘”运算，它们统称为向量的线性运算.

本节主要内容：向量的概念，向量的线性运算.

一、向量的概念

客观世界中有很多量，一些如时间、密度、温度、距离等等的量，在规定的单位下，只涉及数值的大小，称为**数量(或标量)**；还有一类量，如力、速度、位移、电场强度等等，它们不仅有大小，而且有方向，这种**既有大小又有方向的量**称为**向量(或矢量)**.

一般地，用粗体字母或上方加箭头的字母来记向量，如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{E}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{F}$、$\vec{v}$、$\vec{s}$、$\vec{E}$ 等等. 通常，用粗体字母表示向量主要出现在出版物中，

手写粗体字母往往很麻烦，所以手写时采用加箭头的办法. 如图 7－1 所示，几何上，常用一个带有方向的线段，**即用有向线段来表示向量**. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的指向表示向量的方向，以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$.

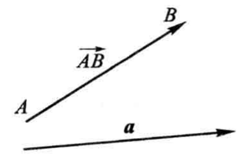


图 7－1 向量的几何表示

向量的大小称为**向量的模**，向量 $\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}$的模分别记作 $|\boldsymbol{a}|$，$|\overrightarrow{AB}|$. 模等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于 0 的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点和终点重合，它的方向不确定，可看作是任意的.

需要指出的是，由向量的定义，一个向量由它的模和方向完全确定，与它的起点和终点的位置无关，因此我们只考虑向量的大小和方向，这样的向量称为**自由向量**. 如果没有特别说明，今后所讨论的向量都是自由向量. 在这个前提下，如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，方向相同，也就是说，不论它们原先的位置在哪里，只要经过平行移动后这两个向量能完全重合，我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

由于自由向量可以自由平移，因此规定，对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，平移 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$，使它们的起点重合，则**两个向量所在的射线之间不超过 π 的夹角 θ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**(图 7－2)，记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$或$(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$，即$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

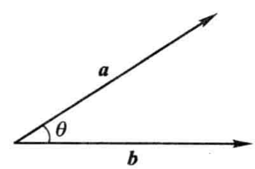


图 7－2 两向量的夹角

当$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向；当$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向.

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向或反向，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 如果$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$，则称 **$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直**，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

由于零向量的方向是任意的，所以可以认为**零向量与任何向量都平行**，当然也可以认为**零向量与任何向量都垂直**.

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点应在一条直线上，因此两向量平行，又称**两向量共线**.

类似还可引入向量共面的概念. 设有 $k(k\geqslant3)$个向量，如果将它们的起点移至同一点时，它们的终点和公共起点都在同一个平面上，则称这 **k 个向量共面**.

二、向量的线性运算

如果两个人共同推一个箱子，两人所用的力的大小不一样，推力的方向也

不相同，那么，箱子将怎样移动？物理实验表明，箱子移动的快慢和方向取决于这两人的力向量的和向量，也就是合力，它是由已知的两个力通过“加法”运算所得到的.

1. 向量的加法运算

设有一个质点沿直线从点 A 移动到点 B，再从点 B 移动到点 C，那么质点的总位移相当于从点 A 移动到点 C. 如图 7-3 所示，如果从起点 A 到终点 B 作向量$\overrightarrow{AB}$，再从起点 B 到终点 C 作向量$\overrightarrow{BC}$，则质点的总位移$\overrightarrow{AC}$就是上述两次位移的合成. 以下给出向量加法的定义.

定义 1. 设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC(图 7-3)，则称向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

以上作出两向量之和的方法称为**向量加法的三角形法则**.

在中学物理课中，已经学习过两个力的合力、两个速度的合速度的平行四边形法则. 在此基础上，以下定义给出的两向量相加的规则称为**向量加法的平行四边形法则**.

定义 2. 设有两个不平行的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A 作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB、AD 为邻边作一平行四边形 $ABCD$，连接对角线 AC(图 7-4)，则称向量$\overrightarrow{AC}$为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

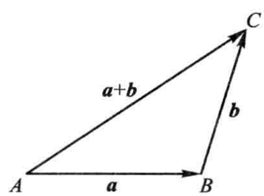


图 7-3　向量加法的三角形法则

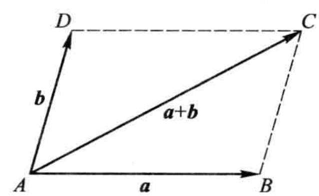


图 7-4　向量加法的平行四边形法则

上述关于两个向量的和向量的两种定义显然是等价的.

向量的加法符合下列运算规律：

(1) 交换律　　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律　　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由向量加法的定义，交换律是显然成立的. 以下验证结合律. 如图 7-5 所示，先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，再将其与 $\boldsymbol{c}$ 相加，即得和$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$；如果以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加，则得到相同的结果，所以向量的加法符合结合律.

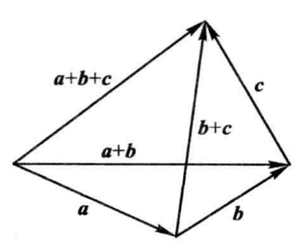


图 7-5　向量加法的结合律

由于向量的加法符合交换律和结合律，所以

n 个向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

按向量加法的三角形法则，可求得这 n 个向量的和. 如图 7－6 所示，设 $n=5$，相继作向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_5$，并使前一向量的终点作为下一向量的起点，再以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点作一个向量 $\boldsymbol{s}$，则

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5.$$

给定向量 $\boldsymbol{a}$，称与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$（图 7－7）. 在此基础上，给出两个向量的差的定义.

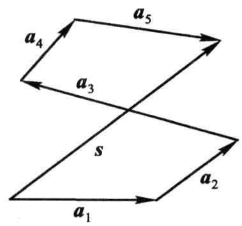


图 7－6　多个向量的和

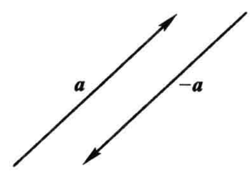


图 7－7　负向量

定义 3. 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的负向量的和称为向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的**差向量**（图 7－8(a)），记作 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$.

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

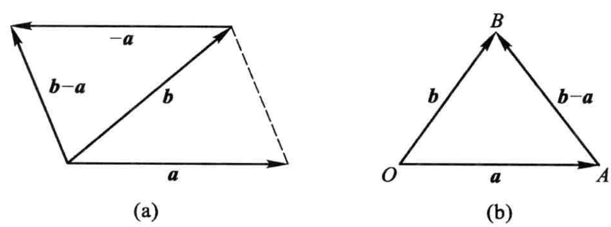


图 7－8　两向量的差向量

由图 7－8(a)中可见，如果将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移至同一起点，将 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（向右）平移，则 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 是由 $\boldsymbol{a}$ 的终点向 $\boldsymbol{b}$ 的终点所引的向量（图 7－8(b)）.

如图 7－9 所示，在以向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形中，两条对角线分别为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，根据“三角形两边长之和大于第三边之长，两边长之差小于第三边之长”的结论，得

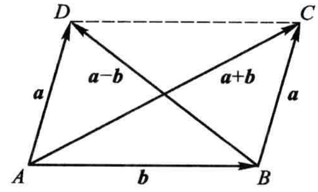


图 7－9

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|;$$

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant\big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\big|,\quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant\big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\big|,$$

其中等号仅在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

2. 向量的数乘运算

向量的数乘运算，也就是向量与数的乘法，这样的运算也来源于实践. 例如，两人在平行直道上赛跑，设在某一时刻他们的速度分别为向量$\boldsymbol{v}_1$ 和$\boldsymbol{v}_2$，则向量$\boldsymbol{v}_1$ 和$\boldsymbol{v}_2$ 互相平行，但两向量的模不相同，此时，可以将其中的一个向量表示为另一个向量与某个实数的乘积.

定义 4. 设 λ 是实数，$\boldsymbol{a}$ 为向量，定义 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的**数乘**为一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定

（1） $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模：$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$；

（2） $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向：当 $\lambda > 0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向；当 $\lambda < 0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向.

特别地，$\lambda = 0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$；$\lambda = -1$ 时，$(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$.

从几何上看，当 $\lambda > 0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 λ 倍，方向保持不变；当 $\lambda < 0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $-\lambda$ 倍，方向相反(图 7 - 10).

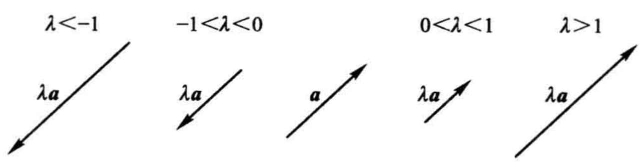


图 7 - 10　向量 $\boldsymbol{a}$ 与不同 λ 的乘积

向量的数乘运算符合下列运算规律：

（1） 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

（2） 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.

设 $\lambda > 0$，$\mu > 0$，图 7 - 11 的(a)是结合律、(b)和(c)是分配律的几何表示.

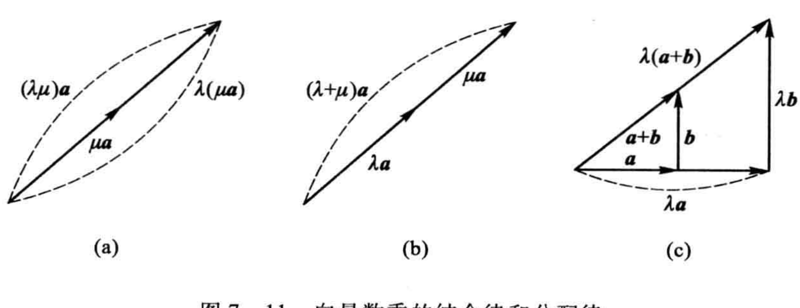


图 7 - 11　向量数乘的结合律和分配律

向量的加法和数乘统称为**向量的线性运算**.

例. 在平行四边形 $ABCD$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点(图 7－12).

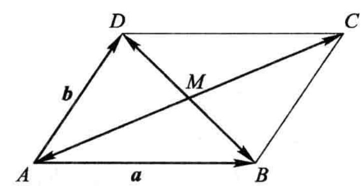


图 7－12

解　因为平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM},$$

即
$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

因为$\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}$，所以

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\ \overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

又因为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BM}$，即$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，且$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{BM}$，所以

$$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),\ \overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，记 $\lambda=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}$，则向量 $\lambda\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，且它的模

$$\left|\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right|=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=1,$$

即$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$**是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量**，将它记作$\boldsymbol{a}^0$，于是

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

这表明，一个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 乘它模的倒数，得到的是一个与原向量同方向的单位向量. 这个过程又称为将非零向量 $\boldsymbol{a}$ **单位化**. 同时由$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，可得

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0, \tag{1.1}$$

即任何非零向量可以表示为它的模与同向单位向量的数乘.

就像单位长度 1 是数量尺度的“度量”标准一样，单位向量$\boldsymbol{a}^0$ 给出了一种向量的“度量”标准：由同方向单位向量的指向定方向，再根据模伸缩定大小.

根据向量数乘的定义，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，因此可用向量与数的乘积来判定两个向量的平行关系.

定理. 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的

实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证　由向量的数乘定义，条件的充分性是显然的. 下面证明必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$. 如果 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则取 $\lambda=0$，于是

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}.$$

如果 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时，取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$；当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时，取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向. 又

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,$$

所以 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

再证数 λ 的唯一性. 设另有实数 μ，使得 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，由于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，两式相减，得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

即 $|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0$. 因为 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，所以 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$. 故 λ 是唯一的. 定理证毕.

现设给定一个点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$，由于单位向量 $\boldsymbol{i}$ 既确定了方向，又给出了单位长度，所以 $\boldsymbol{i}$ 可以确定如图 7－13 所示的数轴 Ox.

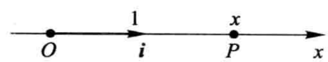


图 7－13　$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$ 是唯一的

设 P 为 Ox 轴上一点，则点 P 对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，且 $\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{i}$. 设点 P 的坐标为 x，根据轴上一点坐标的定义，当 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{i}$ 同向时，$x=|\overrightarrow{OP}|$. 于是由(1.1)式得

$$\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OP}|\cdot\boldsymbol{i}=x\boldsymbol{i};$$

当 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{i}$ 反向时，$x=-|\overrightarrow{OP}|$，但结果一样：

$$\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OP}|\cdot(-\boldsymbol{i})=x\boldsymbol{i}.$$

由此得到上述定理的如下推论

推论. 对数轴 Ox 上的任一点 P，轴上任意有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 都可唯一地表示成点 P 的坐标 x 与轴上单位向量 $\boldsymbol{i}$ 的乘积，即 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$.

下一节，我们将用这一推论建立向量的坐标表达式.

扩展阅读　笛卡儿与解析几何

空间解析几何的产生是数学史上一个划时代的成就. 16 世纪以后，生产和科学技术不断发展，因而在天文、力学、航海等方面都对几何学提出了新的需求. 17 世纪上半叶，法国数学家笛卡儿和费马对此做出了开创性的工作.