G A O D E N G S H U X U E

普通高等教育数学基础课程“十二五”规划教材

（经管类）高等数学 下册

同济大学数学系 刘浩荣 郭景德 蔡林福 董力强 编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本套教材按照教育部最新制定的"经济管理类本科数学基础课程教学基本要求"编写，分上、下两册．此为下册，共4章内容，包括：向量代数与空间解析几何，多元函数微积分及其应用，无穷级数，常微分方程与差分方程简介等．书中每节后均配有适量的习题，每章之末均配有复习题．为方便读者查阅参考，在所附习题和复习题之后，都附有答案或提示．

本套教材条理清晰，论述确切；由浅入深，循序渐进；重点突出，难点分散；例题较多，典型性强；深广度恰当，便于教和学．它可作为普通高等院校(特别是"二本"及"三本"院校)或成人高校经管类本科或专升本学生"高等数学"课程的教材，也可供从事经济管理或金融工作的人员，或参加国家自学考试的读者，作为自学用书或参考书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：经管类．下册／刘浩荣等编著．—上海：同济大学出版社，2012．4
ISBN 978-7-5608-4808-2

Ⅰ．①高… Ⅱ．①刘… Ⅲ．①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第045567号

普通高等教育数学基础课程"十二五"规划教材
高等数学(经管类)下册
同济大学数学系　刘浩荣　郭景德　蔡林福　董力强　编著
组稿 曹　建　吴丽丽　**责任编辑** 张　莉　**责任校对** 徐春莲　**封面设计** 潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn
(上海市四平路1239号　邮编:200092　电话:021-65985622)
经　　销　全国各地新华书店
印　　刷　同济大学印刷厂
开　　本　787 mm×960 mm　1/16
印　　张　15
字　　数　300 000
印　　数　1—4 100
版　　次　2012年4月第1版　2012年4月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5608-4808-2

定　　价　27.00元

前　言

近几年来，我国高等教育有了较大的发展，为适应部分高等院校经管类专业（“二本”、“三本”）的教学需要，我们应同济大学出版社之约，遵照教育部最新制定的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”（以下简称“教学基本要求”），编写了这套《高等数学》（经管类）教材. 本教材分上、下两册，共 9 章内容，包括：函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，向量代数与空间解析几何，多元函数微积分及其应用，无穷级数，常微分方程与差分方程简介等.

编写本教材的基本思路是：精简冗余内容，压缩叙述篇幅；降低教学难度，突出应用特色. 为使教材具有科学性、知识性、可读性和实用性，我们注意采取了以下一些措施：

(1) 内容“少而精”，取材紧扣“教学基本要求”. 与同类教材相比，我们删去了“函数”中与中学知识重复的内容；在“不定积分”一章中删去了“有理函数”及“三角函数有理式”的积分；在“极限”部分，除了用极限的精确定义推证出必需的基本极限公式外，一般对用精确定义证明极限的例题或习题均降低难度，不作教学要求. 从而尽量降低难度，压缩篇幅. 对于某些超出“教学基本要求”而属于教学中可讲可不讲的内容，即使编入，也均以 * 号标记或用小号字排版，以供不同专业的教师和学生选用或参考.

(2) 在着重讲清数学知识概念和有关理论方法的同时，适当淡化某些定理的证明或公式推导的严密性. 例如，根据“教学基本要求”，我们对三个微分中值定理的严格证明均予以省略，只叙述定理的条件和结论，并借助几何图形较为直观地解释其几何意义. 此外，对于某些较为繁复的计算或公式推导，能删去的就删去，不能删去的便略去其计算或推导的过程.

(3) 在对教材中各章、节内容的组织上，考虑到应具有科学性和可读性. 除了书写的文字尽量通顺流畅外，还注意做到：由浅入深，循序渐进；重点突出，难点分散. 例如，在讲重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 时，为分散此教学难点，采用了“分两步走”的方法. 先在数列极限存在的单调有界准则基础上，用数据列表的方式，直观地说明数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的极限存在，且定义 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$. 然后，在讲“两个重要极限”时，再就 $x\to+\infty$ 时，利用函数极限存在的夹逼准则，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$. 最后，推广

到 $x\to-\infty$ 的情形，从而得到完整的极限公式：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$. 此外，即使是安排每节中所选配的例题，也应遵循"由简单到复杂，由具体到抽象"的原则. 当引入某种新的数学概念时，尽量按照"实践 — 认识 — 实践"的认识规律，先由实际引例出发，抽象出数学概念，从而上升到理论阶段(包括有关性质和计算方法等)，再回到实践中去应用. 为体现教材的科学性，我们特别注意防止前后内容的脱节，即使遇到个别地方需要提前用到后面的知识内容时，也都以适当的方式加以交代说明. 例如，在讲"两个重要极限"时，举例中常要用到利用复合函数连续性求极限的方法，因尚未介绍函数的连续性，故在前面介绍复合函数的极限法则时，顺便给出了一个定理，说明求复合函数极限可以交换极限与函数记号次序的条件，这样便可把复合函数的极限法则先使用起来，而到讲过复合函数的连续性后，再用函数的连续性把前面引入的定理加以叙述，从而做到前后内容互相呼应，融会贯通.

(4) 为使教材突出应用特色，且具有知识性和实用性，我们在微积分应用方面，主要侧重于在几何及经济分析中的一些简单应用. 例如，在定积分的几何应用中，只介绍"平面图形的面积"，"平行截面面积为已知的立体"及"绕坐标轴旋转的旋转体"的体积；在二重积分的应用中，也只介绍"立体的体积"，"曲面的面积"及"平面薄片的质心"等. 与同类教材相比，舍去了"平面曲线的弧长"及"平面薄片的转动惯量"等与经管类专业关系不太大的内容. 此外，突出在经济分析中的应用，希望成为本书的特色之一. 为此，我们参考了许多同类教材，除了编入一般常见的经济分析应用范例外，还特地邀请了同济大学数学系金融数学博士任学敏副教授，为我们提供了不少金融数学的应用实例. 例如，连续复利资金流量的现值，购买债券时确定债券首日购入的价格，股票市场中的"零增长模型"及"不变增长模型"的股价计算等. 另外，为使教材在应用方面更贴近生活，具有实用性，我们在"无穷级数"和"常微分方程与差分方程简介"中，特意选编了有关银行存款的本金计算，债券市场无风险利率，购房贷款及筹措教育经费存款等数学模型. 我们相信，这些应用方面的知识内容不仅有趣，而且有较好的参考价值.

(5) 按照"学练结合，学以致用"的原则，本教材在各节之后均配置了适量的习题作业，在每章之末也都选配了复习题，且为方便读者查阅参考，在习题和复习题之后，均附有答案或提示.

参加本教材编写的有蔡林福(第 1,2,3 章)，董力强(第 4,5 章)，郭景德(第 6,7 章)，刘浩荣(第 8,9 章). 全书由刘浩荣、蔡林福统稿，最后由刘浩荣润笔定稿并选编了附录.

本教材由北京航空航天大学李心灿教授主审. 他虽年事已高，工作繁忙，但仍在百忙中详细审阅了全书，并提出了许多宝贵建议及具体的修改意见，我们深受感悟，谨此表示诚挚而衷心的感谢!

在本教材的编写过程中，我们主要参考了同济大学出版社出版的由刘浩荣、郭景

德编著的《高等数学》(理工类)上、下册及由赵利彬主编的《高等数学》(经管类)上、下册;高等教育出版社出版的,由同济大学数学系编写的《高等数学》(第6版)及由教育部高等教育司组编、北京航空航天大学李心灿教授主编的《高等数学》等教材.此外,本教材的编写和出版,除了得到金融数学博士任学敏副教授的大力支持外,还得到同济大学出版社曹建副总编辑的大力鼎助.在此,我们一并表示衷心的感谢!

本套教材条理清晰,论述确切;由浅入深,循序渐进;重点突出,难点分散;例题较多,典型性强;深广度恰当,便于教和学.它可作为普通高校(特别是"二本"及"三本"院校)或成人高校经管类本科或专升本学生的"高等数学"课程的教材,也可供从事经济管理或金融工作的人员,或参加国家自学考试的读者,作为自学用书或参考书.

由于我们水平有限,书中难免会有不当或错误之处,恳请广大读者和同行批评指正.

编　者

2012年4月于同济大学

目　　录

第 6 章　向量代数与空间解析几何

向量是解决许多数学、物理、力学及工程技术问题的有力工具，在学习空间解析几何时，将看到它的应用. 本章前半部分侧重介绍如何在空间直角坐标系中，建立向量的坐标表示式，用代数的方法讨论向量的运算.

用代数的方法研究空间几何图形，是空间解析几何的主要内容. 掌握图形与方程的对应关系，对学习多元函数微积分是十分重要的. 本章后半部分主要讨论空间平面和空间直线及其方程，介绍一些常用的空间曲面.

6.1　向量及其线性运算

6.1.1　向量的概念

在日常生活中，我们常会遇见两种不同类型的量：一类是只有大小的量，如长度、面积、体积、温度等，它们称为**数量**或**标量**；另一类量，不仅有大小，而且有方向，如速度、加速度、力、位移等，它们称为**向量**或**矢量**.

几何上，常用一条规定了起点和终点的有方向的线段，又称为有向线段来表示向量. 以点 A 为起点，点 B 为终点的向量，记作 $\overrightarrow{AB}$（图 6-1）. 有时也常用一个黑体字母来表示向量，如 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{F}$ 等（书写时，常在字母上方标上箭头来表示，如 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{F}$ 等）. 起点在原点 O，终点在点 M 的向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 的**向径**，常记作 $\boldsymbol{r}$（书写时记作 $\vec{r}$）.

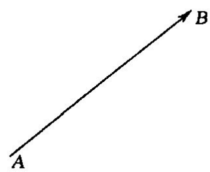

图 6-1

向量的大小称为**向量的模**，向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 和 $|\boldsymbol{a}|$（或 $|\vec{a}|$）. 模为零的向量叫做**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$（或 $\vec{0}$）. 零向量的起点和终点是重合的，规定它的方向是可以任意的. 模等于 1 的向量叫做**单位向量**.

在实际问题中，有的向量与其起点有关，有的向量与其起点无关. 但是，它们都有一个共同的特征：都有大小和方向. 因此，数学上研究向量时，通常只考虑向量的大小和方向，并不关心向量的起点在何处，这种与起点无关的向量称为**自由向量**.

由于我们只讨论自由向量，所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是**相等**的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

如果一个向量与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等、方向相反，则称它是向量 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作

$-\boldsymbol{a}$.

如果两个非零向理$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的方向相同或者相反，则称向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$**平行**，记作$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可以是任意的，因此可以认为零向量与任何向量都平行.

下面介绍两个向量夹角的概念. 设给定两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，将向量$\boldsymbol{a}$或$\boldsymbol{b}$平移，使它们的起点重合，它们所在射线的夹角$\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**（图 6-2），记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 显然，当 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$ 时，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有一个是零向量时，规定它们的夹角可以在$[0,\ \pi]$中任意取值.

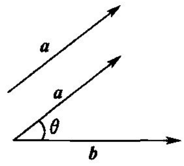

图 6-2

6.1.2　向量的线性运算

向量的加法，数与向量的乘法，统称为**向量的线性运算**.

1. 向量的加法

我们在中学学习物理时已知道，作用在同一点的两个不平行的力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$，它们的合力 $\boldsymbol{F}$ 可以用平行四边形法则来确定（图 6-3）. 向量的加法也是用相同的方法规定的.

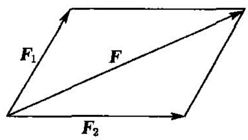

图 6-3

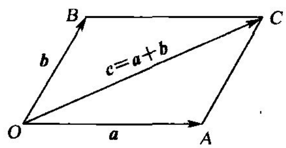

图 6-4

设有两个不平行的非零向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$. 将向量$\boldsymbol{a}$（或$\boldsymbol{b}$）平移，使它的起点与向量$\boldsymbol{b}$（或$\boldsymbol{a}$）的起点重合，记$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以 OA 和 OB 为边作一个平行四边行 $OACB$，记对角线的向量$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$（图 6-4），则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**，记作

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}.$$

这种规定向量加法的方法叫做**向量加法的平行四边形法则**.

由图 6-4 能看到，向量$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，所以也可以这样来规定向量的加法：将向量$\boldsymbol{b}$平移，使它的起点与向量$\boldsymbol{a}$的终点重合，把以向量$\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量记为$\boldsymbol{c}$（图 6-5），那么向量 $\boldsymbol{c}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和. 这种方法叫做**向量加法的三角形法则**.

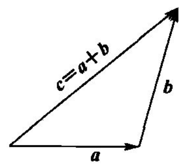

图 6-5

当向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行时，我们仍然按照向量加法的三角形法则来规定向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和：将向量 $\boldsymbol{b}$ 平移，使它的起点与向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，记$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，那么向量$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$ 就称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和.

两个向量加法的三角形法则可以推广到多个向量相加的情形. 例如，已给四个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点为起点作出向量$\boldsymbol{b}$（即将向量$\boldsymbol{b}$平移，使它的起点与$\boldsymbol{a}$的

终点重合)，再以向量$\boldsymbol{b}$的终点为起点作出向量$\boldsymbol{c}$，然后以向量$\boldsymbol{c}$的终点为起点作出向量$\boldsymbol{d}$，则以向量$\boldsymbol{a}$的起点为起点，向量$\boldsymbol{d}$的终点为终点的向量$\boldsymbol{e}$就称为向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$的和，记作

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d},$$

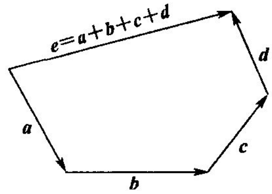

图 6-6

如图 6-6 所示. 这种方法叫做**向量加法的多边形法则**.

向量加法满足以下运算性质：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$;

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

利用负向量的概念，我们可以规定两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

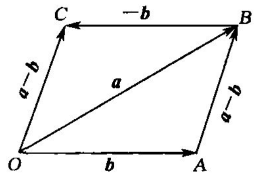

图 6-7

由图 6-7 可看到，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，因此向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差可这样作出：把向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$移至同一个起点，那么以向量$\boldsymbol{b}$的终点为起点，向量$\boldsymbol{a}$的终点为终点的向量$\overrightarrow{AB}$就是向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的差$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 特别是当$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$时，点$A$与$B$重合，所以$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；反之，若$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$时，则有$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

2. 数与向量的乘法

我们规定：数λ与向量$\boldsymbol{a}$的**乘积**$\lambda\boldsymbol{a}$是一个平行于向量$\boldsymbol{a}$的向量，它的模是向量$\boldsymbol{a}$的模的$|\lambda|$倍，即

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向由λ的符号所决定：当$\lambda>0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$的方向相同；当$\lambda<0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$的方向相反；当$\lambda=0$时，规定$\lambda\boldsymbol{a}$是零向量.

数与向量的乘法满足以下运算性质：

(1) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$　(λ, μ是数);

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$　(λ, μ是数);

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$　(λ是数)

与非零向量$\boldsymbol{a}$的方向相同的单位向量叫做$\boldsymbol{a}$的单位向量，记作$\boldsymbol{e}_a$. 根据数与向量的乘法知，向量$\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{a}$方向相同，且模为$\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=1$，故它是$\boldsymbol{a}$的单位向量，即

$$\boxed{\boldsymbol{e}_a=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a},}\qquad \text{或写成}\qquad \boxed{\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.}\tag{6.1.1}$$

例 1 设 M_1 和 M_2 为数轴上坐标分别为 x_1 和 x_2 的两点，$\boldsymbol{e}$ 为与数轴正向一致的单位向量(图 6-8)，验证 $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{e}$.

证明 当 $x_2 - x_1 > 0$ 时，$\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 同方向(图 6-8(a))，且 $|\overrightarrow{M_1M_2}| = x_2 - x_1$，所以 $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{e}$；

(a) (b)

图 6-8

当 $x_2 - x_1 < 0$ 时，$\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 反向(图 6-8(b))，且 $|\overrightarrow{M_1M_2}| = x_1 - x_2$，所以有 $\overrightarrow{M_1M_2} = -(x_1 - x_2)\boldsymbol{e} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{e}$；

当 $x_2 - x_1 = 0$ 时，$\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{0}$，而 $(x_2 - x_1)\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$，从而也有 $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{e}$.

综上所述，即证得 $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{e}$.

根据数与向量相乘的法则，我们还能得到两个向量平行的充要条件.

定理 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是：存在不为零的数 λ，使得下面的等式：

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}} \tag{6.1.2}$$

成立.

证明 充分性是显然的，仅需证明必要性. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行，且有相同的方向，取 $\lambda = \dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$，则 $\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有相同的方向，故与 $\boldsymbol{a}$ 也有相同的方向. 又 $\lambda\boldsymbol{b}$ 的模为

$$|\lambda\boldsymbol{b}| = |\lambda||\boldsymbol{b}| = \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|,$$

所以

$$\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}.$$

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，而方向相反，这时只要取 $\lambda = -\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$，则 $\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反，故它与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同. 又 $\lambda\boldsymbol{b}$ 的模为 $|\lambda\boldsymbol{b}| = |\lambda||\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|$，所以仍有 $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$.

例 2 在三角形 ABC 中(图 6-9)，D，E 分别为边 AC 和 BC 的中点，证明 $\overrightarrow{DE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

证明 设 $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$，则由向量加法的三角形法则，有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}.$$

又因为 D，E 分别为 AC 和 BC 的中点，所以

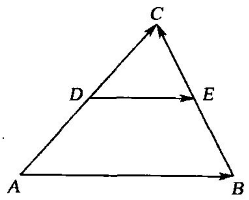

图 6-9

$$\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}.$$

在$\triangle DEC$中，

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

即证得$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

习题 6.1

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$，试用向量 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 表示 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

2. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线向量为$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DA}$.

3. 设 $ABCDEF$ 是一个正六边形，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AF}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{EF}$.

4. 设平面上一个四边形的对角线相互平分，试用向量的方法证明它是平行四边形.

5. 已知平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 交于 E，又 O 是任意一点，试证$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OE}$.

6. 根据向量加法的平行四边形法则说明 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，并指出等号何时成立.

答　案

1. $3\boldsymbol{m}-7\boldsymbol{n}$.　2. $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，$\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

3. $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DE}=-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{EF}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

4. 略.　5. 略.　6. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时等号成立.

6.2　空间直角坐标系与向量的坐标

6.2.1　空间直角坐标系

在空间内取定一点 O，过点 O 作三条具有相同的长度单位，且两两互相垂直的数轴——x 轴、y 轴、z 轴，这样就称建立了空间直角坐标系 $Oxyz$. 点 O 称为**坐标原点**，简称**原点**. 三条坐标轴统称为**坐标轴**. x 轴、y 轴、z 轴又分别叫做**横轴、纵轴、竖轴**. 通常规定 x 轴，y 轴和 z 轴的位置要遵循**右手系**法则，即当右手的四个手指指向 x 轴的正向，然后握拳转向 y 轴的正向时，大拇指所指的方向应是 z 轴的正向(图 6-10).

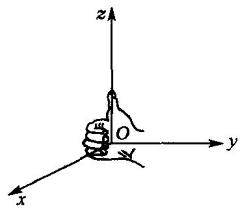

图 6-10

由任意两条坐标轴所确定的平面称为**坐标面**，由 x 轴和 y

轴，y 轴和 z 轴，z 轴和 x 轴所确定的坐标面依次叫做 xOy 面，yOz 面和 zOx 面. 三个坐标面把空间分隔成八个部分，每个部分称为**卦限**. 这八个部分依次叫做第一至第八卦限. 第一至第四卦限在 xOy 面的上方，它们按逆时针方向排列；第五至第八卦限在 xOy 面下方，它们也按逆时针方向排列，其中第五卦限在第一卦限的下方.

现在讨论在空间直角坐标系中，空间内的点与三个数组成的有序数组之间的对应关系.

设点 M 是空间内任一定点，过点 M 分别作垂直于三条坐标轴的平面，它们分别交 x 轴、y 轴、z 轴于点 P，Q，R(图 6-11). 设 P，Q，R 在三条坐标轴上的坐标依次为 x，y，z，于是按照上面的作法，点 M 唯一地确定了一组有序数组：x，y，z. 反之，如果任意给定一组有序数组：x，y，z，总能在三条坐标轴上找到以它们为坐标的点 P，Q，R. 过这三点分别作垂直于坐标轴的平面，三个平面必然交于点 M. 由此可见，点 M 和有序数组：x，y，z 之间存在着一一对应的关系. 有序数组 x，y，z 称为点 M 的**坐标**，又分别叫做**横坐标**，**纵坐标**和**竖坐标**. 这时点 M 可记作 $M(x, y, z)$.

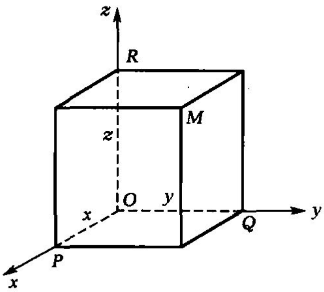

图 6-11

显然，原点 O 可记作为 $O(0, 0, 0)$. 若点 M 在坐标轴上，则必有两个坐标等于零. 例如，点 M 在 x 轴上，则可记为 $M(x, 0, 0)$. 若点 M 在坐标面上，则必有一坐标等于零. 例如，点 M 在 xOy 面上，则可记为 $M(x, y, 0)$；规定在第一卦限内的点的坐标均大于零，即 $x>0$，$y>0$，$z>0$.

下面推导空间内两点间的距离公式.

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间内两点，它们的连线和三条坐标轴都不平行. 过点 M_1 和 M_2，分别作三个垂直于坐标轴的平面，这六个平面围成一个以线段 M_1M_2 为对角线的长方体，其中长方体的棱 M_1P，M_1Q，M_1R 分别平行于 x 轴、y 轴、z 轴(图 6-12). 根据几何知识，长方体的对角线 M_1M_2 的长的平方应等于三条棱长的平方和. 于是有

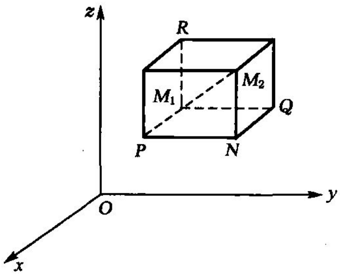

图 6-12

$$|M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2.$$

由于线段 M_1P 与 x 轴平行，且点 M_1 与点 P 的横坐标分别为 x_1，x_2，故有 $|M_1P| = |x_2 - x_1|$. 同理有 $|M_1Q| = |y_2 - y_1|$，$|M_1R| = |z_2 - z_1|$. 将它们代入上式，我们就得到空间内两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 间的距离公式：

$$\boxed{d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.} \qquad (6.2.1)$$

特殊地，点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$\boxed{d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z_2}.}$$

例 1 在 z 轴上求与点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点.

解 由于所求的点在 z 轴上，故可设它为 $M(0, 0, z)$. 根据题意有

$$|MA| = |MB|,$$

于是有

$$\sqrt{(-4-0)^2+(1-0)^2+(7-z)^2} = \sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2},$$

两边平方去根号，整理后得

$$18z = 28,$$

从而 $z = \frac{14}{9}$. 所以，所求的点为 $M\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$.

6.2.2 向量的坐标

1. 向径的坐标表示式

在空间直角坐标系中，设 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别表示 x, y, z 轴正向的单位向量，并称它们为坐标系的**基向量**(或**基本单位向量**).

设 $M(x, y, z)$ 为空间内一点，则 $\overrightarrow{OM}$ 为点 M 的向径. 过点 M 作三个分别与 x, y, z 轴垂直的平面，依次交 x, y, z 轴于点 P, Q, R(图 6-13). 根据向量加法的法则，可得

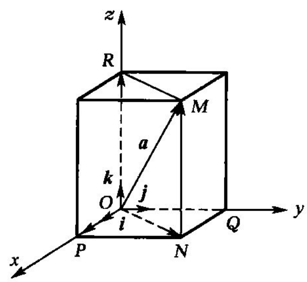

图 6-13

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OR},$$

而

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ},$$

故得

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.$$

由于点 M 的坐标为 (x, y, z)，原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$，于是由 6.1 节中例 1 的结果，可得

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k}.$$

因此

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.} \tag{6.2.2}$$

式(6.2.2)称为**向径 $\overrightarrow{OM}$ 按基向量的分解式**. x, y, z 称为**向径 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标**. $\overrightarrow{OM}$ 也常