

发散思维

高要求 新角度 大视野 广思路

大课堂

丛书主编 希扬

代数

高一

● 本书主编 源流

同步最新教材

导引思维发散

点燃智慧火花

培养创新能力



龍門書局



发散思维大课堂 (修订版)



高一代数

源 流 主 编

源 流 陈明铸 齐 健
陈民胜 郭莉君 叶畋田 编 著

龍 門 書 局

2 0 0 0

版权所有 翻印必究

本书封面贴有科学出版社、龙门书局激光防伪标志，
凡无此标志者均为非法出版物。

举报电话：(010) 64034160(打假办)

发散思维大课堂(修订版)

高一代数

源流主编

责任编辑 张启男

龙门书局出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

1999年6月第一版 开本：850×1168 1/32

2000年6月修订版 印张：14 1/4

2000年10月第十一次印刷 字数：445 000

印数：165001—170000

ISBN 7-80111-636-4/G·551

定价：15.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

打开思维宝库 提高创新能力

——《发散思维大课堂》修订版序

《发散思维大课堂》修订版，以全新的姿态呈现于读者面前。“全新”的特点表现在三个方面：

其一，原版丛书只有初一到高二各科；修订版则增加了高三与高考总复习的内容，突出了“大课堂”的“大”，使本套丛书更显整体化与系统化。高三总复习部分是既能与原丛书配套成龙，又能独立成书的一部应试宝典。

其二，原版丛书根据统编教材编写，修订版除上述外，又根据十省市教材增编了高一的数、理、化、语文（统用）等学科版本，使“大课堂”双轨化与完美化，能让更多的读者嗅到它的书香。

其三，修订版对原版的部分内容作了增删，对教材的讲授更精、更实用；对训练题的设计更新、更得当，突出了“知识转化能力”的特色，强化了对素质的培养。

阅读《发散思维大课堂》修订版，将更能拓展你的视野，塑造你的慧心和灵气。它会引导你将知识由课内“发散”到课外，由死知识“发散”为活知识；它还能激发你动脑探索知识的兴趣，打开思维宝库，提高创新能力。

希 扬

2000年3月

《发散思维大课堂》丛书

编 委 会

主 编：希 扬

副主编：源 流

编 委：孙济占 张功俭

王兴桃 陆仁章

丁赉禧 宋 力

贾振辛

启动发散思维 挖掘深层智能

——《发散思维大课堂》序

《发散思维大课堂》是我们奉献给广大读者的涵盖中学主要课程且与现行教材同步的素质教育辅导丛书。培养和造就无数有慧心、有灵气、会学习、能创新的人才，是我们教育和出版工作者的神圣使命；而引导中学生学会科学思维的方法，借以挖掘自身潜能，提高学习质量、效率和整体素质，是我们研究的重大课题。

思维是人类特有的一种脑力活动。孔子说“学而不思则罔”。“罔”即迷惑而无所所得。意思是说，只读书而不思考，就等于没有读书。哲学家哥德也曾风趣地说：“经验丰富的人读书用两只眼睛。一只眼睛看到纸面上的话，另一只眼睛看到纸背面的话。”“纸背面的话”就是指思维，指要思要想，要多思多想。这些至理名言深刻地揭示了思维与学习的辩证关系。

发散思维，即求异思维。它包括横向思维、逆向思维及多向思维。它要求你放开眼界，对已知信息进行分析、综合，并科学加工，从而收到“一个信息输入，多个信息产出”的功效。它的特色，表现在思维活动的多向性；它的功能，表现为可以开启心扉，震撼心灵，挖掘深层信息，架设起由已知，经可知，达未知的桥梁，创造出新的思路和解法；它的操作，要求从一点出发，向四周辐射，“心骛八极，思接千载”，从而编织起信息网络，达到思维的预想目标。

近年来，笔者发现一些具有远见卓识的学者、教师、出版家，已将“发散思维”引入中学课堂，取得可喜成果。师生们称赞说，运用发散思维“进行思维与灵魂的对话”，使我们深深体味到了“纸上

得来终觉浅，心中悟出方知深”的真谛；不仅开阔了视野，而且取得了举一反三、触类旁通的效果。

鉴于发散思维的良好效应，我们特邀了对这方面有建树的老师，将这种创新思维运用到语文、英语、数学、物理、化学等教学之中，并精心设计出学生易于接受的独具特色的这套素质教育丛书。

这套丛书具有显著的四大特点，每一个特点都体现创新意识。

1. **高标准** 指在如林的教辅读物中，它博采众家之长，自成体系。它不仅传播知识信息，更着意进行科学思维与方法的点拨，能促使学生学会思考，学会分析，学会应用。

2. **新角度** 指它在中学主要课程中对教材的处理和试题的设计运用了发散思维，对重点难点的点拨与导练，呈现出新的模式和跨越，蕴涵着对学生智能的深层开发。

3. **大视野** 指丛书眼界开阔，立足课内，向课外拓展，知识面宽，信息量大，涵盖率高；且以人才开发为动力，坚持“一切为了学生，为了一切学生”的原则；体现了智力开发的针对性与具体操作的实用性。

4. **广思路** 指引导学生从多角度思考和切入问题，并向纵深发展。它不仅探索了多种信息的深邃内涵，也着力探索了信息的广阔外延；力图培养与规范学生驾驭信息的能力，激发他们去寻找自己新的增长点。

好书凭借力，送君上青云。古人说，“君子爱人，必教之以其方”。这套丛书会教你：“博学之，审问之，慎思之，明辨之，笃学之。”尤其能助你学会思考！

寸有所长，尺有所短。发散思维教学毕竟是近年来在教学百花园中出现的新事物，目前尚难尽善尽美。万望朋友们不吝赐教。

希 扬

1999年3月

前言

发散思维即求异思维,它从一点出发沿着多方向达到思维目标。用图表示,它就是从一点出发向知识网络空间发出的一束射线,使之与两个或多个知识点之间形成联系。它包含横向思维、逆向思维及多向思维。发散思维具有多向性、变通性、流畅性、独特性的特点,即思考问题时注重多思路、多方案,解决问题时注重多途径、多方式。它对同一个问题,从不同的方向、不同的侧面、不同的层次,横向拓展,逆向深入,采用探索、转化、变换、迁移、构造、变形、组合、分解等手法,开启学生心扉,激发学生潜能,提高学生素质,这对造就创造性人才至关重要。

本套丛书力求贴近整个教学环节,立足于培养学生的创造思维能力,增强学生思维的灵活性、拓展性,以便提高学生解决实际问题的能力。为此,我们紧密联系学生学习实际,全面深入反映近年来特别是1999年的全国高考、各省市中考的试题。紧扣教学大纲和现行教材,从初一到高二,按现行教材同步到每个章节或单元。高三作为高考总复习,综合了高中三个年级的内容,以“决胜高考”的形式推出。初一至高二每章(或每单元)均由以下六个部分组成。

基本目标要求 使学生会运用目标管理的方法,掌握学习重点和方向,做到有的放矢,学习每章(或每单元)可达到预期的学习目的和效果。

基础知识导引 高度概括每章(或每单元)的内在知识体系,精辟分析高、中考的知识点。

重点难点点拨 以画龙点睛之笔突出重点、难点,以此作为展开发散思维的主线。

发散思维导练 是本套丛书的主体结构,它分为以下两部分:

发散思维分析 从知识点、重点、难点出发,分析本章(或本单元)的知识内容、相互关系,并运用发散思维方法揭示思维规律,突出解题规律,以达到融会贯通的目的。

发散思维应用 精选典型例题,通过重点问题的多角度、多侧面、多层次的发散思维,透析、培养学生概念辨析、综合概括、转化变换、思维迁移、逆向运用、实验设计、书写表达、多解多变的全方位能力。

巩固基础训练 提高能力测试 可以帮助学生借此检验课堂学习效果；同时家长可借此考查学生对课本各章节知识的掌握程度。

在每册书后面另附三套“发散思维综合能力测试题”，以供学生针对高、中考试题进行综合训练。为配合二省一市教材在全国的推广使用，今年还增编了高一数学、物理、化学、语文(通用)等学科版本。同时推出高三总复习内容，每章(或单元)由**考点精析 三基导引 范例研展 反馈测试**等栏目组成。并附1999年高考和2000年春季招生统一考试试题(理工农医类)及模拟试卷。

本丛书用到如下各种发散思维：

题型发散 是将典型问题，变换其题型的一种发散思维。

解法发散 是通过一题多法、多题一法进行变通训练的发散思维。

纵横发散 是通过两个或多个发散点间的联系以及发散点与其它知识点间的联系，借助例题形成发散思维。

转化发散 是通过保持原命题的实质而变换其形式的一种发散思维。

迁移发散 是利用数学公式、图形在不同学科中的不同含义与等价形式，把一个学科中的公式、定理、原则和方法，巧妙地迁移到另一个学科中，达到化难为易目的。

构造发散 是通过逻辑思维和丰富的联想，恰当地构造出某些元素，使原有元素变成新元素，或变成新元素之间的一种新的组合形式。

分解发散 是把一个复杂命题分解成一些单纯命题，并逐个加以分析和解决的发散思维。

逆向发散 是由目标至条件的定向思考的一种发散思维。

阶梯发散 是解题能力或方法逐步深入的一种发散思维。

创造发散 是克服思维定势，不按常规思维解决问题的一种发散思维。

综合发散 是通过教材各章发散点之间的联系，一个学科与其它学科之间的联系综合思考的一种发散思维。

总之，本套丛书由浅入深，精析多练，学练结合，阶梯训练，逐步提高，并揭示中、高考的测试规律，使学生的复习与应试实际更贴近，从而提高学生灵活运用知识，增强迁移应变能力和创造性思维能力。

由于本套丛书编写时间紧迫和编者水平所限，不妥之处，祈望读者不吝赐教。

源 流

2000年2月

目 录

第一章 幂函数、指数函数和对数函数	1
基本目标要求	1
基础知识导引	1
重点难点点拨	12
发散思维导练	19
★发散思维分析	19
★发散思维应用	20
(一)集合	20
(二)一元二次不等式	37
(三)函数问题	49
(四)幂函数、指数函数、对数函数	87
巩固基础训练	113
提高能力测试	119
第二章 三角函数	125
基本目标要求	125
基础知识导引	125
重点难点点拨	129
发散思维导练	133
★发散思维分析	133
★发散思维应用	134
(一)任意角的三角函数	134
(二)三角函数的图象和性质	154
巩固基础训练	175
提高能力测试	180
第三章 两角和与差的三角函数,解斜三角形	186
基本目标要求	186

基础知识导引	186
重点难点点拨	189
发散思维导练	195
★发散思维分析	195
★发散思维应用	195
(一)两角和与差的三角函数	195
(二)解斜三角形	256
巩固基础训练	283
提高能力测试	288
第四章 反三角函数和简单三角方程	294
基本目标要求	294
基础知识导引	294
重点难点点拨	297
发散思维导练	300
★发散思维分析	300
★发散思维应用	300
(一)反三角函数的概念及性质	300
(二)简单三角方程的解	335
巩固基础训练	342
提高能力测试	347
发散思维综合能力测试题(一)	351
发散思维综合能力测试题(二)	354
发散思维综合能力测试题(三)	357
参考答案	361

第一章 幂函数、指数函数 和对数函数

基本目标要求

一、理解集合、子集、交集、并集、补集的概念，了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的含义，能掌握有关的术语和符号，能正确地表示一些较简单的集合。

二、在了解映射概念的基础上，加深对函数及其有关概念的理解，会求函数的定义域和一些简单函数的值域，掌握互为反函数的函数图象间的关系。

三、理解函数单调性和奇偶性的概念，并能判断一些简单函数单调性和奇偶性，能利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数的图象。

四、掌握二次函数、幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图象和性质。

五、能解指数方程和对数方程。

基础知识导引

一、集合的概念

1. 集合

集合是数学中一个不加定义的原始概念，一般是这样描述的：一组对象的全体形成一个集合，集合用大写拉丁字母 A, B, C 等表示。集合里的各个对象叫做这个集合的元素，用小写拉丁字母表示。元素与集合的关系是属于($\in$)或不属于($\notin$)的关系。

2. 集合的表示法

集合有列举法和描述法两种表达方法。

几种常用数集的表示符号如下：

$\mathbf{N}$ 表示自然数集, $\mathbf{Z}$ 表示整数集, $\mathbf{Q}$ 表示有理数集, $\bar{\mathbf{Q}}$ 表示无理数集, $\mathbf{R}$ 表示实数集, $\mathbf{C}$ 表示复数集, 有时 $\mathbf{Q}^+$ 表示正有理数集, $\mathbf{R}^-$ 表示负实数集. $\emptyset$ 表示不含任何元素的集合, 叫做空集.

3. 集合的分类

集合通常分为有限集和无限集两类.

4. 集合的特征

(1) 元素的确定性; (2) 元素的互异性; (3) 元素的无序性.

5. 集合间的关系和运算

见表 1-1.

表 1-1

	定 义	性质与说明
子 集	如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素, 那么集合 A 叫做集合 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$). 若 $a \in A$, 且 $A \subseteq B$, 可推出 $a \in B$	① $A \subseteq A$; ② $\emptyset \subseteq A$; ③ 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$; ④ 有 n 个元素的集合的子集个数是 2^n
真子集	如果 A 是 B 的子集, 且 B 中至少有一个元素不属于 A , 那么集合 A 叫做集合 B 的真子集, 记作 $A \subset B$ (或 $B \supset A$)	① 空集是任何非空集合的真子集; ② 若 $A \subset B, B \subset C$, 则 $A \subset C$; ③ 有 n 个元素的集合的真子集的个数是 $2^n - 1$
集合相等	对于两个集合 A 与 B , 若 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$, 我们就说这两个集合相等, 记作 $A = B$	两个相等的非空集合 A 和 B , 它们的元素是完全相同的
交 集	由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即 $A \cap B = \{x x \in A \text{ 且 } x \in B\}$	① $A \cap A = A$; ② $A \cap \emptyset = \emptyset$; ③ $A \cap B = B \cap A$
并 集	由属于集合 A 或属于集合 B 的所有元素组成的集合叫做 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即 $A \cup B = \{x x \in A \text{ 或 } x \in B\}$	① $A \cup A = A$; ② $A \cup \emptyset = A$; ③ $A \cup B = B \cup A$; ④ 若 $n(M)$ 代表集合 M 中元素的个数, 则 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
补 集	已知全集 I , 集合 $A \subseteq I$, 由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做集合 A 在 I 中的补集, 记作 $\bar{A}$, 即 $\bar{A} = \{x x \in I, \text{ 但 } x \notin A\}$	① $A \cup \bar{A} = I$; ② $A \cap \bar{A} = \emptyset$; ③ $\bar{\bar{A}} = A$

二、一元二次不等式

1. $|ax+b|<c, |ax+b|>c(c>0)$ 型不等式

(1) $|x|<a, |x|>a(a>0)$ 型不等式.

一般地, 不等式 $|x|<a(a>0)$ 的解集是 $\{x|-a<x<a\}$; 不等式 $|x|>a(a>0)$ 的解集是 $\{x|x>a \text{ 或 } x<-a\}$.

(2) 对于 $|ax+b|<c, |ax+b|>c(c>0)$ 型不等式, 只需将 $ax+b$ 看成一个整体, 即可化成 $|x|<a, |x|>a(a>0)$ 型不等式来求解.

一般地, 不等式 $|ax+b|<c(c>0)$ 的解集是 $\{x|-c<ax+b<c\}$, 依此再求出原不等式的解集; 不等式 $|ax+b|>c(c>0)$ 的解集是 $\{x|ax+b>c, \text{ 或 } ax+b<-c\}$, 依此再求出原不等式的解集.

2. 一元二次不等式

(1) 定义.

含有一个未知数并且未知数的最高次数是二次的不等式叫做一元二次不等式, 它的一般形式是 $ax^2+bx+c>0$, 或 $ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$.

(2) 解法.

一般地, 对于二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$, 设 $\Delta=b^2-4ac$, 那么一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 和 $ax^2+bx+c<0$ 的解集有如下三种情况:

①若 $\Delta>0$, 则方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相异实根 $x_1, x_2(x_1<x_2)$. 那么, 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|x<x_1 \text{ 或 } x>x_2\}$;

不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $\{x|x_1<x<x_2\}$, 如图 1-1.

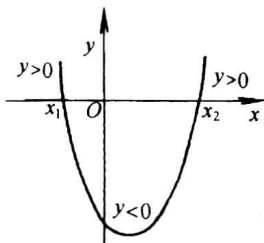


图 1-1

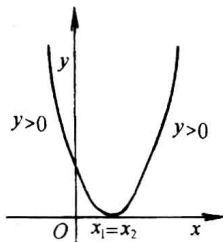


图 1-2

②若 $\Delta=0$, 则方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

那么, 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|x<-\frac{b}{2a}, \text{ 或 } x>-\frac{b}{2a}\}$, 也即

$$\{x|x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq -\frac{b}{2a}\};$$

不等式 $ax^2+bx+c < 0$ 的解集是空集 $\emptyset$, 如图 1-2.

③若 $\Delta < 0$, 则方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实根.

那么, 不等式 $ax^2+bx+c > 0$ 的解集是实数集 $\mathbf{R}$, 不等式 $ax^2+bx+c < 0$ 的解集是空集 $\emptyset$, 如图 1-3.

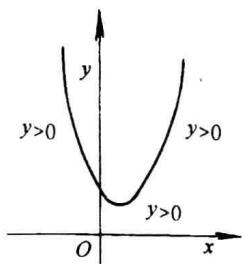


图 1-3

三、映射

1. 映射 映射是一种特殊的对应. 映射允许集合 A 中的不同元素在集合 B 中有相同的象; 映射允许集合 B 中某些元素在集合 A 中没有原象. 例如, 设集合 $A = \{a, b\}$, 集合 $B = \{1, 2\}$, 则集合 A 到集合 B 的映射有 4 个, 如图 1-4. 在图 1-4(1)中, 集合 A 中的元素 a 和 b 在集合 B 中有相同的象; 而集合 B 中的元素 2 在集合 A 中没有原象.

*2. 一一映射 设 $f: A \rightarrow B$ 是映射, 如果对于 A 中的不同元素在集合 B 中有不同的象, 且 B 中的每一个元素都有原象, 那么这个映射叫做 A 到 B 上的一一映射. 例如图 1-4 中的(2)与(3)都是从集合 A 到集合 B 上的一一映射.

*3. 逆映射 设 $f: A \rightarrow B$ 是 A 到 B 上的一一映射, 如果对于集合 B 中的每一个元素都使它在 A 中的原象和它对应, 这样得到的映射叫做映射 $f: A \rightarrow B$ 的逆映射, 记作 $f^{-1}: B \rightarrow A$.

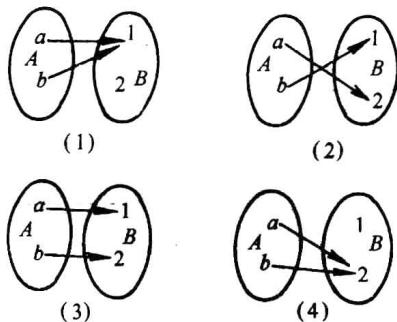


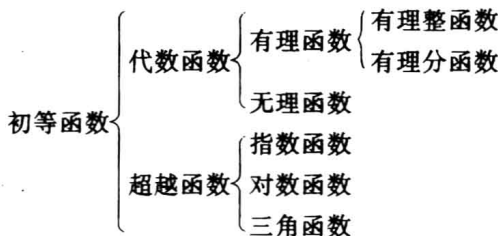
图 1-4

从一一映射及逆映射的定义可知:

- (1) 一个映射有逆映射的充要条件是这个映射是一一映射;
- (2) 一一映射 $f: A \rightarrow B$ 与 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 互为逆映射.

四、函数

1. 初等函数的分类表



2. 函数的基本概念

(1) 函数定义: 当集合 A 和 B 都是非空的数集, 且 B 的每一个元素都有原象时, 这样的映射 $f: A \rightarrow B$ 就是定义域 A 到值域 B 上的函数, 记作 $y = f(x)$.

(2) 定义域: 即自变量的允许值范围.

当函数用解析式给出时, 定义域就是使式子有意义的自变量允许值的集合;

当函数由实际问题给出时, 其定义域由实际问题确定.

(3) 值域: 即函数值的变化范围.

3. 函数关系的表示法

通常有解析法、列表法和图象法.

4. 函数的性质

(1) 单调性:

① 对于给定区间上的函数 $f(x)$, 如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数 (或减函数).

② 如果函数 $f(x)$ 在某个区间上是增函数或减函数, 就说 $f(x)$ 在这个区间上具有 (严格地) 单调性, 这一区间叫做函数 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 奇偶性:

① 奇函数: 如果对于函数 $f(x)$ 定义域内任意一个 x , 都有 $f(-x) = -f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数.

奇函数的图象关于原点成中心对称图形, 这个定理的逆定理也成立.

②偶函数:如果对于函数 $f(x)$ 定义域内任意一个 x , 都有 $f(-x) = f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数.

偶函数的图象关于 y 轴成轴对称图形, 这个定理的逆定理也成立.

五、反函数

反函数的定义:一般地, 式子 $y=f(x)$ 表示 y 是自变量 x 的函数, 设它的定义域为 A , 值域为 C , 我们从式子 $y=f(x)$ 中解出 x , 得到式子 $x=\varphi(y)$ 就表示 x 是自变量 y 的函数, 这样的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数, 记作 $x=f^{-1}(y)$, 即 $x=\varphi(y)=f^{-1}(y)$.

对调函数式 $x=f^{-1}(y)$ 中的字母 x, y , 把它改写成 $y=f^{-1}(x)$.

六、几种代数函数

1. 正比例函数: $y=kx (k \neq 0)$

2. 反比例函数: $y=\frac{k}{x} (k \neq 0)$

3. 一次函数: $y=kx+b (k \neq 0)$

4. 二次函数: $y=ax^2+bx+c (a \neq 0)$

(1) 性质:

① 抛物线 $y=ax^2+bx+c (a \neq 0)$ 的顶点是 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$, 对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$.

② 当 $a>0$ 时, 抛物线的开口向上, 并且向上无限伸展; 当 $a<0$ 时, 抛物线的开口向下, 并且向下无限伸展.

③ 当 $a>0$ 时, 在对称轴的左侧, y 随着 x 的增大而减小, 在对称轴的右侧, y 随着 x 的增大而增大; 当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时, 函数 y 有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$. 当 $a<0$ 时, 在对称轴的左侧, y 随着 x 的增大而增大, 在对称轴的右侧, y 随着 x 的增大而减小, 当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时, 函数 y 有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

(2) 二次项系数是正数的二次函数、一元二次方程、一元二次不等式的主要结论与三者之间的关系见表 1-2.

5. 幂函数: $y=x^\alpha (\alpha \text{ 是常数, } \alpha \text{ 可取实数})$

(1) 根式:

① 根式的定义:一般地, 如果有 $x^n=a$, 那么 x 叫做 a 的 n 次方根, 其中