

# 码的重量谱 有限射影几何方法

Weight Hierarchy of Codes  
Finite Projective Geometric Approach



陈文德 著  
刘子辉

中国科学技术大学出版社

# 码的重量谱

## 有限射影几何方法

Weight Hierarchy of Codes  
Finite Projective Geometric Approach

陈文德 著  
刘子辉

中国科学技术大学出版社

## 内 容 简 介

码的重量谱(也称为广义汉明重量)是国际上 1991 年提出的新概念,在编码理论中有重要的基本理论意义,并在 II 型窃密信道、码的格子复杂度分析、检错分析等方面有重要应用. 作者与克楼夫教授合作提出用有限射影几何方法确定一般线性码的重量谱,本书是作者及其合作者在这一国际前沿领域研究成果的系统总结. 本书简述了重量谱理论与有限射影几何方法; 确定了 2 类 3 维  $q$  ( $q \leq 5$ ) 元码、9 类 4 维 2 元码、6 类 4 维 3 元码的所有重量谱; 给出了 5 维、6 维  $q$  元码重量谱的新分类; 确定了 4 维  $q$  元码、II 类 5 维  $q$  元码、 $k$  维  $q$  元链码、几乎链码、近链码、断链码的几乎所有重量谱; 总结了用有限射影几何等方法研究格子复杂度、环上码的重量谱、贪婪重量谱、相对重量谱的成果.

本书可供高等院校基础数学、应用数学、信息论、编码理论、密码学等专业的教师和学生使用.

## 图书在版编目(CIP)数据

码的重量谱:有限射影几何方法/陈文德,刘子辉著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2012.1

(当代科学技术基础理论与前沿问题研究丛书:中国科学技术大学校友文库)  
“十二五”国家重点图书出版规划项目

ISBN 978-7-312-02627-0

I. 码… II. ①陈…②刘… III. 有限几何:射影几何 IV. O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 242401 号

出版发行 中国科学技术大学出版社

地址 安徽省合肥市金寨路 96 号,230026

网址 <http://press.ustc.edu.cn>

印 刷 合肥晓星印刷有限责任公司

经 销 全国新华书店

开 本 710 mm×1000 mm 1/16

印 张 17.5

字 数 328 千

版 次 2012 年 1 月第 1 版

印 次 2012 年 1 月第 1 次印刷

定 价 58.00 元

# 总 序

大学最重要的功能是向社会输送人才，培养高质量人才是高等教育发展的核心任务。大学对于一个国家、民族乃至世界的重要性和贡献度，很大程度上是通过毕业生在社会各领域所取得的成就来体现的。

中国科学技术大学建校只有短短的五十余年，之所以迅速成为享有较高国际声誉的著名大学，主要就是因为她培养出了一大批德才兼备的优秀毕业生。他们志向高远、基础扎实、综合素质高、创新能力强，在国内外科技、经济、教育等领域做出了杰出的贡献，为中国科大赢得了“科技英才的摇篮”的美誉。

2008年9月，胡锦涛总书记为中国科大建校五十周年发来贺信，对我校办学成绩赞誉有加，明确指出：半个世纪以来，中国科学技术大学依托中国科学院，按照全院办校、所系结合的方针，弘扬红专并进、理实交融的校风，努力推进教学和科研工作的改革创新，为党和国家培养了一大批科技人才，取得了一系列具有世界先进水平的原创性科技成果，为推动我国科教事业发展和社会主义现代化建设做出了重要贡献。

为反映中国科大五十年来的人才培养成果，展示我校毕业生在科技前沿的研究中所取得的最新进展，学校在建校五十周年之际，决定编辑出版《中国科学技术大学校友文库》50种。选题及书稿经过多轮严格的评审和论证，入选书稿学术水平高，被列入“十一五”国家重点图书出版规划。

入选作者中，有北京初创时期的第一代学生，也有意气风发的少年班毕业生；有“两院”院士，也有中组部“千人计划”引进人才；有海内外科研院所、大专院校的教授，也有金融、IT行业的英才；有默默奉献、矢志报国的科技将军，也有在国际前沿奋力拼搏的科研将才；有“文革”后留美学者中第一位担任美国大学系主任的青年教授，也有首批获得新中国博士学位的中年学者……在母校五十周年华诞之际，他们通过著书立说的独特方式，向母校献

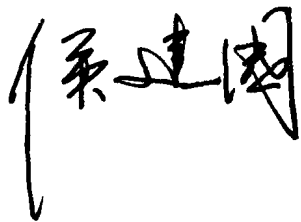
礼，其深情厚谊，令人感佩！

《文库》于 2008 年 9 月纪念建校五十周年之际陆续出版，现已出书 53 部，在学术界产生了很好的反响。其中，《北京谱仪 II：正负电子物理》获得中国出版政府奖；中国物理学会每年面向海内外遴选 10 部“值得推荐的物理学新书”，2009 年和 2010 年，《文库》先后有 3 部专著入选；新闻出版总署总结“‘十一五’国家重点图书出版规划”科技类出版成果时，重点表彰了《文库》的 2 部著作；新华书店总店《新华书目报》也以一本书一个整版的篇幅，多期访谈《文库》作者。此外，尚有十数种图书分别获得中国大学出版社协会、安徽省人民政府、华东地区大学出版社研究会等政府和行业协会的奖励。

这套发端于五十周年校庆之际的文库，能在两年的时间内形成现在的规模，并取得这样的成绩，凝聚了广大校友的智慧和母校的感情。学校决定，将《中国科学技术大学校友文库》作为广大校友集中发表创新成果的平台，长期出版。此外，国家新闻出版总署已将该选题继续列为“十二五”国家重点图书出版规划，希望出版社认真做好编辑出版工作，打造我国高水平科技著作的品牌。

成绩属于过去，辉煌仍待新创。中国科大的创办与发展，首要目标就是围绕国家战略需求，培养造就世界一流科学家和科技领军人才。五十年来，我们一直遵循这一目标定位，积极探索科教紧密结合、培养创新拔尖人才的成功之路，取得了令人瞩目的成就，也受到社会各界的肯定。在未来的发展中，我们依然要牢牢把握“育人是大学第一要务”的宗旨，在坚守优良传统的基础上，不断改革创新，进一步提高教育教学质量，努力践行严济慈老校长提出的“创寰宇学府，育天下英才”的使命。

是为序。



中国科学技术大学校长  
中国科学院院士  
第三世界科学院院士  
2010 年 12 月

# 序

编码理论的创始人之一汉明 (Hamming) 提出了汉明重量. 1991 年华裔通信工程教授魏 (Wei) 以 II 型窃密信道问题为应用背景, 提出了广义汉明重量的概念与理论. 一个  $q$  元有限域上  $k$  维线性码  $C$  的广义汉明重量是一个正整数序列  $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ , 其中  $d_r$  为码  $C$  的  $r$  维子码的最小支撑重量. 此序列常被简称为码  $C$  的重量谱. 重量谱概念一经提出就成为国际前沿研究的热点, 并在编码、密码学中得到多种应用.

数学家出身的信息学教授克楼夫 (Kløve)(IEEE Fellow, 曾任《IEEE Trans. Information Theory》副主编, 挪威卑尔根 (Bergen) 大学理学院副院长) 于 1992 年提出了一个基本理论问题:“一个正整数序列成为重量谱的充要条件是什么?” 或者说, “当且仅当一个序列满足什么条件时存在一个码  $C$ , 使得该序列成为码  $C$  的重量谱?” 满足此充要条件的序列集正好就是  $k$  维  $q$  元一般线性码的所有重量谱, 因此, 问题可重新叙述为:

**问题 1** 如何确定  $k$  维  $q$  元一般线性码的所有重量谱?

当  $k \leq 4$  时, 克楼夫用组合方法确定了 2 元一般线性码的所有重量谱.

1995 年夏, 我第 3 次应克楼夫邀请出访卑尔根大学. 我在出访前做预备研究时发现: 有限射影几何方法可用来研究问题 1. 我用彩色笔画出了 2 维 3 元有限射影空间中各条奇怪的线, 进而确定了 3 维 3 元线性码的所有重量谱. 在卑尔根大学的蓝白色新楼——高科技中心的办公室里, 我与克楼夫兴奋地展望着几何方法的前景: 可打开一小片新天地; 方法框架已有, 但还需智慧、技巧、各种具体方法与大量时间去做具体的研究. 从 1995 年到 2004 年, 在挪威国家研究理事会的支持下, 我 6 次出访卑尔根大学, 累计一年多, 加上通信合作, 10 年间与克楼夫合作发表论文 14 篇, 其中在《IEEE Trans. Information Theory》上发表 4 篇.

多年的研究经验表明: 只能对很小的  $k, q$  值解决问题 1; 当  $q, k$  稍大时,

未知序列的数目急剧增大,呈组合爆炸之势,解决问题 1 是不可能的.为了拓广研究范围,在 2003 年发表的文献 [27] 中,我提出了“几乎所有重量谱”的概念,于是,自然形成了以下问题:

**问题 2** 如何确定  $k$  维  $q$  元一般线性码的几乎所有重量谱?

2000 年以来,我与我的学生及青年教师围绕这两个问题及派生重量谱,扩大成果,发表了一系列论文.

本书系统总结了我们用有限射影几何方法研究码的重量谱的成果.第 1 章简单综述了码的重量谱的理论研究成果,使读者对这一领域有所了解.第 2 章论述了有限射影几何方法,并给出了后面必需的一些基本知识.第 3 章对于 3 维码在  $q \leq 5$  时解决了问题 1.第 4 章对于 4 维 3 元码解决了问题 1,并把 4 维  $q$  元码细分为 9 类,给出了 9 类重量谱的紧上界,确定了 9 类 4 维 2 元码与 6 类 4 维 3 元码的所有重量谱;还在  $k = 4$  时解决了问题 2.第 5 章确定了 II 类 5 维  $q$  元码的几乎所有重量谱(共分为 6 类),给出了 6 维  $q$  元码新的分类.第 6~8 章分别确定了  $k$  维  $q$  元链码、近链码、断链码的几乎所有重量谱.国际学术界在热烈研究重量谱时导出了一系列新的、派生重量谱的概念,如维数/长度轮廓、环上重量谱、贪婪重量谱、相对重量谱.它们往往更复杂,但各有用处.第 9~12 章分别总结了我们用有限射影几何等方法研究上述 4 类派生重量谱的成果.

在当今计算机与数字技术时代,有限域的理论突显重要.重量谱也可用纯数学的语言表达为“ $q$  元有限域上  $k$  维线性空间的各维子空间支撑集的最小尺寸”,因而问题 2 是有限域上线性空间理论中的一个重要问题,从数学研究角度看比问题 1 更重要,提法更合理;若能解决,则与已有的重量谱的广义格里斯末 (Griesmer) 界相比,是一个质的飞跃与重要突破.我们先把 4 维方法开拓到  $k$  维,首次确定了  $k$  维  $q$  元链码的几乎所有重量谱.然后,用子空间集等方法,对基于链码而接近或相邻于链码的近链码、断链码,确定了几乎所有重量谱.但这些相对于全部一般线性码,仅是若干小类,是冰山一角而已.最近,我们探索出了新分类方法,并用落差法研究了 5 维 II 类码,目的就是 5 维出发来探索寻找一般  $k$  维的规律,争取将来逐步逼近与解决问题 2 这个难题.

最后,我感谢本书第 2 作者刘子辉博士,他不仅做出了大量成果,更执笔写了本书第 6~10 章、第 12 章、参考文献,占书的近一半篇幅(其他章节由我执笔);感谢中国科学技术大学出版社编辑们的辛勤工作,才使本书得以顺利出版;感谢克楼夫教授、骆源教授、王勇慧、孙旭顺、徐景,还有胡国香、王丽君、汪政红、夏永波、余伟、程江等,他们与我大力合作,勤奋工作,付

出了心血与汗水, 完成了参考文献中列出的部分相关论文, 使本书有了比较丰富的内容.

我感谢研究生时的导师华罗庚院士、龚昇教授, 他们引领我进入科研的殿堂; 感谢我的大学基础课老师关肇直院士, 他把我调入中国科学院数学研究所工作; 感谢我的专业课老师万哲先院士, 他介绍我出访芬兰, 在那里我认识了克楼夫教授; 感谢我的妻子曹秦宇女士, 她几十年来对我的科研工作全力支持; 感谢中国国家自然科学基金、挪威国家研究理事会等对我们的科研项目的资助.

由于本人学识水平所限, 书中错误与不妥之处在所难免, 恳请读者批评指正.

陈文德

2010 年于北京

# 符号说明

|                                          |                                                                 |
|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $GF(q)$                                  | $q$ 元有限域                                                        |
| $GF(q)^n$                                | $q$ 元有限域上的 $n$ 维向量空间                                            |
| $C[n, k; q]$ 或 $[n, k; q]$ 码 $C$         | 码长为 $n$ 的 $k$ 维 $q$ 元线性码 $C$                                    |
| $W_s(D)$                                 | 子码 $D$ 的支撑重量                                                    |
| $d_r$                                    | 码 $C$ 的第 $r$ 个广义汉明重量                                            |
| $(d_1, d_2, \dots, d_k)$                 | 码 $C$ 的重量谱                                                      |
| $x$                                      | 码 $C$ 的码字, $GF(q)^n$ 中的向量                                       |
| $D_r$                                    | 码 $C$ 的 $r$ 维子码                                                 |
| $(i_0, i_1, \dots, i_{k-1})$             | 码 $C$ 的差序列                                                      |
| $PG(k, q)$ 或 $V_k$                       | $q$ 元有限域上的 $k$ 维射影空间                                            |
| $m(\cdot)$                               | 赋值函数                                                            |
| $M_r$                                    | $PG(k, q)$ 中满足 $m(U_r) = \sum_{j=0}^r i_j$ 的 $r$ 维子空间 $U_r$ 的集合 |
| $p(i, j)$                                | $PG(2, q)$ 中按“坐标”表示的点                                           |
| $p^*$                                    | $PG(k, q)$ 中 $M_0$ 内的点                                          |
| $p_i$                                    | $PG(k, q)$ 中的点, $i$ 为该点对应的首 1、 $q$ 进制数的十进制表示                    |
| $\hat{l}(i)$ 或 $l(j)$                    | $PG(2, q)$ 中按“坐标”表示的线                                           |
| $l^*$                                    | $PG(k, q)$ 中 $M_1$ 内的线                                          |
| $l_i$                                    | $PG(k, q)$ 中按序号 $i$ 表示的线                                        |
| $p(i, j, t)$                             | $PG(3, q)$ 中按“坐标”表示的点                                           |
| $\hat{l}(i, t)$ 或 $l(j, t)$              | $PG(3, q)$ 中按“坐标”表示的线                                           |
| $\overline{AB}$ 或 $\langle A, B \rangle$ | $PG(k, q)$ 中过点 $A, B$ 的线                                        |
| $P(i)$                                   | $PG(3, q)$ 中按“坐标”表示的面                                           |

|                                             |                                            |
|---------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $P_i$                                       | $PG(k, q)$ 中按序号 $i$ 表示的面                   |
| $\widehat{ABC}$ 或 $\langle A, B, C \rangle$ | $PG(k, q)$ 中过点 $A, B, C$ 的面                |
| $P^*$                                       | $PG(k, q)$ 中 $M_2$ 内的面                     |
| $[n, k, d; q]$ 码 $C$                        | 码长为 $n$ 的最小距离为 $d$ 的 $k$ 维 $q$ 元线性码 $C$    |
| $(g_1, g_2, \dots, g_k)$                    | 码 $C$ 的贪婪重量谱                               |
| $((rd)_1, (rd)_2, \dots, (rd)_{k-k_1})$     | 码 $C$ 和子码 $C^1$ 的相对重量谱                     |
| $\mu_q(n, k, d)$                            | 所有 $[n, k, d; q]$ 码 $C$ 的 $g_2 - d_2$ 的极大值 |

“十一五”国家重点图书

## 中国科学技术大学校友文库 第一辑书目

- ◎ *Topological Theory on Graphs*(英文) 刘彦佩
- ◎ *Advances in Mathematics and Its Applications*(英文) 李岩岩、舒其望、沙际平、左康
- ◎ *Spectral Theory of Large Dimensional Random Matrices and Its Applications to Wireless Communications and Finance Statistics*(英文) 白志东、方兆本、梁应昶
- ◎ *Frontiers of Biostatistics and Bioinformatics*(英文) 马双鸽、王跃东
- ◎ *Spectroscopic Properties of Rare Earth Complex Doped in Various Artificial Polymer Structure*(英文) 张其锦
- ◎ *Functional Nanomaterials: A Chemistry and Engineering Perspective*(英文) 陈少伟、林文斌
- ◎ *One-Dimensional Nanostructures: Concepts, Applications and Perspectives*(英文) 周勇
- ◎ *Colloids, Drops and Cells*(英文) 成正东
- ◎ *Computational Intelligence and Its Applications*(英文) 姚新、李学龙、陶大程
- ◎ *Video Technology*(英文) 李卫平、李世鹏、王纯
- ◎ *Advances in Control Systems Theory and Applications*(英文) 陶钢、孙静
- ◎ *Artificial Kidney: Fundamentals, Research Approaches and Advances*(英文) 高大勇、黄忠平
- ◎ *Micro-Scale Plasticity Mechanics*(英文) 陈少华、王自强
- ◎ *Vision Science*(英文) 吕忠林、周逸峰、何生、何子江
- ◎ 非同余数和秩零椭圆曲线 冯克勤
- ◎ 代数无关性引论 朱尧辰
- ◎ 非传统区域 Fourier 变换与正交多项式 孙家昶
- ◎ 消息认证码 裴定一

- ◎完全映射及其密码学应用 吕述望、范修斌、王昭顺、徐结绿、张剑
- ◎摄动马尔可夫决策与哈密尔顿圈 刘克
- ◎近代微分几何:谱理论与等谱问题、曲率与拓扑不变量 徐森林、薛春华、胡自胜、金亚东
- ◎回旋加速器理论与设计 唐靖宇、魏宝文
- ◎北京谱仪Ⅱ·正负电子物理 郑志鹏、李卫国
- ◎从核弹到核电——核能中国 王喜元
- ◎核色动力学导论 何汉新
- ◎基于半导体量子点的量子计算与量子信息 王取泉、程木田、刘绍鼎、王霞、周慧君
- ◎高功率光纤激光器及应用 楼祺洪
- ◎二维状态下的聚合——单分子膜和LB膜的聚合 何平笙
- ◎现代科学中的化学键能及其广泛应用 罗渝然、郭庆祥、俞书勤、张先满
- ◎稀疏金属 翟秀静、周亚光
- ◎SOI——纳米技术时代的高端硅基材料 林成鲁
- ◎稻田生态系统  $\text{CH}_4$  和  $\text{N}_2\text{O}$  排放 蔡祖聪、徐华、马静
- ◎松属松脂特征与化学分类 宋湛谦
- ◎计算电磁学要论 盛新庆
- ◎认知科学 史忠植
- ◎笔式用户界面 戴国忠、田丰
- ◎机器学习理论及应用 李凡长、钱旭培、谢琳、何书萍
- ◎自然语言处理的形式模型 冯志伟
- ◎计算机仿真 何江华
- ◎中国铅同位素考古 金正耀
- ◎辛数学·精细积分·随机振动及应用 林家浩、钟万勰
- ◎工程爆破安全 顾毅成、史雅语、金骥良
- ◎金属材料寿命的演变过程 吴犀甲
- ◎计算结构动力学 邱吉宝、向树红、张正平
- ◎太阳能热利用 何梓年
- ◎静力水准系统的最新发展及应用 何晓业
- ◎电子自旋共振技术在生物和医学中的应用 赵保路
- ◎地球电磁现象物理学 徐文耀
- ◎岩石物理学 陈颢、黄庭芳、刘恩儒
- ◎岩石断裂力学导论 李世愚、和泰名、尹祥础
- ◎大气科学若干前沿研究 李崇银、高登义、陈月娟、方宗义、陈嘉滨、雷孝恩

# 目 次

|                                        |     |
|----------------------------------------|-----|
| 总序 .....                               | i   |
| 序 .....                                | iii |
| 符号说明 .....                             | vii |
| 第 1 章 绪论 .....                         | 1   |
| 1.1 重量谱概念的提出 .....                     | 1   |
| 1.2 重量谱理论简述 .....                      | 2   |
| 第 2 章 有限射影几何方法 .....                   | 5   |
| 2.1 有限射影几何方法的引入 .....                  | 5   |
| 2.2 有限射影几何的基本知识 .....                  | 9   |
| 2.3 一些引理 .....                         | 10  |
| 第 3 章 3 维码的重量谱 .....                   | 16  |
| 3.1 2 维几何方法与重量谱的分类 .....               | 16  |
| 3.2 链码的重量谱 .....                       | 18  |
| 3.2.1 一般 $q$ 元链码的重量谱 .....             | 18  |
| 3.2.2 $q \leq 5$ 时 $q$ 元链码的重量谱 .....   | 22  |
| 3.2.3 7 元链码的重量谱 .....                  | 24  |
| 3.3 无链码的重量谱 .....                      | 25  |
| 3.3.1 一般 $q$ 元无链码的重量谱 .....            | 25  |
| 3.3.2 $q \leq 11$ 时 $q$ 元无链码的重量谱 ..... | 30  |
| 3.4 成果与课题 .....                        | 41  |

|                                               |            |
|-----------------------------------------------|------------|
| <b>第 4 章 4 维码的重量谱</b>                         | <b>42</b>  |
| 4.1 3 维几何方法与重量谱的分类                            | 42         |
| 4.1.1 3 维几何方法                                 | 42         |
| 4.1.2 9 类重量谱                                  | 44         |
| 4.2 一般 $q$ 元码的重量谱                             | 45         |
| 4.2.1 一般 $q$ 元链码的重量谱                          | 45         |
| 4.2.2 9 类 $q$ 元码的重量谱的界                        | 51         |
| 4.2.3 4 维 $q$ 元码的几乎所有重量谱的确定                   | 71         |
| 4.3 4 维 2 元码的 9 类重量谱的确定                       | 74         |
| 4.3.1 射影空间 $PG(3,2)$ 中的点、线、面                  | 74         |
| 4.3.2 差序列的上、下界                                | 74         |
| 4.3.3 A 类                                     | 81         |
| 4.3.4 B 类                                     | 82         |
| 4.3.5 C 类                                     | 84         |
| 4.3.6 D 类                                     | 85         |
| 4.3.7 E 类                                     | 88         |
| 4.3.8 F 类                                     | 94         |
| 4.3.9 G 类                                     | 95         |
| 4.3.10 H 类                                    | 97         |
| 4.3.11 I 类                                    | 100        |
| 4.3.12 小结                                     | 105        |
| 4.4 4 维 3 元码的 6 类重量谱的确定                       | 106        |
| 4.4.1 A 类                                     | 107        |
| 4.4.2 B 类                                     | 111        |
| 4.4.3 C 类                                     | 114        |
| 4.4.4 F 类                                     | 123        |
| 4.4.5 G 类                                     | 126        |
| 4.4.6 I 类                                     | 132        |
| 4.5 4 维 4 元码的重量谱                              | 133        |
| 4.6 成果与课题                                     | 134        |
| <b>第 5 章 5 维、6 维与一般 <math>k</math> 维码的重量谱</b> | <b>135</b> |
| 5.1 5 维码的重量谱                                  | 135        |
| 5.1.1 重量谱的分类                                  | 135        |

|               |                                                              |            |
|---------------|--------------------------------------------------------------|------------|
| 5.1.2         | I 类 .....                                                    | 136        |
| 5.1.3         | II 类 .....                                                   | 137        |
| 5.2           | 6 维码重量谱的分类 .....                                             | 138        |
| 5.3           | 一般 $k$ 维码的重量谱 .....                                          | 142        |
| 5.4           | 成果与课题 .....                                                  | 143        |
| <b>第 6 章</b>  | <b>满足链条件的 <math>k</math> 维 <math>q</math> 元线性码的重量谱 .....</b> | <b>144</b> |
| 6.1           | 关于链条件码 .....                                                 | 145        |
| 6.2           | 链条件码的几乎所有重量谱的确定 .....                                        | 145        |
| 6.3           | 一类小缺陷码的链条件 .....                                             | 147        |
| <b>第 7 章</b>  | <b><math>k</math> 维近链条件码的重量谱 .....</b>                       | <b>152</b> |
| 7.1           | 基本概念和记号 .....                                                | 152        |
| 7.2           | 几乎链条件码 .....                                                 | 153        |
| 7.3           | 近链条件码 .....                                                  | 154        |
| 7.4           | NCDS 的性质 .....                                               | 155        |
| 7.5           | NCDS 数目的计算 .....                                             | 155        |
| 7.5.1         | 上界结构 .....                                                   | 156        |
| 7.5.2         | 一些子空间的集合 .....                                               | 166        |
| 7.5.3         | 一般 NCDS 的结构 .....                                            | 170        |
| 7.5.4         | NCPDS 和 NCDS 数目的计算 .....                                     | 179        |
| <b>第 8 章</b>  | <b>一类断链条件码的重量谱 .....</b>                                     | <b>185</b> |
| 8.1           | 定义和记号 .....                                                  | 185        |
| 8.2           | 上界结构 .....                                                   | 187        |
| 8.3           | $N^\theta \text{CDS}_y$ 的确定 .....                            | 196        |
| <b>第 9 章</b>  | <b>几类线性码的格子复杂度 .....</b>                                     | <b>198</b> |
| 9.1           | 介绍 .....                                                     | 198        |
| 9.2           | 格子复杂度 .....                                                  | 200        |
| 9.3           | 主要结果的证明 .....                                                | 205        |
| <b>第 10 章</b> | <b>有限环上码的重量谱 .....</b>                                       | <b>207</b> |
| 10.1          | 有限交换链环 .....                                                 | 208        |
| 10.2          | 链环上线性码的代数性质 .....                                            | 210        |
| 10.3          | AMDS 码的最小重量码字 .....                                          | 214        |

|               |                               |            |
|---------------|-------------------------------|------------|
| 10.4          | AMDS 码的链条件 .....              | 215        |
| <b>第 11 章</b> | <b>贪婪重量谱 .....</b>            | <b>217</b> |
| 11.1          | $k$ 维码的第 2 个贪婪重量 .....        | 217        |
| 11.2          | 3 维、4 维码与满秩时的贪婪重量 .....       | 221        |
| <b>第 12 章</b> | <b>相对重量谱 .....</b>            | <b>225</b> |
| 12.1          | 记号和相关结论 .....                 | 226        |
| 12.2          | 4 维 $q$ 元线性码 $C$ 的相对重量谱 ..... | 229        |
| 12.2.1        | 关于 $\dim(C^1) = 1$ .....      | 230        |
| 12.2.2        | 关于 $\dim(C^1) = 2$ .....      | 236        |
| 12.2.2        | 关于 $\dim(C^1) = 3$ .....      | 239        |
| 12.3          | 赋值均匀性和子码支撑重量的关系 .....         | 240        |
| <b>参考文献</b>   | <b>.....</b>                  | <b>249</b> |
| <b>索引</b>     | <b>.....</b>                  | <b>258</b> |

# 第 1 章 绪 论

## 1.1 重量谱概念的提出

著名编码学家、编码理论的创始人之一汉明, 提出了码的汉明重量的概念. 设  $C$  为  $q$  元有限域上码长为  $n$ 、维数为  $k$  的线性 (分组) 码, 简记为  $C[n, k; q]$  或  $C$ , 也简称为  $[n, k; q]$  码  $C$ . 它是由  $q$  元有限域上  $k \times n$  矩阵  $G$  的  $k$  个线性无关行向量生成的线性空间.  $G$  称为码  $C$  的生成矩阵.  $C$  中的每个  $n$  维向量称为码字; 一个码字的非零分量个数称为此码字的汉明重量. 码  $C$  的所有码字的汉明重量的最小值称为码  $C$  的最小汉明重量. 2 个码字的不同分量个数称为这 2 个码字的汉明距离. 码  $C$  的所有码字的两两之间的汉明距离的最小值称为码  $C$  的最小汉明距离, 简称为最小距离, 记为  $d_1$ . 由于  $C$  是线性码, 含全零分量码字, 且当  $x, y \in C$  时, 有  $x - y \in C$ ; 所以易证: 码  $C$  的最小汉明重量就是码  $C$  的最小距离  $d_1$ .  $d_1$  是码  $C$  的极为重要和基本的参数: 发方原来发出码字  $x$ , 由于信道有干扰, 收方可能收到错字. 设码  $C$  的纠错能力为  $r$ , 则在纠错译码时, 以码字  $x$  为球心, 与  $x$  的汉明距离  $\leq r$  的错字都被译为  $x$ ; 只有这些球心为  $x$ , 半径为  $r$  的球两两无公共点, 才能正确纠错. 因此有  $r = \lfloor d_1/2 \rfloor - 1$ , 这里  $\lfloor a \rfloor$  表示  $\geq a$  的最小整数. 也就是说,  $d_1$  约为码  $C$  纠错能力的 2 倍, 它给出了码  $C$  的纠错能力.

1991 年, 华裔通信工程教授魏<sup>[143]</sup>提出了广义汉明重量的概念与理论. 把  $[n, k; q]$  码  $C$  的任意子码 (即  $C$  的子空间) 记为  $D$ ,  $D$  中所有码字  $x$  的非零分量位置构成的集合称为  $D$  的支撑, 记为  $\chi(D)$ , 即

$$\chi(D) = \bigcup_{x \in D} \{i | x_i \neq 0, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}. \quad (1.1.1)$$