中专技工学校试用教材

应用数学

YINGYONGSHUXUE

本书编写组 编

中国商业出版社

中专技工学校试用教材

应用数学

主编　胡　清
主审　杨桂元
　　　祝淑媛
　　　叶锡龙

中国商[redacted]版[redacted]

(京)新登字 073 号

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/《应用数学》编写组编. —北京:中国商业出版社,1994.8

中专技工学校试用教材

ISBN 7-5044-2328-9

Ⅰ.应… Ⅱ.应… Ⅲ.应用数学—专业学校—教材 Ⅳ.04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 09251 号

责任编辑　金　贤　张辉

责任校对　胡　清

中国商业出版社出版发行

(100053　北京广安门内报国寺 1 号)

新华书店总店北京发行所经销

中发蚌埠书刊发行公司激光照排

安徽省蚌埠市红旗印刷厂印刷

787×1092 毫米　32 开　16.25 印张　352 千字

1994 年 11 月第 1 版　1994 年 11 月第 1 次印刷

印数:1—10 000 册　定价:12.80 元

*　*　*　*

(如有印装质量问题可更换)

推荐说明

本书由全国部分中专技工学校数学课教师，根据部颁教学计划和教学大纲编写而成。全书分必修篇（1～5章）和选修篇（6～10章）两大部分。在必修篇中，主要讲解一元函数微积分及其应用（约需54学时）；而选修篇则分为存贮模型、统计推断、回归分析、投入产出和线性规划五个相对独立的单元，其特点是：根据实际现象提出问题，以查字典的方式介绍一些必需的预备知识，然后建立数学模型解决问题，以培养学生用数学方法解决实际问题的能力。选修篇的课时可由各校根据具体情况自行确定，具有较大的灵活性和实用性。

经审定，特向各校推荐，以满足教学急需。本书可广泛用作各类中专技工学校经济管理类专业高中中专《应用数学》课程教材和初中中专、技校学完高中阶段数学基本内容后《数学》课程的教材，亦可作为经贸系统干部、职工职业技术培训教材和经贸工作者自学定量分析的参考书。

本书由浙江贸易学校讲师胡清主编，由安徽财贸学院杨桂元副教授、安徽省宿州师专祝淑媛副教授、浙江温州经济学校叶锡龙高讲担任主审，由湖南省粮食学校易涤生讲师及耿新民同志任副主编，参加编写工作的有胡清、易涤生、耿新民、

宁群、王汝启等同志。

本书在编写过程中，得到参编人所在学校的大力支持，在终审终校过程中，杨桂元副教授对全书进行了过细的推敲修改、结构调整及版式设计工作，书中引用和借鉴了国内不少同类教材，在此一并表示诚挚的谢意！

限于编者水平及时间仓促，书中缺点疏漏之处在所难免，敬请广大读者不吝批评指正！

中华人民共和国国内贸易部教育司

1994 年 11 月

目　录

第一章 函数的极限与连续性

实数、函数和极限被称为微积分学理论的三大基石，函数是微积分研究的对象，而极限法是微积分研究问题的基本方法。本章将复习和加深函数的有关概念及性质，讨论函数的极限和函数的连续性。

第一节 函 数

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 设 D,M 是两个实数集，若对任意的 $x\in D$，按照某个对应关系 f，总有唯一确定的 $y\in M$，与之对应，则称 y 为定义在数集 D 上的 x 的**函数**，记作

$$y=f(x) \quad x\in D$$

其中，x 称为自变量，自变量的允许值集合 D 称为函数 $y=f(x)$ 的**定义域**，集合 M 称为函数的**值域**。

有时变量 x 在一定的范围内变化时，y 的值保持不变，则根据函数的定义，y 仍是 x 的函数，我们称之为常值函数，记作

$$y=C \quad (C\text{ 为常数})$$

函数反映了两个变量之间的依存关系，它涉及到定义域、

对应关系和值域。显然，如果函数的定义域和对应关系被确定以后，其值域必然随之确定。为此，定义域和对应关系构成了函数的两个要素，若两个函数的定义域和对应关系都相同，则称两个函数**等价**。如 $y=1$ 与 $y=\sin^2x+\cos^2x$ 是两个等价的函数；$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 因其定义域不同，所以不是两个等价的函数。

例 1 求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域.

解 由 $4-x^2\geqslant 0$ 得 $x\in[-2,2]$；

又由 $x-1>0$ 得 $x\in(1,+\infty)$，所以函数的定义域 $D=\{x|1<x\leqslant 2\}$

例 2 求函数 $y=\lg(2-\sqrt{x-1})$ 的定义域.

解 由 $x-1\geqslant 0$ 得 $x\geqslant 1$；又由 $2-\sqrt{x-1}>0$ 得 $x<5$，所以函数的定义域 $D=\{x|1\leqslant x<5\}$

例 3 某地箱板纸在 14 年中的销售量 y（单位：万吨）是时序数 x 的函数

$$y=9e^{0.1x},$$

试求它的定义域.

解 $y=9e^{0.1x}$ 是指数函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，但由实际意义函数的定义域为 $D=\{1,2,3,\cdots,14\}$

2. 函数的四个性质

(1)函数的奇偶性

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**；若对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**。

例如，函数 $y=x^2-4$，$y=\cos x$ 为偶函数；$y=x^3$，$y=\sin x$

为奇函数；$y=\lg x$，$y=(x-1)^2$ 既不是奇函数也不是偶函数，称之为**非奇非偶函数**.

由定义可知，偶函数图象关于 y 轴对称（如图 1—1 所示），奇函数的图象关于坐标原点对称（如图 1—2 所示）.

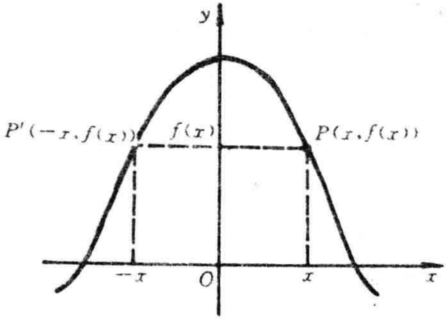


图 1—1

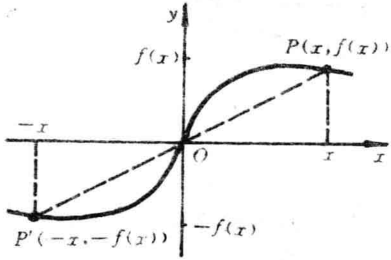


图 1—2

(2)函数的单调性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，对于任意的 $x_1<x_2\in(a,b)$.

若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**单调递增**，区间 (a,b) 称为函数的单调递增区间；

若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**单调递减**，区间 (a,b) 称为函数的单调递减区间. 单调递增与单调递减的函数统称为单调函数.

单调增加函数的图象沿 x 轴的正向逐渐上升，(如图 1—3 所示)，单调减少函数的图象沿着 x 轴的正向逐渐下降(如图 1—4 所示).

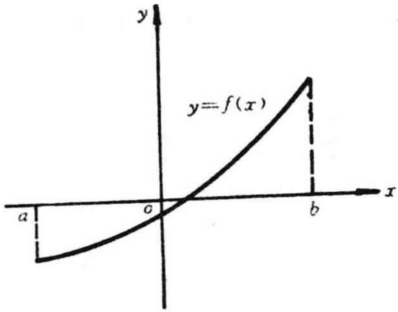


图 1—3

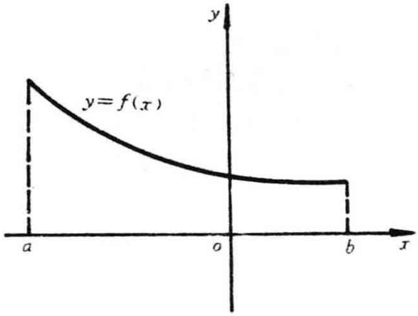


图 1—4

例如，区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$分别是函数 $y=x^2$ 的单调递减区间和单调递增区间.

事实上，任取 $x_1<x_2\in(-\infty,0)$则

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2$$
$$=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$$

显然，$x_1+x_2<0, x_1-x_2<0$

则 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$

因此，区间$(-\infty,0)$是函数 $y=x^2$ 的单调递减区间.

同样的方法可以证明，区间$(0,+\infty)$是函数 $y=x^2$ 的单调递增区间.

(3)函数的有界性

定义 设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，若对任意的 $x\in(a,b)$，存在一个正实数 M，使得$|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内**有界**；若这样的 M 不存在，则称 $f(x)$在(a,b)内无界.

上述定义也适用于闭区间的情形.

例如，函数 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，因为对于一切的 $x\in R$，都有 $\left|\frac{x^2}{1+x^2}\right|\leqslant 1$ 成立，所以 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ 是 R 上的有界函数.

又如，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的；而在区间 $(1,2)$ 内，有 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 成立，则函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内有界.

显然，有界函数的几何意义是：在自变量的某个区间内，函数 $f(x)$ 的图形介于直线 $y=M$ 和直线 $y=-M$ 之间(如图 1—5 所示).

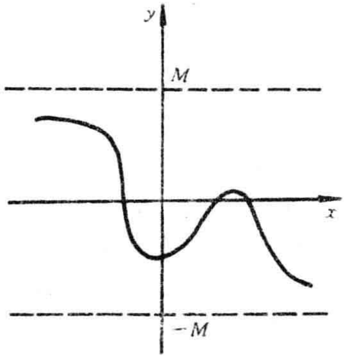


图 1—5

(4)函数的周期性

定义　对于函数 $f(x)$，如果存在一个正的常数 L，使得对于定义域内的一切 x，等式 $f(x+L)=f(x)$ 都成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，满足该等式的最小正数 L，称为函数的**最小正周期**，简称**周期**.

例如，$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数；$y=\operatorname{tg}x$ 和 $y=\operatorname{ctg}x$ 是周期为 π 的周期函数；$y=A\sin(wt+\varphi)$ $(w>0)$ 是周期为 $\frac{2\pi}{w}$ 的周期函数.

周期函数图象的特点是在定义域内每隔长度为 L 的相邻区间上，函数图形有相同的形状如周期函数 $y=\cos x$ 的图

象(如图 1—6 所示).

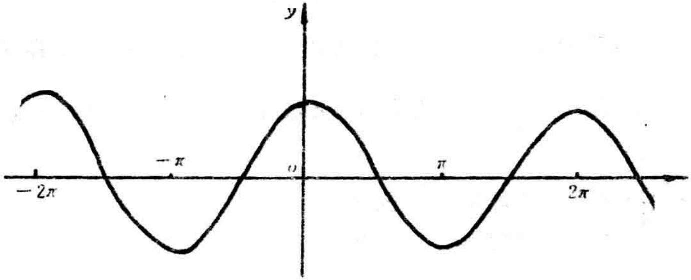


图 1—6

3. 反函数

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 M,对任意的 $y\in M$,在 D 中有唯一的一个 x 与之对应,使 $f(x)=y$,则在 M 上定义了另一个函数,这个函数称为函数 $y=f(x)$ **反函数**. 记为

$$x=f^{-1}(y)$$

例如,$y=2x+1$ 其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $M=(-\infty,+\infty)$,反函数是 $=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$

只有一一对应的函数才有反函数,而且函数 $y=f(x)$ 的定义域就是其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的值域,函数 $y=f(x)$ 的值域就是其反函数 $x=f^{-1}(x)$ 的定义域.

反函数的实质在于它表示的对应规则 f^{-1} 中,至于用什么字母表示反函数中的自变量与因变量却是无关紧要的. 习惯上,我们都是以 x 表示自变量,因此 $y=f(x)$ 的反函数 $x=$

$f^{-1}(y)$一般表示成 $y=f^{-1}(x)$.

例4 求 $y=\dfrac{x+5}{x-2}$的反函数

解 由 $y=\dfrac{x+5}{x-2}$ 可得

$$(x-2)y=x+5$$

解得
$$x=\frac{2y+5}{y-1}$$

将 x、y 的位置互换,即得 $y=\dfrac{x+5}{x-2}$的反函数

$$y=\frac{2x+5}{x-1}$$

例5 研究 $y=x^2$ 的反函数的存在性.

解 由 $y=x^2$ 可得 $x=\pm\sqrt{y}$. 由于 x 与 y 不是一一对应的,故 $y=x^2$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$上不存在反函数. 若将 $y=x^2$ 限定在$[0,+\infty)$上,则 $x=\sqrt{y}$就是一一对应的了,故此时 $y=x^2$ 的反函数是 $y=\sqrt{x}$;同理 $y=x^2$ 在$(-\infty,0]$是的反函数是 $y=-\sqrt{x}$.

任意函数 $y=f(x)$的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形对称于直线 $y=x$.

二、初等函数

1. 基本初等函数

下列六种函数统称为**基本初等函数**.

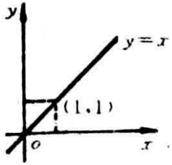
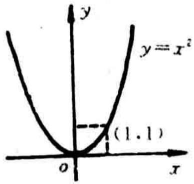
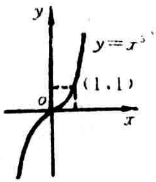
(1)常值函数:$y=C$

(2)幂函数:$y=x^{\alpha}$(α 是任意实数)

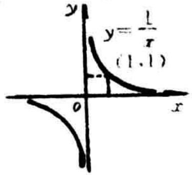
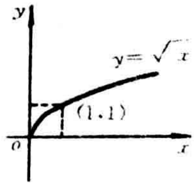
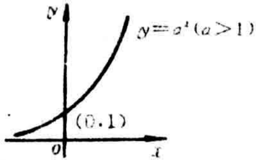
(3)指数函数:$y=a^x$($a>0,a\neq1$)

(4)对数函数:$y=\log_a x$($a>0,a\neq1$)

表 1—1　基本初等函数表

	函数	定义域与值域	图象	特性
幂函数	$y=x$ $(a=1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$ $(a=2)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$ $(a=3)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加

（续表）

	函数	定义域与值域	图　　象	特　　性
幂函数	$y=x^{-1}$ $(\alpha=-1)$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$ $(\alpha=\frac{1}{2})$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加