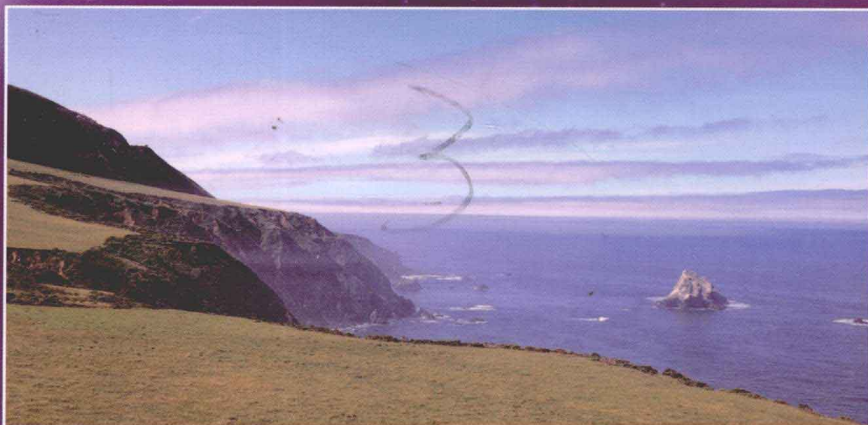


G A O D E N G S H U X U E



普通高等教育数学基础课程“十二五”规划教材

(经管类)

高等数学 下册

同济大学数学系 刘浩荣 郭景德 蔡林福 董力强 编著



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本套教材按照教育部最新制定的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写,分上、下两册.此为下册,共4章内容,包括:向量代数与空间解析几何,多元函数微积分及其应用,无穷级数,常微分方程与差分方程简介等.书中每节后均配有适量的习题,每章之末均配有复习题.为方便读者查阅参考,在所附习题和复习题之后,都附有答案或提示.

本套教材条理清晰,论述确切;由浅入深,循序渐进;重点突出,难点分散;例题较多,典型性强;深广度恰当,便于教和学.它可作为普通高等院校(特别是“二本”及“三本”院校)或成人高校经管类本科或专升本学生“高等数学”课程的教材,也可供从事经济管理或金融工作的人员,或参加国家自学考试的考生,作为自学用书或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:经管类.下册 / 刘浩荣等编著. — 上海:同济大学出版社,2012.4
ISBN 978-7-5608-4808-2

I. ①高… II. ①刘… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 045567 号

普通高等教育数学基础课程“十二五”规划教材

高等数学(经管类)下册

同济大学数学系 刘浩荣 郭景德 蔡林福 董力强 编著

组稿 曹建 吴丽丽 责任编辑 张莉 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向葵

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787 mm×960 mm 1/16

印 张 15

字 数 300 000

印 数 1—4 100

版 次 2012 年 4 月第 1 版 2012 年 4 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-4808-2

定 价 27.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

前 言

近几年来,我国高等教育有了较大的发展,为适应部分高等院校经管类专业(“二本”、“三本”)的教学需要,我们应同济大学出版社之约,遵照教育部最新制定的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”(以下简称“教学基本要求”),编写了这套《高等数学》(经管类)教材.本教材分上、下两册,共9章内容,包括:函数、极限与连续,导数与微分,中值定理与导数的应用,不定积分,定积分及其应用,向量代数与空间解析几何,多元函数微积分及其应用,无穷级数,常微分方程与差分方程简介等.

编写本教材的基本思路是:精简冗余内容,压缩叙述篇幅;降低教学难度,突出应用特色.为使教材具有科学性、知识性、可读性和实用性,我们注意采取了以下一些措施:

(1) 内容“少而精”,取材紧扣“教学基本要求”.与同类教材相比,我们删去了“函数”中与中学知识重复的内容;在“不定积分”一章中删去了“有理函数”及“三角函数有理式”的积分;在“极限”部分,除了用极限的精确定义推证出必需的基本极限公式外,一般对用精确定义证明极限的例题或习题均降低难度,不作教学要求.从而尽量降低难度,压缩篇幅.对于某些超出“教学基本要求”而属于教学中可讲可不讲的内容,即使编入,也均以*号标记或用小号字排版,以供不同专业的教师和学生选用或参考.

(2) 在着重讲清数学知识概念和有关理论方法的同时,适当淡化某些定理的证明或公式推导的严密性.例如,根据“教学基本要求”,我们对三个微分中值定理的严格证明均予以省略,只叙述定理的条件和结论,并借助几何图形较为直观地解释其几何意义.此外,对于某些较为繁复的计算或公式推导,能删去的就删去,不能删去的便略去其计算或推导的过程.

(3) 在对教材中各章、节内容的组织上,考虑到应具有科学性和可读性.除了书写的文字尽量通顺流畅外,还注意做到:由浅入深,循序渐进;重点突出,难点分散.例如,在讲重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 时,为分散此教学难点,采用了“分两步走”的方法.先在数列极限存在的单调有界准则基础上,用数据列表的方式,直观地说明数列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的极限存在,且定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.然后,在讲“两个重要极限”时,再就 $x \rightarrow +\infty$ 时,利用函数极限存在的夹逼准则,证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.最后,推广

到 $x \rightarrow -\infty$ 的情形,从而得到完整的极限公式: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. 此外,即使是安排

每节中所选配的例题,也应遵循“由简单到复杂,由具体到抽象”的原则. 当引入某种新的数学概念时,尽量按照“实践—认识—实践”的认识规律,先由实际引例出发,抽象出数学概念,从而上升到理论阶段(包括有关性质和计算方法等),再回到实践中去应用. 为体现教材的科学性,我们特别注意防止前后内容的脱节,即使遇到个别地方需要提前用到后面的知识内容时,也都以适当的方式加以交代说明. 例如,在讲“两个重要极限”时,举例中常要用到利用复合函数连续性求极限的方法,因尚未介绍函数的连续性,故在前面介绍复合函数的极限法则时,顺便给出了一个定理,说明求复合函数极限可以交换极限与函数记号次序的条件,这样便可把复合函数的极限法则先使用起来,而到讲过复合函数的连续性后,再用函数的连续性把前面引入的定理加以叙述,从而做到前后内容互相呼应,融会贯通.

(4) 为使教材突出应用特色,且具有知识性和实用性,我们在微积分应用方面,主要侧重于在几何及经济分析中的一些简单应用. 例如,在定积分的几何应用中,只介绍“平面图形的面积”,“平行截面面积为已知的立体”及“绕坐标轴旋转的旋转体”的体积;在二重积分的应用中,也只介绍“立体的体积”,“曲面的面积”及“平面薄片的质心”等. 与同类教材相比,舍去了“平面曲线的弧长”及“平面薄片的转动惯量”等与经管类专业关系不太大的内容. 此外,突出在经济分析中的应用,希望成为本书的特色之一. 为此,我们参考了许多同类教材,除了编入一般常见的经济分析应用范例外,还特地邀请了同济大学数学系金融数学博士任学敏副教授,为我们提供了不少金融数学的应用实例. 例如,连续复利资金流量的现值,购买债券时确定债券首日购入的价格,股票市场中的“零增长模型”及“不变增长模型”的股价计算等. 另外,为使教材在应用方面更贴近生活,具有实用性,我们在“无穷级数”和“常微分方程与差分方程简介”中,特意选编了有关银行存款的本金计算,债券市场无风险利率,购房贷款及筹措教育经费存款等数学模型. 我们相信,这些应用方面的知识内容不仅有趣,而且有较强的参考价值.

(5) 按照“学练结合,学以致用”的原则,本教材在各节之后均配置了适量的习题作业,在每章之末也都选配了复习题,且为方便读者查阅参考,在习题和复习题之后,均附有答案或提示.

参加本教材编写的有蔡林福(第1,2,3章),董力强(第4,5章),郭景德(第6,7章),刘浩荣(第8,9章). 全书由刘浩荣、蔡林福统稿,最后由刘浩荣润笔定稿并选编了附录.

本教材由北京航空航天大学李心灿教授主审. 他虽年事已高,工作繁忙,但仍在百忙中详细审阅了全书,并提出了许多宝贵建议及具体的修改意见,我们深受感悟,谨此表示诚挚而衷心的感谢!

在本教材的编写过程中,我们主要参考了同济大学出版社出版的由刘浩荣、郭景

德编著的《高等数学》(理工类)上、下册及由赵利彬主编的《高等数学》(经管类)上、下册;高等教育出版社出版的,由同济大学数学系编写的《高等数学》(第6版)及由教育部高等教育司组编、北京航空航天大学李心灿教授主编的《高等数学》等教材.此外,本教材的编写和出版,除了得到金融数学博士任学敏副教授的大力支持外,还得到同济大学出版社曹建副总编辑的大力帮助.在此,我们一并表示衷心的感谢!

本套教材条理清晰,论述确切;由浅入深,循序渐进;重点突出,难点分散;例题较多,典型性强;深广度恰当,便于教和学.它可作为普通高校(特别是“二本”及“三本”院校)或成人高校经管类本科或专升本学生的“高等数学”课程的教材,也可供从事经济管理或金融工作的人员,或参加国家自学考试的读者,作为自学用书或参考书.

由于我们水平有限,书中难免会有不当或错误之处,恳请广大读者和同行批评指正.

编 者

2012年4月于同济大学

目 录

前 言

第 6 章 向量代数与空间解析几何	(1)
6.1 向量及其线性运算	(1)
6.1.1 向量的概念	(1)
6.1.2 向量的线性运算	(2)
习题 6.1	(5)
6.2 空间直角坐标系与向量的坐标	(5)
6.2.1 空间直角坐标系	(5)
6.2.2 向量的坐标	(7)
6.2.3 向量线性运算的坐标表示式	(8)
6.2.4 向量的模及方向余弦的坐标表示式	(10)
习题 6.2	(13)
6.3 向量的数量积与向量积	(13)
6.3.1 向量的数量积	(13)
6.3.2 向量的向量积	(16)
习题 6.3	(20)
6.4 空间平面及其方程	(21)
6.4.1 平面的点法式方程	(21)
6.4.2 平面的一般方程	(23)
6.4.3 两平面的夹角及两平面平行或垂直的条件	(25)
6.4.4 点到平面的距离公式	(26)
习题 6.4	(27)
6.5 空间直线及其方程	(28)
6.5.1 空间直线的一般方程	(28)
6.5.2 空间直线的点向式、两点式及参数方程	(29)
6.5.3 两直线的夹角及两直线平行或垂直的条件	(31)
6.5.4 直线与平面的夹角及平行或垂直的条件	(33)
6.5.5 平面束方程	(34)
习题 6.5	(35)

6.6 空间曲面及其方程	(36)
6.6.1 曲面与方程的概念	(36)
6.6.2 几种常见的曲面	(37)
6.6.3 二次曲面	(40)
习题 6.6	(42)
6.7 空间曲线及其方程	(44)
6.7.1 空间曲线的一般方程	(44)
6.7.2 空间曲线的参数方程	(45)
6.7.3 空间曲线在坐标面上的投影	(45)
习题 6.7	(48)
复习题(6)	(49)
 第 7 章 多元函数微积分及其应用	(51)
7.1 多元函数的概念、极限和连续	(51)
7.1.1 邻域和区域的概念	(51)
7.1.2 多元函数的概念	(52)
7.1.3 二元函数的极限	(54)
7.1.4 二元函数的连续性	(55)
习题 7.1	(57)
7.2 偏导数	(58)
7.2.1 偏导数的概念	(58)
7.2.2 偏导数的求法	(60)
7.2.3 二元函数偏导数的几何意义	(62)
7.2.4 高阶偏导数	(63)
7.2.5 偏导数在经济分析中的应用举例	(64)
习题 7.2	(65)
7.3 全微分	(67)
7.3.1 全微分的概念	(67)
7.3.2 全微分存在的必要条件及充分条件	(68)
习题 7.3	(70)
7.4 多元复合函数的导数	(71)
7.4.1 多元复合函数的求导法则	(71)
7.4.2 多元复合函数的高阶偏导数	(77)
习题 7.4	(79)
7.5 隐函数的求导公式	(80)
7.5.1 由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的求导公式	

.....	(80)
7.5.2 由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的隐函数 $z = f(x, y)$ 的求导公式	(82)
习题 7.5	(83)
7.6 多元函数的极值	(83)
7.6.1 多元函数的极值与最值	(84)
7.6.2 条件极值 拉格朗日乘数法	(88)
习题 7.6	(91)
7.7 二重积分的概念与性质	(92)
7.7.1 二重积分的概念	(92)
7.7.2 二重积分的性质	(95)
习题 7.7	(98)
7.8 二重积分的计算法	(98)
7.8.1 在直角坐标系中二重积分的计算法	(98)
7.8.2 在极坐标系中二重积分的计算法	(105)
习题 7.8	(109)
7.9 二重积分的应用	(111)
7.9.1 立体的体积	(111)
7.9.2 曲面的面积	(113)
7.9.3 平面薄片的质心	(114)
习题 7.9	(117)
复习题(7)	(118)

第 8 章 无穷级数..... (122)

8.1 常数项级数的概念和性质	(122)
8.1.1 常数项级数及其收敛与发散的概念	(122)
8.1.2 级数收敛的必要条件	(125)
8.1.3 级数的基本性质	(126)
习题 8.1	(129)
8.2 常数项级数的审敛法	(130)
8.2.1 正项级数的审敛法	(130)
8.2.2 任意项级数的审敛法	(136)
习题 8.2	(139)
8.3 函数项级数的概念与幂级数	(140)
8.3.1 函数项级数的概念	(140)
8.3.2 幂级数及其收敛性	(142)

8.3.3 幂级数的运算	(145)
8.3.4 幂级数的和函数在银行存款问题中的应用实例	(149)
习题 8.3	(151)
8.4 把函数展开成幂级数及其应用	(152)
8.4.1 泰勒公式	(152)
8.4.2 泰勒级数	(154)
8.4.3 把函数展开成幂级数	(156)
8.4.4 函数的幂级数展开式在近似计算中的应用	(161)
习题 8.4	(163)
复习题(8)	(165)
第 9 章 常微分方程与差分方程简介	(169)
9.1 微分方程的基本概念	(169)
9.1.1 引例	(169)
9.1.2 微分方程的一般概念	(170)
习题 9.1	(172)
9.2 变量可分离的微分方程及齐次方程	(173)
9.2.1 变量可分离的微分方程	(174)
9.2.2 齐次方程	(176)
习题 9.2	(178)
9.3 一阶线性微分方程	(179)
习题 9.3	(184)
* 9.4 可降阶的高阶微分方程	(185)
9.4.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型	(185)
9.4.2 $y'' = f(x, y')$ 型	(186)
9.4.3 $y'' = f(y, y')$ 型	(188)
* 习题 9.4	(190)
9.5 二阶常系数线性齐次微分方程	(190)
9.5.1 二阶常系数线性齐次微分方程解的性质与通解结构	(191)
9.5.2 二阶常系数线性齐次微分方程的解法	(193)
习题 9.5	(196)
9.6 二阶常系数线性非齐次微分方程	(197)
9.6.1 二阶常系数线性非齐次微分方程的通解结构及特解的可叠加性	(197)
9.6.2 二阶常系数线性非齐次微分方程的解法	(198)
习题 9.6	(204)

9.7 微分方程在经济分析中的应用举例	(205)
习题 9.7	(209)
9.8 函数的差分及差分方程的一般概念	(209)
9.8.1 函数的差分	(209)
9.8.2 差分方程的一般概念	(211)
习题 9.8	(212)
9.9 一阶常系数线性差分方程及应用举例	(213)
9.9.1 一阶常系数线性差分方程的概念及通解结构	(213)
9.9.2 一阶常系数线性齐次差分方程的通解的求法	(214)
9.9.3 一阶常系数线性非齐次差分方程的解法	(215)
9.9.4 差分方程在经济分析中的应用举例	(220)
习题 9.9	(222)
复习题(9)	(223)

第6章 向量代数与空间解析几何

向量是解决许多数学、物理、力学及工程技术问题的有力工具,在学习空间解析几何时,将看到它的应用.本章前半部分侧重介绍如何在空间直角坐标系中,建立向量的坐标表示式,用代数的方法讨论向量的运算.

用代数的方法研究空间几何图形,是空间解析几何的主要内容.掌握图形与方程的对应关系,对学习多元函数微积分是十分重要的.本章后半部分主要讨论空间平面和空间直线及其方程,介绍一些常用的空间曲面.

6.1 向量及其线性运算

6.1.1 向量的概念

在日常生活中,我们常会遇见两种不同类型的量:一类是只有大小的量,如长度、面积、体积、温度等,它们称为**数量**或**标量**;另一类量,不仅有大小,而且有方向,如速度、加速度、力、位移等,它们称为**向量**或**矢量**.

几何上,常用一条规定了起点和终点的有方向的线段,又称为有向线段来表示向量.以点 A 为起点,点 B 为终点的向量,记作 $\overrightarrow{AB}$ (图 6-1).有时也常用一个黑体字母来表示向量,如 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{F}$ 等(书写时,常在字母上方标上箭头来表示,如 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{F}$ 等).起点在原点 O ,终点在点 M 的向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 的**向径**,常记作 $\mathbf{r}$ (书写时记作 $\vec{r}$).

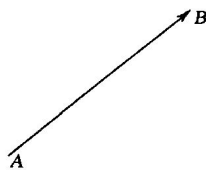


图 6-1

向量的大小称为**向量的模**,向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\mathbf{a}$ 的模分别记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 和 $|\mathbf{a}|$ (或 $|\vec{a}|$).模为零的向量叫做**零向量**,记作 $\mathbf{0}$ (或 $\vec{0}$).零向量的起点和终点是重合的,规定它的方向是可以任意的.模等于 1 的向量叫做**单位向量**.

在实际问题中,有的向量与其起点有关,有的向量与其起点无关.但是,它们都有一个共同的特征:都有大小和方向.因此,数学上研究向量时,通常只考虑向量的大小和方向,并不关心向量的起点在何处,这种与起点无关的向量称为**自由向量**.

由于我们只讨论自由向量,所以如果两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的大小相等,且方向相同,则称向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是**相等的**,记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.这就是说,经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

如果一个向量与向量 $\mathbf{a}$ 的模相等、方向相反,则称它是向量 $\mathbf{a}$ 的**负向量**,记作

— a .

如果两个非零向量 a 和 b 的方向相同或者相反, 则称向量 a 与 b 平行, 记作 $a \parallel b$. 由于零向量的方向可以是任意的, 因此可以认为零向量与任何向量都平行.

下面介绍两个向量夹角的概念. 设给定两个非零向量 a 和 b , 将向量 a 或 b 平移, 使它们的起点重合, 它们所在射线的夹角 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 称为向量 a 与 b 的夹角 (图 6-2), 记作 (a, b) . 显然, 当 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$ 时, $a \parallel b$; 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 称为 a 与 b 垂直, 记作 $a \perp b$. 当 a 与 b 有一个是零向量时, 规定它们的夹角可以在 $[0, \pi]$ 中任意取值.

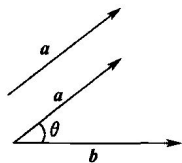


图 6-2

6.1.2 向量的线性运算

向量的加法, 数与向量的乘法, 统称为向量的线性运算.

1. 向量的加法

我们在中学学习物理时已知道, 作用在同一点的两个不平行的力 F_1 和 F_2 , 它们的合力 F 可以用平行四边形法则来确定 (图 6-3). 向量的加法也是用相同的方法规定的.

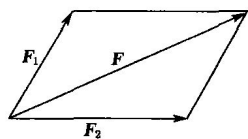


图 6-3

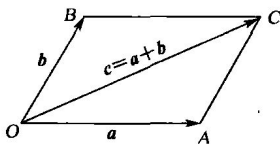


图 6-4

设有两个不平行的非零向量 a 和 b . 将向量 a (或 b) 平移, 使它的起点与向量 b (或 a) 的起点重合, 记 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, 以 OA 和 OB 为边作一个平行四边形 $OACB$, 记对角线的向量 $\overrightarrow{OC} = c$ (图 6-4), 则称向量 c 为向量 a 与 b 的和, 记作

$$a + b = c.$$

这种规定向量加法的方法叫做向量加法的平行四边形法则.

由图 6-4 能看到, 向量 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} = b$, 所以也可以这样来规定向量的加法: 将向量 b 平移, 使它的起点与向量 a 的终点重合, 把以向量 a 的起点为起点, 向量 b 的终点为终点的向量记为 c (图 6-5), 那么向量 c 就是向量 a 与 b 的和. 这种方法叫做向量加法的三角形法则.

当向量 a 与 b 平行时, 我们仍然按照向量加法的三角形法则来规定向量 a 与 b 的和: 将向量 b 平移, 使它的起点与向量 a 的终点重合, 记 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{AB} = b$, 那么向量 $\overrightarrow{OB} = c$ 就称为向量 a 与 b 的和.

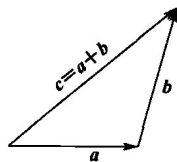


图 6-5

两个向量加法的三角形法则可以推广到多个向量相加的情形. 例如, 已给四个向量 a, b, c, d , 以向量 a 的终点为起点作出向量 b (即将向量 b 平移, 使它的起点与 a 的

终点重合),再以向量 b 的终点为起点作出向量 c ,然后以向量 c 的终点为起点作出向量 d ,则以向量 a 的起点为起点,向量 d 的终点为终点的向量 e 就称为向量 a, b, c, d 的和,记作

$$e = a + b + c + d,$$

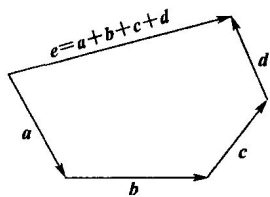


图 6-6

如图 6-6 所示.这种方法叫做向量加法的多边形法则.

向量加法满足以下运算性质:

- (1) 交换律 $a + b = b + a$;
- (2) 结合律 $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$;
- (3) $a + 0 = a$;
- (4) $a + (-a) = 0$.

利用负向量的概念,我们可以规定两个向量 a 与 b 的差为

$$a - b = a + (-b).$$

由图 6-7 可看到, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} = a + (-b) = a - b$,因此向量 a 与 b 的差可这样作出:把向量 a 与 b 移至同一个起点,那么以向量 b 的终点为起点,向量 a 的终点为终点的向量 $\overrightarrow{AB}$ 就是向量 a 与 b 的差 $a - b$.特别是当 $a = b$ 时,点 A 与 B 重合,所以 $a - b = 0$;反之,若 $a - b = 0$ 时,则有 $a = b$.

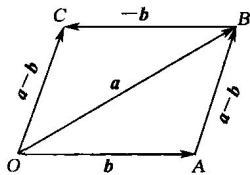


图 6-7

2. 数与向量的乘法

我们规定:数 λ 与向量 a 的乘积 λa 是一个平行于向量 a 的向量,它的模是向量 a 的模的 $|\lambda|$ 倍,即

$$|\lambda a| = |\lambda| |a|,$$

它的方向由 λ 的符号所决定:当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 的方向相同;当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 的方向相反;当 $\lambda = 0$ 时,规定 λa 是零向量.

数与向量的乘法满足以下运算性质:

- (1) 结合律 $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a = \mu(\lambda a)$ (λ, μ 是数);
- (2) 分配律 $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ (λ, μ 是数);
- $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ (λ 是数)

与非零向量 a 的方向相同的单位向量叫做 a 的单位向量,记作 e_a .根据数与向量的乘法知,向量 $\frac{1}{|a|}a$ 与向量 a 方向相同,且模为 $\frac{1}{|a|}|a| = 1$,故它是 a 的单位向量,即

$$\boxed{e_a = \frac{1}{|a|}a}, \quad \text{或写成} \quad \boxed{e_a = \frac{a}{|a|}}. \quad (6.1.1)$$

例 1 设 M_1 和 M_2 为数轴上坐标分别为 x_1 和 x_2 的两点, e 为与数轴正向一致的单位向量(图 6-8), 验证 $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)e$.

证明 当 $x_2 - x_1 > 0$ 时, $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 e 同方向(图 6-8(a)), 且 $|\overrightarrow{M_1M_2}| = x_2 - x_1$, 所以 $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)e$;

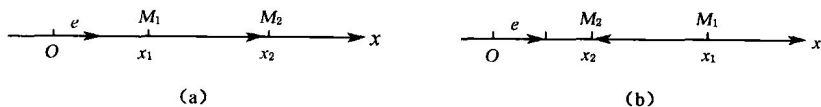


图 6-8

当 $x_2 - x_1 < 0$ 时, $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 e 反向(图 6-8(b)), 且 $|\overrightarrow{M_1M_2}| = x_1 - x_2$, 所以有 $\overrightarrow{M_1M_2} = -(x_1 - x_2)e = (x_2 - x_1)e$;

当 $x_2 - x_1 = 0$ 时, $\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{0}$, 而 $(x_2 - x_1)e = \mathbf{0}$, 从而也有 $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)e$.

综上所述, 即证得 $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)e$.

根据数与向量相乘的法则, 我们还能得到两个向量平行的充要条件.

定理 两个非零向量 a 和 b 平行的充分必要条件是: 存在不为零的数 λ , 使得下面的等式:

$$a = \lambda b$$

(6.1.2)

成立.

证明 充分性是显然的, 仅需证明必要性. 设向量 a 和 b 平行, 且有相同的方向, 取 $\lambda = \frac{|a|}{|b|}$, 则 λb 与 b 有相同的方向, 故与 a 也有相同的方向. 又 λb 的模为

$$|\lambda b| = |\lambda| |b| = \frac{|a|}{|b|} |b| = |a|,$$

所以

$$a = \lambda b.$$

如果向量 a 与 b 平行, 而方向相反, 这时只要取 $\lambda = -\frac{|a|}{|b|}$, 则 λb 与 b 的方向相反, 故它与 a 的方向相同. 又 λb 的模为 $|\lambda b| = |\lambda| |b| = |a|$, 所以仍有 $a = \lambda b$.

例 2 在三角形 ABC 中(图 6-9), D, E 分别为边 AC 和 BC 的中点, 证明 $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$.

证明 设 $\overrightarrow{BC} = a$, $\overrightarrow{AC} = b$, 则由向量加法的三角形法则, 有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = b - a.$$

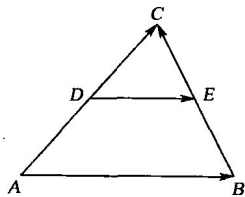


图 6-9

又因为 D, E 分别为 AC 和 BC 的中点, 所以

$$\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \mathbf{a}.$$

在 $\triangle DEC$ 中,

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2} \mathbf{b} - \frac{1}{2} \mathbf{a} = \frac{1}{2} (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

即证得 $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$.

习题 6.1

1. 已知向量 $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$, $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$, 试用向量 $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ 表示 $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.
2. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线向量为 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b}$, 试用向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.
3. 设 $ABCDEF$ 是一个正六边形, $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AF}$, 试用 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 表示 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$.
4. 设平面上一个四边形的对角线相互平分, 试用向量的方法证明它是平行四边形.
5. 已知平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 交于 E , 又 O 是任意一点, 试证 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OE}$.
6. 根据向量加法的平行四边形法则说明 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$, 并指出等号何时成立.

答 案

1. $3\mathbf{m} - 7\mathbf{n}$.
2. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.
3. $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{DE} = -\mathbf{a}$, $\overrightarrow{EF} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.
4. 略.
5. 略.
6. 当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 方向相同时等号成立.

6.2 空间直角坐标系与向量的坐标

6.2.1 空间直角坐标系

在空间内取定一点 O , 过点 O 作三条具有相同的长度单位, 且两两互相垂直的数轴—— x 轴、 y 轴、 z 轴, 这样就称建立了空间直角坐标系 $Oxyz$. 点 O 称为坐标原点, 简称原点. 三条坐标轴统称为坐标轴. x 轴、 y 轴、 z 轴又分别叫做横轴、纵轴、竖轴. 通常规定 x 轴、 y 轴和 z 轴的位置要遵循右手系法则, 即当右手的四个手指指向 x 轴的正向, 然后握拳转向 y 轴的正向时, 大拇指所指的方向应是 z 轴的正向(图 6-10).

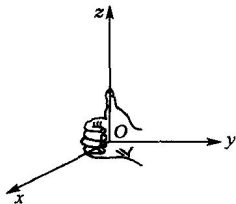


图 6-10

由任意两条坐标轴所确定的平面称为坐标面, 由 x 轴和 y

轴, y 轴和 z 轴, z 轴和 x 轴所确定的坐标面依次叫做 xOy 面, yOz 面和 zOx 面. 三个坐标面把空间分隔成八个部分, 每个部分称为卦限. 这八个部分依次叫做第一至第八卦限. 第一至第四卦限在 xOy 面的上方, 它们按逆时针方向排列; 第五至第八卦限在 xOy 面下方, 它们也按逆时针方向排列, 其中第五卦限在第一卦限的下方.

现在讨论在空间直角坐标系中, 空间内的点与三个数组成的有序数组之间的对应关系.

设点 M 是空间内任一定点, 过点 M 分别作垂直于三条坐标轴的平面, 它们分别交 x 轴、 y 轴、 z 轴于点 P , Q , R (图 6-11). 设 P , Q , R 在三条坐标轴上的坐标依次为 x , y , z , 于是按照上面的作法, 点 M 唯一地确定了一组有序数组: x , y , z . 反之, 如果任意给定一组有序数组: x , y , z , 总能在三条坐标轴上找到以它们为坐标的点 P , Q , R . 过这三点分别作垂直于坐标轴的平面, 三个平面必然交于点 M . 由此可见, 点 M 和有序数组: x , y , z 之间存在着——对应的关系. 有序数组 x , y , z 称为点 M 的坐标, 又分别叫做横坐标, 纵坐标和竖坐标. 这时点 M 可记作 $M(x, y, z)$.

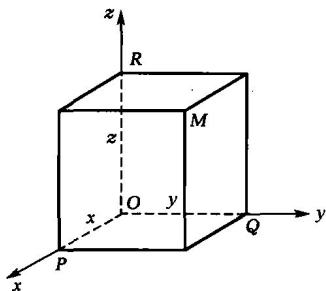


图 6-11

显然, 原点 O 可记作为 $O(0, 0, 0)$. 若点 M 在坐标轴上, 则必有两个坐标等于零. 例如, 点 M 在 x 轴上, 则可记为 $M(x, 0, 0)$. 若点 M 在坐标面上, 则必有一坐标等于零. 例如, 点 M 在 xOy 面上, 则可记为 $M(x, y, 0)$; 规定在第一卦限内的点的坐标均大于零, 即 $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

下面推导空间内两点间的距离公式.

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间内两点, 它们的连线和三条坐标轴都不平行. 过点 M_1 和 M_2 , 分别作三个垂直于坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以线段 M_1M_2 为对角线的长方体, 其中长方体的棱 M_1P , M_1Q , M_1R 分别平行于 x 轴、 y 轴、 z 轴 (图 6-12). 根据几何知识, 长方体的对角线 M_1M_2 的长的平方应等于三条棱长的平方和. 于是有

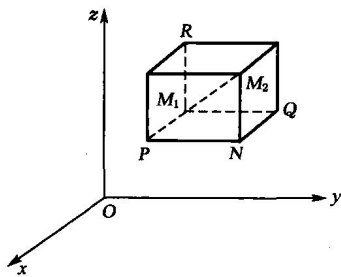


图 6-12

$$|M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2.$$

由于线段 M_1P 与 x 轴平行, 且点 M_1 与点 P 的横坐标分别为 x_1 , x_2 , 故有 $|M_1P| = |x_2 - x_1|$. 同理有 $|M_1Q| = |y_2 - y_1|$, $|M_1R| = |z_2 - z_1|$. 将它们代入上式, 我们就得到空间内两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 间的距离公式:

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (6.2.1)$$

特殊地,点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 1 在 z 轴上求与点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点.

解 由于所求的点在 z 轴上,故可设它为 $M(0, 0, z)$. 根据题意有

$$|MA| = |MB|,$$

于是有

$$\sqrt{(-4-0)^2 + (1-0)^2 + (7-z)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2 + (-2-z)^2},$$

两边平方去根号,整理后得

$$18z = 28,$$

从而 $z = \frac{14}{9}$. 所以,所求的点为 $M(0, 0, \frac{14}{9})$.

6.2.2 向量的坐标

1. 向径的坐标表示式

在空间直角坐标系中,设 i, j, k 分别表示 x, y, z 轴正向的单位向量,并称它们为坐标系的基向量(或基本单位向量).

设 $M(x, y, z)$ 为空间内一点,则 $\overrightarrow{OM}$ 为点 M 的向径. 过点 M 作三个分别与 x, y, z 轴垂直的平面,依次交 x, y, z 轴于点 P, Q, R (图 6-13). 根据向量加法的法则,可得

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OR},$$

而

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ},$$

故得

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.$$

由于点 M 的坐标为 (x, y, z) , 原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$, 于是由 6.1 节中例 1 的结果,可得

$$\overrightarrow{OP} = xi, \overrightarrow{OQ} = yj, \overrightarrow{OR} = zk.$$

因此

$$\overrightarrow{OM} = xi + yj + zk.$$

(6.2.2)

式(6.2.2)称为向径 $\overrightarrow{OM}$ 按基向量的分解式. x, y, z 称为向径 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标. $\overrightarrow{OM}$ 也常

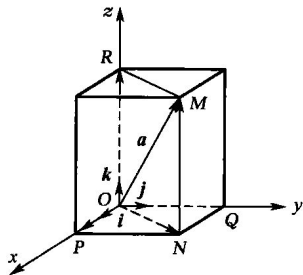


图 6-13