高等工程數學

下册

編著者 袁定培

東華書局印行

高等工程數學

下册

編著者
袁定培

東華書局印行

中華民國五十九年十月初版
中華民國六十八年五月四版

大學用書 高等工程數學（全二册）

下册 定價 精裝 新臺幣壹佰柒拾元整
平裝 新臺幣壹佰肆拾元整
（外埠酌加運費滙費）

著者 袁定培
發行人 卓鑫淼
出版者 臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號
電話：3819470 郵撥：6481
印刷者 中臺印刷廠
臺中市公園路三十七號

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號
（58030）

劉　　　序

民國五十三年，袁定培教授訪問美國加州大學，及加州理工學院，參與兩校力學研究，深感數學在近代工程研究上應用日廣而愈深，且國內又缺乏合適教本，是以在加州一年，工作之餘，即開始編撰此書，而筆者適亦講授同樣課程，獲得切磋機會。

工程數學教本內容每因作者而異，雖有若干"標準"教材，但深度和範圍也各不相同。袁教授認爲目前國內一般學生，閱讀外文課本往往不如中文教材方便；外國工程數學書籍，多將應用問題納入實驗課程，並未加以特別注重；且市面流行原文教本亦各有短長，因此綜合取材，宜特別重視應用和舉例，由於機械，電機研究使用數學較多，加上作者十年教學經驗及心得，自然注重這兩類重要問題，但一般工程上的例子也能兼顧，習題固多，範圍亦廣。全書二册，正適合國內學者需要。

中華民國五十七年九月

劉　炯　炎

加 州 大 學

下 册 自 序

本書所討論之各種課題，均具有完全之獨立性質，故其先後次序之排列，並無一定之準繩，讀者可視個人之實際需要，自行任意選擇順序，而不致影響研讀之效果，上下兩册之區分，亦無特殊之意義，蓋因工程數學所包括之範圍太廣，資料浩繁，此舉亦不過爲避免單本之過於累贅而已。

本書上下册各有九章，下册自第十章起，討論兩種以變數爲係數之著名次階線性微分方程式之解答函數，前者爲以無限乘方級數表示之貝索函數，後者則爲有限項數之雷建德多項式，此等特殊函數在應用問題中極具重要性。第十一章之向量分析，是爲工程數學中最重要課題之一，接下討論行列式及矩陣之性質，因其理論及應用方面資料較豐，故分別以十二及十三兩章予以敍述，較爲均勻。此外下册所餘亦即本書之最後五章，全部係介紹複變數函數之理論及應用，自可另成一組，第十四章先討論複變數之解析函數，第十五章爲複平面內之積分法，第十六章論及複變數之無限級數，讀者在此可參照上册第九章內所述實變數之無限級數，彼此大致類似，第十七章討論剩值理論及其各項應用。最後第十八章則介紹一極端重要之圖影或變換法，並附錄常用之變換圖表，以供讀者必要時之參考，其中尤以適合圖影法，在求解甚多工程及應用問題中所遭遇之二度拉氏方程式，使能適合已知之邊界條件時，最爲簡便，並遠較其他以無限級數作爲界值問題答案之方法爲優。

本書上下兩册，足供大學或獨立工學院修畢微積分以後，全部工程數學教材或參考之用。

民國五十八年九月編者序於臺南市成功大學

高等工程數學

下册目錄

第 十 章

貝索函數及雷建德多項式

(Bessel functions and Legendre polynomials)

10-1 貝索方程式之級數解法
(The series solution of Bessel's equation)

以自變數函數爲係數之常微分方程式，前已說明，除特殊情形外，均不可能利用本書上册第一、二、三章之正規方法，以基本函數作爲其解答，而須引用無限之乘方級數，以表達其解答形式。根據第九章 9-14 節內之定理二及定理四，吾人可歸納成如下之結論：

【定理一】 設 $x=0$ 爲次階微分方程式：

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之有規則奇點，則 (1) 式至少有一項解答，在 $x=0$ 附近，可展開成下列之級數形式，其收歛範圍爲 $|x|<R$，R係由原點至(1) 式最近之任何其他單點之距離：

$$y=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots)\cdots\cdots\cdots(2)$$

以(2)式代入(1)式後，歸納各 x 同次項係數，必均等於零，其中最低方次項係數等於零，被稱爲指標方程式 (Indicial equation)，卽用以決定 r 之根值者。此外(1)式之另一級數解答如下：

(a) 設由指標方程式所解出之兩根 r_1, r_2 既不相等，亦非相差一整數，則另解亦可展成(2)式之形狀，即(1)式兩解爲：

$$y_1=x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m \quad 及 \quad y_2=x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty}b_mx^m$$

(b) 設指標方程式之兩根 r_1 及 r_2 雖不相等，但相差却爲一整數時，則(1)式僅有一解可展成(2)項級數之形式，（即以 r_1 及 r_2 解出者，不復成爲獨立之二解），例如 y_1 係由 r_1 所得出之一解，另解爲 y_2，則：

$$\left.\begin{aligned} y_1&=x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_2&=by_1\ln x+x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

以上(3)式中之係數 b 可能爲零。

(c) 設指標方程式有相等之重根 $r_1=r_2=r$ 時，則：

$$y_1=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m, \qquad y_2=by_1\ln x+x^r\sum_{m=1}^{\infty}c_mx^m$$

以上 (b), (c), 兩種情形，均可假設 $y_2(x)=y_1(x)\phi(x)$ 以求出 y_2。

【例一】 求解微分方程式：

$$x^2y''+\left(x^2+\frac{5}{36}\right)y=0$$

【解】 以(2)式及其次階微分導數代入上式可得：

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_mx^{m+r}$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r+2}+\frac{5}{36}\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

當 $m=0$ 時，可歸納最低方次 x^r 之係數而使等於零，即可獲得指標方程式如下：$(a_0\neq 0)$

$$r(r-1)+\frac{5}{36}=0,$$

其根爲　　$r_1=\dfrac{5}{6}$,　　$r_2=\dfrac{1}{6}$,

再令 $m=1$，而將 x^{r+1} 項之係數和歸納之使等於零，

$$\left[(r+1)r+\frac{5}{36}\right]a_1=0,$$

設　$r_1=\dfrac{5}{6}$，　則爲適合上式，必使　$a_1=0$

再歸納(4)式內 x^{r+k} 項之係數使等於零，即可得一普遍之係數關係式如下：

$$(k+r)(k+r-1)a_k+a_{k-2}+\frac{5}{36}a_k=0\quad(k=0,1,2,3\cdots\cdots)$$

當　$r=r_1=\dfrac{5}{6}$，　上式化成：

$$k\left(k+\frac{2}{3}\right)a_k+a_{k-2}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

因　$a_1=0$，　由(5)式可得，　$a_3=0$，　$a_5=0\cdots\cdots$

故知所有帶奇數附號之 a 係數均等於零，又利用(5)式之關係，可得出：

$$a_0=a_0$$

$$a_2=-\frac{3}{4}\cdot\frac{a_0}{4}\qquad(k=2)$$

$$a_4=-\frac{3}{4}\cdot\frac{a_2}{2\cdot7}=\left(-\frac{3}{4}\right)^2\frac{a_0}{(2!)4\cdot7}\qquad(k=4)$$

$$a_6=-\frac{3}{4}\cdot\frac{a_4}{3\cdot10}=\left(-\frac{3}{4}\right)^3\frac{a_0}{(3!)4\cdot7\cdot10}\qquad(k=6)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{2p}=\left(-\frac{3}{4}\right)^p\frac{a_0}{p!\,1\cdot4\cdot7\cdot10\cdots\cdots(3p+1)}$$

故，　$r_1=\dfrac{5}{6}$ 時，y 之級數解爲：

$$y_1(x)=a_0\sum_{p=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^p\frac{x^{2p+\frac{5}{6}}}{p!\,1\cdot4\cdot7\cdots(3p+1)}=a_0x^{\frac{5}{6}}\left(1-\frac{3}{16}x^2+\frac{9}{896}x^4-\cdots\right)$$

同理，因 r_1 及 r_2 相差並非整數，故亦可求出相當於　$r_2=\dfrac{1}{6}$　時之另一級數解爲：

$$y_2(x)=b_0\sum_{p=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^p\frac{x^{2p+\frac{1}{6}}}{p!\,2\cdot5\cdot9\cdots(3p-1)}=b_0x^{\frac{1}{6}}\left(1-\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{320}x^4-\cdots\right)$$

【例二】　求解下列之微分方程式：

$$(x^2-1)x^2y''-(x^2+1)xy'+(x^2+1)y=0$$

【解】　以(2)式及其各階微分導數代入上項方程式可得：

$$(x^2-1)\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_mx^{m+r}-(x^2+1)\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_mx^{m+r}$$

$$+(x^2+1)\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}=0$$

歸納並化簡之後，吾人即獲下式：

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r-1)^2 a_m x^{m+r+2}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r+1)(m+r-1)a_m x^{m+r}=0\cdots(6)$$

將上式內 x^r 項之係數等於零，即得指標方程式：

$$(r+1)(r-1)=0$$

其二根爲 $r_1=1$，$r_2=-1$，恰相差一整數，根據定理一(b)，僅有一解可展成級數(2)之形式，先求之如次：使(b)式內 x^{r+1} 項之係數爲零，得：

$$-(r+2)ra_1=0$$

無論令 $r=r_1=1$ 或 $r=r_2=-1$，爲滿足上項條件，必使 $a_1=0$，再歸納(6)式內 x^{k+r+2} 普通項之係數而使爲零，

$$(k+r-1)^2 a_k=(k+r+3)(k+r+1)a_{k+2}\quad(k=0,1,2,3\cdots)\cdots\cdots\cdots(7)$$

將 $r=r_1=1$ 代入上式而解出 a_{k+2} 得：

$$a_{k+2}=\frac{k^2}{(k+2)(k+4)}a_k$$

因 $a_1=0$，故由上式可推知　$a_3=0$，　$a_5=0$，　$a_7=0\cdots\cdots$

又當 $k=0$ 時，　$a_2=0$，　$a_4=0$，　$a_6=0,\cdots\cdots$

故除 a_0 外，其他所有之係數，均須等於零，因此當 $r=r_1=1$ 時，題設微分方程式之一解爲：$y_1(x)=a_0x$，如另以 $r=r_2=-1$ 之一根代入(7)式將得出：

$$(k-2)^2 a_k=(k+2)ka_{k+2}\quad(k=0,1,2,3\cdots\cdots)$$

當 $k=0$，上式要求 $a_0=0$，亦即所有之係數均須等於零，而 y_2 成爲零解或無解，亦即指標方程式之二根 r_1 及 r_2 相差爲一整數時，不可能具有(2)式級數形式之獨立二解也。故設另解爲：

$$y_2(x)=bx\ln x+\frac{1}{x}\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m$$

將以上 y_2 及其各階微分導數代入原設之微分方程式，

$$(x^2-1)x^2\left\{\frac{b}{x}+\sum_{m=0}^{\infty}(m-1)(m-2)c_m x^{m-3}\right\}-(x^2+1)x$$

$$\left\{b\ln x+b+\sum_{m=0}^{\infty}(\mathrm{m}-1)c_m x^{m-2}\right\}+(x^2+1)\left\{bx\ln x+\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m-1}\right\}=0$$

上式中之對數項恰可抵銷，再經歸納簡化後可得：

$$-2bx+\sum_{m=0}^{\infty}(m-2)^2 c_m x^{m+1}-\sum_{m=0}^{\infty}m(m-2)c_m x^{m-1}=0$$

設，x^0 即常數項爲零，可得：　$c_1=0$

歸納 x 之係數而使之等於零得:

$$-2b+4c_0=0$$

再令普通項 x^k 之係數爲零時,可得下列之關係,

$$(k-3)^2c_{k-1}-(k^2-1)c_{k+1}=0 \qquad (k=2,3,4\cdots\cdots)$$

解之, $\quad \therefore \quad c_{k+1}=\dfrac{(k-3)^2}{k^2-1}c_{k-1} \qquad (k=2,3,4\cdots\cdots)$

因有 $\quad c_1=0,\qquad$ 故知 $\quad c_3=0,\quad c_5=0,\cdots\cdots$

設 $\quad k=3,\qquad$ 則 $\quad c_4=0,\quad c_6=0,\quad c_8=0,\cdots\cdots$

而 $\quad b=2c_0,\qquad$ c_2 爲任意常數,故得.

$$y_2(x)=2c_0x\ln x+\frac{1}{x}(c_0+c_2x^2)$$

因上式之最後一項爲: $\quad c_2x=c_2y_1/c_0,$

爲簡便計,可設 $\quad c_2=0,\qquad c_0=\dfrac{1}{2},$

故另解成爲: $\quad y_2(x)=x\ln x+\dfrac{1}{2x}$

以上之 y_2,可逕由 $y_1=x$,$(a_0=1)$,設 $y_2=\phi y_1=\phi x$ 更爲方便,以 $y=\phi x$ 代入原微分方程式,並經化簡後得:

$$(x^3-x)\phi''+(x^2-3)\phi'=0,$$

解出且分解爲部分分式,

$$\frac{\phi''}{\phi'}=\frac{3-x^2}{x^3-x}=-\frac{3}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1},$$

兩端積分後可得:

$$\ln\phi'=-3\ln x+\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln\frac{x^2-1}{x^3}$$

或, $\quad \phi'=\dfrac{x^2-1}{x^3}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}$

再積分, $\quad \phi=\ln x+\dfrac{1}{2x^2}$

故, $\quad y_2(x)=\phi x=x\ln x+\dfrac{1}{2x},\quad$ 恰與前結果相符。

【例三】 求解微分方程式:

$$x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

【解】 以(2)式及其各階微分導數代入上項方程式,

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-1}$$
$$+3\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r-1}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}=0\cdots(9)$$

將最低方次項 x^{r-1} 之係數和，歸納而使之爲零，得指標方程式：

$$[-r(r-1)-r]a_0=0, \qquad \text{或} \quad r^2=0,$$

故，$r_1=r_2=0$ 爲二重根，以 $r=0$ 代入(9)式，而將普通項 x^k 之係數和等於零可得：

$$k(k-1)a_k-(k+1)kc_{k+1}+3kc_k-(k+1)a_{k+1}+c_k=0$$

或 $\quad a_{k+1}=a_k, \qquad$ 故 $\quad a_0=a_1=a_2=\cdots\cdots$

令 $\quad a_0=1, \qquad \therefore \; y_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}x^m=\frac{1}{1-x}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$

利用定理一(c)內 y_2 之形式，或設 $y_2=\phi y_1$，代入(8)式：

$$x(x-1)(\phi'' y_1+2\phi' y_1'+\phi y_1'')+(3x-1)(\phi' y_1+\phi y_1')+\phi y_1=0$$

因 y_1 係已知爲(8)式之一解，上式可簡化成：

$$x(x-1)(\phi'' y_1+2\phi' y_1')+(3x-1)\phi' y_1=0$$

由(10)式求出 y'_1，一併代入上式而簡化之得：

$$x\phi''+\phi'=0, \qquad \text{或} \quad \frac{\phi''}{\phi'}=-\frac{1}{x}$$

積分，$\quad \ln\phi'=-\ln x, \qquad$ 或 $\quad \phi'=\frac{1}{x}$

再積分，$\quad \phi(x)=\ln x, \qquad$ 故 $\quad y_2(x)=\phi y_1=\frac{\ln x}{1-x}$。

在所有包含變數爲係數的微分方程式中，最重要而著名者，首推下列之方程式：

$$x^2\frac{d^2y}{dx}+x\frac{dy}{dx}+(\lambda^2x^2-\nu^2)y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

此一方程式被稱爲貝索方程式，其階數爲 ν，參數爲 λ，(Bessel's equation of order ν with parameter λ) 係紀念著名之德國數學及天文學家貝索氏 (Friedrich Wilhelm Bessel) (1784–1846 年) 而命名，雖然，此一方程式之若干特殊形式，曾於較早時期，已爲哲柯白努利 (Jakob Bernoulli) (1730 年)，丹尼白努利 (Daniel Bernoulli) (1732 年)，及梁哈尤勒 (Leonhard Euler) (1764 年)等人所研究，此方程式常產生於極

多重要之實用偏微分方程式問題中，尤以具有圓形或圓柱形邊界之波形或熱傳方程式 (Wave or heat equation) 問題爲然。

在求解 (11) 式前，吾人可將其參數 λ 與以消除，俾較簡易進行如下：設以 $t=\lambda x$ 之代替法代入 (11) 式，則因 $\dfrac{dt}{dx}=\lambda$，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\lambda\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\lambda^2\frac{d^2y}{dt^2}$$

(11)式可以化成：

$$\left(\frac{t}{x}\right)^2\left(\lambda^2\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\left(\frac{t}{\lambda}\right)\left(\lambda\frac{dy}{dt}\right)+(t^2-\nu^2)y=0$$

或，

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t^2-\nu^2)y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

故(12)式已變爲階數 ν 之貝索方程式 (參數等於 1)，爲習慣性之方便起見，仍假設以 x 及 y 爲變數，階數爲 ν 之貝索方程式如次：

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\nu^2)y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

根據第九章 9-14 節之理論，吾人可知 $x=0$ 爲 (13) 式之一有規則單點 $\left[\text{因}\ P(x)=\dfrac{1}{x},\ Q(x)=\dfrac{x^2-\nu^2}{x^2},\ xP(x)=1,\ x^2Q(x)=x^2-\nu^2\right]$ 復由本節內之定理一，(13)式至少有一級數形之解答如下：

$$y=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots)$$

或.

$$y=a_0x^r+a_1x^{r+1}+a_2x^{r+2}+\cdots\cdots$$
$$+a_{k-2}x^{r+k-2}+a_{k-1}x^{r+k-1}+a_kx^{r+k}+\cdots\cdots$$

微分，

$$y'=ra_0x^{r-1}+(r+1)a_1x^r+(r+2)a_2x^{r+1}+\cdots\cdots$$
$$+(r+k)a_kx^{r+k-1}+\cdots\cdots$$

再微分，　$y''=r(r-1)a_0x^{r-2}+r(r+1)a_1x^{r-1}+(r+1)(r+2)a_2x^r+\cdots\cdots+(r+k)(r+k-1)a_kx^{r+k-2}+\cdots\cdots$

逐項代入，並寫出方程式(13)，如次：

$$\left.\begin{cases} x^2y''=r(r-1)a_0x^r+r(r+1)a_1x^{r+1}+(r+1)(r+2)a_2x^{r+2} \\ \qquad +\cdots\cdots+(r+k)(r+k-1)a_kx^{r+k}+\cdots\cdots\cdots\cdots \\ xy'=ra_0x^r+(r+1)a_1x^{r+1}+(r+2)a_2x^{r+2}+\cdots\cdots \\ \qquad +(r+k)a_kx^{r+k}+\cdots\cdots \\ x^2y= \qquad\qquad a_0x^{r+2}+\cdots\cdots+a_{k-2}x^{r+k}+\cdots\cdots \\ -\nu^2y=-\nu^2a_0x^r-\nu^2a_1x^{r+1}-\nu^2a_2x^{r+2}-\cdots-\nu^2a_kx^{r+k}-\cdots \end{cases}\right\}(14)$$

以上四式左右相加，必均爲零，先將右方 x 之最低方項，即 x^r 之係數和等於零，即得指標方程式：

$$[r(r-1)+r-\nu^2]a_0=(r^2-\nu^2)a_0=0$$

即，　$r^2-\nu^2=0$，　或　$r_1=\nu$，　$r_2=-\nu$ $(a_0\neq 0)$………………(15)

先設 $r=r_1=\nu$，再將 (14) 組各式右方級數和中之 x^{r+1} 項係數，歸納而使之等於零得：

$$\begin{aligned}[r(r+1)+(r+1)-\nu^2]a_1&=[(r+1)^2-\nu^2]a_1\\&=(2\nu+1)a_1=0\end{aligned}$$

除 $\nu=\dfrac{1}{2}$ 之特殊情形外，爲求適合上項條件，必使 $a_1=0$，此外(14)組右方 x 同方次者，自 x^{r+2} 以上，每種均含有四項，自可不必逐一分析，只須將其中之普通項 x^{r+k} 係數歸納而使之等於零，即可適合所有之條件，如此可得：

$$[(r+k)(r+k-1)+(r+k)-\nu^2]a_k+a_{k-2}\quad(\text{令 } r=\nu)$$
$$[(k^2+-r)=\nu^2]a_k+a_{k-2}=(k^2+2\nu k)\,a_k+a_{k-2}=0$$

故得循環之關係公式如次：

$$\therefore\quad a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(k+2\nu)}\quad(k=2,3,4,\cdots\cdots)$$

因 $a_1=0$, 由上項關係可知 $a_3=0$, $a_5=0$, …… 亦即所有以奇數爲附號之係數, 均需爲零, 又因 a_0 爲任意係數, 可使之作爲標準, 以利用上式:

令, $\quad a_0=a_0$

$$k=2,\qquad a_2=-\frac{a_0}{2(2+2\nu)}=-\frac{a_0}{2^2(1)(\nu+1)}$$

$$k=4,\qquad a_4=-\frac{a_2}{4(4+2\nu)}=-\frac{a_2}{2^2(2)(\nu+2)}$$
$$=(-1)^2\frac{a_0}{2^4(2!)(\nu+1)(\nu+2)}$$

$$k=6,\qquad a_6=-\frac{a_4}{6(6+2\nu)}=-\frac{a_4}{2^2(3)(\nu+3)}$$
$$=(-1)^3\frac{a_0}{2^6(3!)(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}$$

……………………………………………………………

一般而言,

當 $k=2m$, $\quad a_{2m}=(-1)^m\dfrac{a_0}{2^{2m}(m!)(\nu+1)(\nu+2)\cdots\cdots(\nu+m)}$

設任意常數 $a_0=\dfrac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$, 則因有下列之關係:

$$(\nu+1)(\nu+2)\cdots\cdots(\nu+m)\Gamma(\nu+1)=\Gamma(\nu+2)(\nu+2)\cdots\cdots(\nu+m)$$
$$=\Gamma(\nu+3)(\nu+3)\cdots\cdots(\nu+m)=\cdots\cdots=\Gamma(\nu+m+1)$$

可寫出: $\quad a_{2m}=\dfrac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}(m!)\Gamma(\nu+m+1)}$

但 a_{2m} 即係 $x^{2m+r}=x^{2m+\nu}$ 項之係數, 故貝索方程式 (11) 之一項級數解如下:

$$y=x^{\nu}\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m}x^{2m}=\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m}x^{2m+\nu}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$
$$=J_\nu(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

(16)式中以符號 $J_\nu(x)$ 所代表之無限級數，通常被稱爲第一類貝索函數 (Bessel function of the first kind)，其階數爲 ν，因貝索方程式(13)除原點外，並無任何其他有限之單點，故第一類貝索函數 $J_\nu(x)$，對於所有有限値之 x 而言，均具有收斂性，只須 $\nu \geqq 0$。

設 $\nu=0$，零階之第一類貝索函數展開式如下：

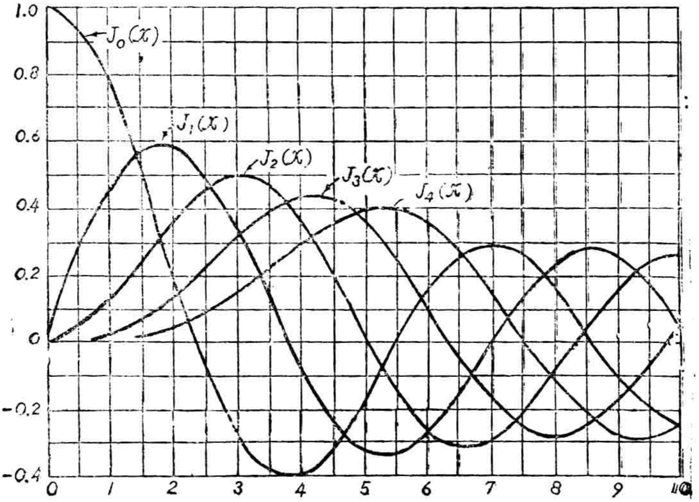
$$J_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)\Gamma(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

$$=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

又 $$J_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)\Gamma(m+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)(m+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{(1!)(2!)}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{(2!)(3!)}\left(\frac{x}{2}\right)^5\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

$J_0(x)$ 及 $J_1(x)$ 兩函數之曲線圖形，約如 10-1 圖所示，$J_0(0)=1$，$J_0(x)$ 爲一偶函數，其級數(17)及曲線形態，均與 $\cos x$ 相似，但數値隨 x 之



10-1 圖　第一類貝索函數 $J_0(x)$ 及 $J_1(x)$ 曲線