

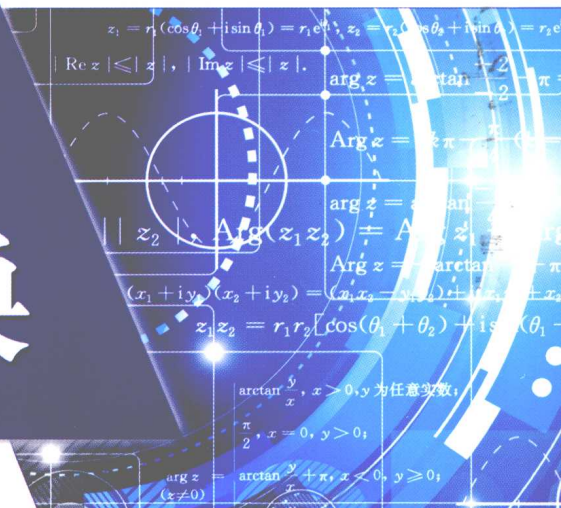
FUBIAN HANSHU YU JIFEN BIANHUAN

普通高等教育公共基础课程用书

(第二版)

复变函数 与积分变换

主编 赵建丛 黄文亮



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

复变函数与积分变换

(第二版)

赵建丛 黄文亮 主编



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/赵建丛,黄文亮主编. —2版. —上海:华东理工大学出版社,2012.2

ISBN 978-7-5628-3219-5

I. 复… II. ①赵…②黄… III. ①复变函数-高等学校-教材 ②积分变换-高等学校-教材 IV. 0174.5②0177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 010444 号

复变函数与积分变换(第二版)

主 编/赵建丛 黄文亮

责任编辑/郭 艳

责任校对/金慧娟

封面设计/裘幼华

出版发行/华东理工大学出版社有限公司

地址:上海市梅陇路 130 号,200237

电话:(021)64250306(营销部) 64252714(编辑部)

传真:(021)64252707

网址: pess.ecust.edu.cn

印 刷/常熟华顺印刷有限公司

开 本/787 mm×1092 mm 1/16

印 张/14

字 数/335 千字

版 次/2012 年 2 月第 2 版

印 次/2012 年 2 月第 1 次

书 号/ISBN 978-7-5628-3219-5/O·242

定 价/29.80 元

(本书如有印装质量问题,请到出版社营销部调换。)

第二版前言

本书是在第一版的基础上广泛吸取了教师和学生的意见后修订而成的. 新版教材在主要内容和结构框架上未做大的变动, 秉承原有特色, 对已经发现的错误和不妥之处进行了修正, 并调整了一些例题和习题. 为了满足某些专业的应用, 在第 5 章增加了辐角原理及其应用, 在第 7 章增加了 Fourier 变换的能量积分和乘积定理, 在第 8 章增加了 Laplace 变换的初值定理和终值定理, 这些内容都加了“*”号, 读者可根据需要选学.

本教材的修订得到了华东理工大学教材建设委员会的大力支持, 在修订工作中, 李建奎、邵方明、章文华、李启慧等老师为本书提供了很多宝贵的意见和建议, 在此向他们表示衷心的感谢! 也衷心感谢使用过本书第一版的广大师生, 感谢在本书编写过程中所参阅的资料的作者.

由于编者水平有限, 书中难免有不当和不妥之处, 敬请专家、读者予以指正.

编 者
2011. 12

前 言

“复变函数与积分变换”是面向高等工科院校学生的具有明显工程应用背景的数学课程. 随着科学技术的迅速发展, 它的理论和方法已广泛应用于电工技术、力学、自动控制、通信技术许多工程技术和科学研究领域. 为了更好地体现本课程的实用性和工科学生学习的特点, 满足教学改革和课程建设的需求, 我们编写了这本教学用书.

本书是在编者多年来讲授工科复变函数与积分变换课程的基础上, 遵照教育部制定的对本课程教学大纲的基本要求编写而成的. 在编写过程中, 我们广泛吸取了国内同类教材的主要优点, 并融合了编者多年来讲授该门课程的经验 and 体会. 考虑到工科学生学习本课程的目的主要在于实用, 我们侧重了对基本概念和解题方法的讲解, 基本概念的介绍尽可能联系实际, 淡化了一些理论的证明. 在内容安排上力求由浅入深, 循序渐进. 与同类教材相比, 本书删减了部分理论性较强的内容, 使之更适合工科学生阅读. 同时, 为了便于自学和实际的需要, 在注意行文的科学性与严密性的同时, 力求叙述简洁, 通俗易懂. 本书在每一章都安排了较多的例题与习题, 并且在例题和习题的选择上注重典型性和多样性, 以培养学生解决实际问题的能力. 同时, 本书以每三章为一阶段配有阶段复习题, 并在全书的最后安排了期末模拟试题. 书后附有习题答案供读者参考.

本教材是华东理工大学“十一五”规划教材, 并获得了华东理工大学优秀教材出版基金的资助. 在编写过程中, 得到了华东理工大学教材建设委员会的大力支持, 得到了华东理工大学理学院鲁习文院长和张先梅副院长的关心和支持, 在此对他们表示衷心的感谢. 还要特别感谢李建奎教授, 他始终关心本教材的编写和出版, 在本教材的编写过程中提出了许多宝贵建议, 并通读了本教材初稿. 同时, 还要感谢刘剑平、殷锡鸣、章文华、黄定江、邵方明等老师, 他们在本书编写过程中提供了宝贵的建议. 还要感谢路冠军同学, 他在该书的完成中做了许多工作.

限于编者的水平, 本书难免有不妥与不足之处, 敬请广大师生和读者指正.

编 者
2008. 6

目 录

180-180-180-180-180-180-180-180

1 复数与复变函数	1
1.1 复数及其运算	1
1.1.1 复数的概念	1
1.1.2 复平面	1
1.1.3 复数的四则运算	4
1.1.4 复数的乘幂与开方	7
1.1.5 复球面与无穷远点	9
1.2 平面点集的一般概念	9
1.2.1 区域	9
1.2.2 平面曲线	10
1.3 复变函数	12
1.3.1 复变函数的概念	12
1.3.2 复变函数的极限与连续	14
1.3.3 复变函数的导数与微分	16
习题一	18
2 解析函数	21
2.1 解析函数的概念与柯西-黎曼方程	21
2.1.1 解析函数的概念	21
2.1.2 柯西-黎曼方程	22
2.2 初等函数及其解析性	26
2.2.1 指数函数	26
2.2.2 对数函数	27
2.2.3 幂函数	28
2.2.4 三角函数和反三角函数	29
2.2.5 双曲函数与反双曲函数	31
2.3 解析函数与调和函数的关系	32

习题二	36
3 复变函数的积分	38
3.1 复变函数积分的概念	38
3.1.1 复变函数积分的定义	38
3.1.2 复变函数积分的存在条件	39
3.1.3 复变函数积分的基本性质	39
3.1.4 复变函数积分的计算	40
3.2 柯西积分定理	42
3.2.1 柯西积分定理	42
3.2.2 变上限积分与原函数	44
3.3 复合闭路定理	46
3.4 柯西积分公式	47
3.4.1 柯西积分公式	48
3.4.2 高阶求导公式	49
习题三	52
阶段复习题一	54
4 解析函数的幂级数表示	57
4.1 复级数的基本概念	57
4.1.1 复数列的极限	57
4.1.2 复数项级数	57
4.1.3 复变函数项级数	59
4.2 幂级数	60
4.2.1 幂级数的收敛性	60
4.2.2 幂级数的运算和性质	63
4.3 解析函数的泰勒展开	64
4.3.1 泰勒(Taylor)定理	64
4.3.2 解析函数的泰勒展开法	66
4.4 洛朗级数	69
4.4.1 洛朗级数的概念	70
4.4.2 解析函数的洛朗展开	71
习题四	76

5 留数及其应用	78
5.1 孤立奇点	78
5.1.1 孤立奇点的三种类型	78
5.1.2 函数的极点和零点的关系	81
5.1.3 函数在无穷远点的性质	84
5.2 留数	85
5.2.1 留数的定义	85
5.2.2 极点处留数的计算	86
5.2.3 留数定理	88
5.2.4 函数在无穷远点的留数	91
5.3 利用留数计算实积分	94
5.3.1 形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ 的积分	94
5.3.2 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$ 的积分	96
5.3.3 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax} dx (a > 0)$ 的积分	98
5.4* 辐角原理及其应用	101
5.4.1 对数留数	101
5.4.2 辐角原理	102
5.4.3 儒歇(Rouché)定理	103
习题五	105
6 共形映射	107
6.1 共形映射的概念	107
6.1.1 解析函数的导数的几何意义	107
6.1.2 共形映射的定义	109
6.2 分式线性映射	110
6.2.1 分式线性映射及其分解	110
6.2.2 分式线性映射的几何性质	112
6.2.3 分式线性映射的确定	114
6.3 几种常见的分式线性映射	117

6.3.1 把上半平面映射成上半平面的分式线性映射	117
6.3.2 把上半平面映射成单位圆内部的分式线性映射	117
6.3.3 把单位圆内部映射成单位圆内部的分式线性映射	120
6.4 几个初等函数构成的映射	121
6.4.1 幂函数与根式函数	121
6.4.2 指数函数和对数函数	125
习题六	127
阶段复习题二	128
7 Fourier 变换	131
7.1 Fourier 积分公式	131
7.2 Fourier 变换	135
7.2.1 Fourier 变换的概念	135
7.2.2 Fourier 变换的物理定义——非周期函数的频谱	138
7.3 δ 函数及其 Fourier 变换	141
7.3.1 δ 函数的定义和性质	142
7.3.2 δ 函数的 Fourier 变换	143
7.4 Fourier 变换的性质	145
7.4.1 线性性质	145
7.4.2 位移性质	146
7.4.3 微分性质	147
7.4.4 像函数的微分性质	148
7.4.5 积分性质	149
7.4.6 对称性质	150
7.4.7 相似性质	150
7.4.8* 能量积分	151
7.4.9* 乘积定理	151
7.5 Fourier 变换的卷积性质	152
习题七	156
8 Laplace 变换	158
8.1 Laplace 变换的概念	158

8.1.1 Laplace 变换的定义	158
8.1.2 Laplace 变换存在的条件	160
8.1.3 周期函数的 Laplace 变换	163
8.2 Laplace 变换的性质	164
8.2.1 线性性质	164
8.2.2 相似性质	164
8.2.3 微分性质	165
8.2.4 积分性质	166
8.2.5 位移性质	169
8.2.6 延迟性质	169
8.2.7* 初值定理	170
8.2.8* 终值定理	171
8.3 Laplace 逆变换	172
8.3.1 反演积分公式	172
8.3.2 Laplace 逆变换的计算	173
8.4 卷积	175
8.4.1 卷积的定义	175
8.4.2 卷积定理	176
8.5 Laplace 变换的应用	177
8.5.1 求解常系数的常微分方程	178
8.5.2 求解常系数线性微分方程组	180
8.5.3 解微分积分方程	182
习题八	184
阶段复习题三	187
模拟试卷(一)	190
模拟试卷(二)	192
习题参考答案	194
附录一 Fourier 变换简表	205
附录二 Laplace 变换简表	208
参考文献	213

复数与复变函数

复变函数是本课程研究的对象,它是以复数作为自变量和因变量取值的函数.复变函数的理论和方法在数学、自然科学和工程技术中都有着广泛的应用,是解决诸如流体力学、电磁学、热学、弹性理论中平面问题的有力工具.

本章将首先从代数和几何两方面讨论复数的概念及其运算,然后讨论复变函数及其连续和可导的概念,这些内容为研究解析函数奠定了必要的基础.

1.1 复数及其运算

1.1.1 复数的概念

形如 $x+iy$ 的数称为**复数**,其中 x 和 y 是任意两个实数; i 称为虚数单位,满足 $i^2=-1$,通常记复数为 $z=x+iy$.

x, y 又分别称为复数 z 的**实部与虚部**,记作

$$x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z.$$

当 $y=0$ 时, $z=x$, 即为实数 x ; 当 $y \neq 0$ 且 $x=0$ 时, $z=iy$, 称之为**纯虚数**.

由所有复数构成的集合称为**复数集或复数域**,常用 $\mathbb{C}$ 表示.

$z_1=x_1+iy_1$ 和 $z_2=x_2+iy_2$ 是两个复数,当且仅当 $x_1=x_2, y_1=y_2$ 时,称两个复数**相等**,记作 $z_1=z_2$.

我们把 $x+iy$ 与 $x-iy$ 称为**互为共轭的复数**.若记 $z=x+iy$, 则其共轭复数记作 $\bar{z}=x-iy$.

$$\text{显然, } \bar{\bar{z}}=z, \operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}, \operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

1.1.2 复平面

一个复数 $z=x+iy$ 本质上可由一对有序实数 (x, y) 唯一确定,于是我们可以建立平面上的全部点与全体复数间的一一对应关系.换句话说,可以借助于横坐标为 x 、纵坐标为 y 的点来表示复数 $z=x+iy$ (图 1-1). 由于 x 轴上的点对应着实数, y 轴(非原点)对应着纯

虚数,故称 x 轴为实轴, y 轴为虚轴,这样表示的平面称为复平面或 z 平面.

于是,对于复数 $z = x + iy$,我们也可以说点 z . 例如,点 $z = 1 + 2i$. 为方便起见,我们不再区分复数与复平面上的点.

在复平面上,从原点到点 $z = x + iy$ 所引的向量 $\overrightarrow{OP}$ 与复数 z 也构成一一对应关系(复数 0 对应零向量)(图 1-1),所以,复数 z 也可以看成是复平面内的向量.

向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 z 的模,记为 $|z|$ 或 r ,即 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$.

显然, $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

以正实轴为始边,以 $z(z \neq 0)$ 所对应的向量为终边的角称为复数 z 的辐角(Argument),记为 $\operatorname{Arg} z$.

显然辐角是多值的,它们之间相差 2π 的整数倍. 我们把在 $(-\pi, \pi]$ 之间的辐角称为 z 的主辐角(或主值),记为 $\arg z$. 于是

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots) \quad (1.1)$$

注意,当 $z = 0$ 时,辐角无意义.

$\arg z$ 可由反正切 $\arctan \frac{y}{x}$ 的主值 $(-\frac{\pi}{2} < \arctan \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2})$ 按如下关系确定(图 1-2, 图 1-3).

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, y \text{ 为任意实数}; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases} \quad (z \neq 0)$$

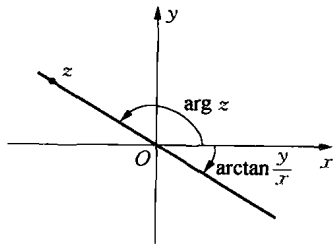


图 1-2

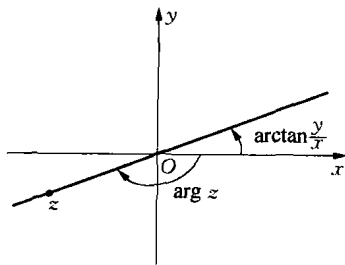


图 1-3

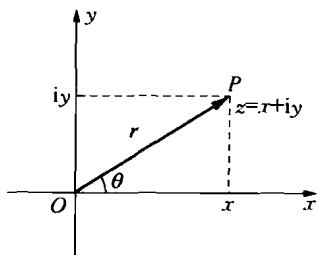


图 1-1

例 1.1 计算下列复数的辐角:

(1) $z = 2 - 2i$; (2) $z = -2 - 2i$; (3) $z = -3 + 4i$.

解 (1) $\arg z = \arctan \frac{-2}{2} = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$$\operatorname{Arg} z = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (k = 0, \pm 1, \dots).$$

(2) $\arg z = \arctan \frac{-2}{-2} - \pi = \arctan 1 - \pi = -\frac{3}{4}\pi$

$$\operatorname{Arg} z = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \quad (k = 0, \pm 1, \dots).$$

(3) $\arg z = \arctan \frac{-3}{4} + \pi = -\arctan \frac{3}{4} + \pi$

$$\operatorname{Arg} z = -\arctan \frac{3}{4} + \pi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots).$$

另外,根据图 1-1 还可以用复数的模与辐角来表示非零的复数 z ,即

$$z = x + iy = r\left(\frac{x}{r} + i\frac{y}{r}\right) = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (1.2)$$

由 Euler 公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

我们可把式(1.2)写成

$$z = re^{i\theta}. \quad (1.3)$$

分别称式(1.2)和式(1.3)为复数的三角形式和指数形式. 相应地, $z = x + iy$ 称为复数的代数形式. 三种形式是可以相互转化的.

例 1.2 将下列复数化为三角形式和指数形式:

(1) $z = -1 + \sqrt{3}i$; (2) $z = \sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12}$.

解 (1) 显然, $r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$, 由于 $z = -1 + \sqrt{3}i$ 在第二象限,

$$\tan \theta = -\sqrt{3}, \quad \theta = \frac{2\pi}{3},$$

于是, $z = -1 + \sqrt{3}i$ 的三角形式和指数形式为

$$z = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

(2) 显然, $r = |z| = 1$, 而

$$\sin \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{5\pi}{12}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \sin \frac{5\pi}{12}$$

于是 z 的三角形形式和指数形式为

$$z = \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} = e^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

1.1.3 复数的四则运算

设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ 是两个复数.

(1) 加法和减法

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2). \quad (1.4)$$

几何意义

由于复数可以用向量表示, 所以, 复数的加减法与向量的加减法一致, 满足平行四边形法则(图 1-4)和三角形法则(图 1-5).

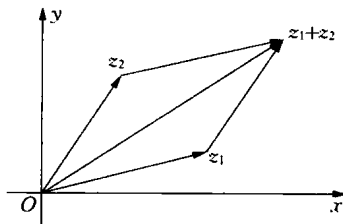


图 1-4

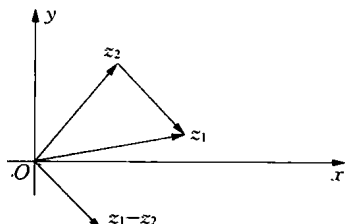


图 1-5

(2) 复数乘法 两个复数相乘, 可以按多项式乘法法则来进行. 即

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (1.5)$$

若复数用三角形形式或指数形式表示, 即

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2},$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (1.6)$$

显然

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2. \quad (1.7)$$

复数乘法的几何意义: 复数 z_1 与 z_2 的乘积在几何上相当于把向量 z_1 旋转 θ_2 ($\theta_2 > 0$)

时,沿逆时针旋转),然后再伸长 ($|r_2| > 1$) 或缩短 ($|r_2| < 1$) $|r_2|$ 倍(图 1-6).

(3) 除法

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0).\end{aligned}\quad (1.8)$$

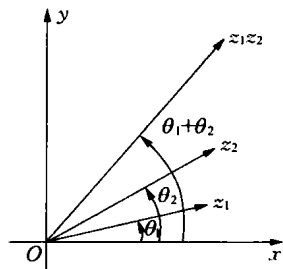


图 1-6

若 $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$

$$\text{则 } \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.\quad (1.9)$$

显然

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (|z_2| \neq 0), \quad \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.\quad (1.10)$$

复数除法的几何意义: 复数 z_1 与 z_2 的商 $\frac{z_1}{z_2}$ ($z_2 \neq 0$) 在几何上相当于把向量 z_1 旋转 θ_2 ($\theta_2 > 0$ 时, 沿顺时针旋转), 然后再伸长 ($|r_2| < 1$) 或缩短 ($|r_2| > 1$) $\left| \frac{1}{r_2} \right|$ 倍(图 1-7).

(4) 共轭复数的运算

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)$$

$$z \bar{z} = |z|^2 = r^2 = x^2 + y^2 = (\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2.$$

复数的运算满足如下运算律.

已知复数 z_1, z_2, z_3 , 则有

交换律 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$

结合律 $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$

分配律 $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$

例 1.3 设 $z = \frac{2+i}{i} - \frac{2i}{1-i}$, 求 $\text{Re } z, \text{Im } z, z \bar{z}.$

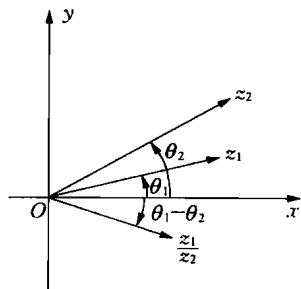


图 1-7

$$\begin{aligned}\text{解 } z &= \frac{2+i}{i} - \frac{2i}{1-i} = \frac{(2+i)(-i)}{i(-i)} - \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= -2i + 1 - \frac{2i(1+i)}{2} = 2 - 3i\end{aligned}$$

故

$$\operatorname{Re} z = 2, \operatorname{Im} z = -3, z\bar{z} = |z|^2 = 2^2 + (-3)^2 = 13.$$

例 1.4 设复数 z 满足 $z\bar{z} - 3i\bar{z} = 1 + 3i$, 求复数 z .

解 设 $z = x + iy$, 则 $\bar{z} = x - iy$, 代入原方程有

$$x^2 + y^2 - 3y - 3ix = 1 + 3i$$

于是有

$$\begin{cases} -3x = 3 \\ x^2 + y^2 - 3y = 1 \end{cases}$$

解得

$$x = -1, y = 0 \text{ 或 } 3$$

所以

$$z = -1 \text{ 或 } z = -1 + 3i.$$

例 1.5 证明不等式 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

证 由于 $z\bar{z} = |z|^2$, 所以有

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2\end{aligned}$$

由于 $z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 = \overline{z_2z_1} + \bar{z}_2z_1 = 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$, 于是

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2.\end{aligned}$$

于是, 该不等式成立. 它的几何意义是: 三角形的两边之和大于第三边.

例 1.6 将直角坐标系下的直线方程 $ax + by + c = 0$ 化为复变量形式.

解 由于 $z = x + iy$, $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$, 于是

$$a(z + \bar{z}) - ib(z - \bar{z}) + 2c = 0$$

$$(a - ib)z + (a + ib)\bar{z} = -2c$$

令 $A = a + ib$, $B = -2c$, 则可得

$$\bar{A}z + A\bar{z} = B.$$

实际上,很多平面图形都能用复数形式的方程(或不等式)来表示.另外,也可以由给定的复数形式的方程(或不等式)来确定它所表示的平面图形.

例 1.7 求下列复数方程所表示的点的轨迹:

$$(1) |z + i| = 1; \quad (2) \operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 4; \quad (3) |z - 1| = \operatorname{Re} z + 1.$$

解 (1) 在几何上不难看出,方程 $|z + i| = 1$ 表示所有与点 $-i$ 距离为 1 的点的轨迹,即圆心为 $-i$,半径为 1 的圆.

(2) 令 $z = x + iy$, 则 $\bar{z} = x - iy$, $\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = \operatorname{Im}(x + (1 - y)i) = 1 - y$, 于是可得

$$1 - y = 4, \text{ 即 } y = -3, \text{ 是一条平行于 } x \text{ 轴的直线.}$$

$$(3) \text{ 令 } z = x + iy, \text{ 则 } \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = x + 1, \text{ 即 } y^2 = 4x, \text{ 表示一条抛物线.}$$

1.1.4 复数的乘幂与开方

(1) 复数的乘幂

我们把 n 个相同的复数 z 的乘积称为 z 的 n 次方幂,即

$$z^n = \overbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}^n$$

设 $z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, 则

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad (1.11)$$

特别地,当 $r=1$ 时,

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (1.12)$$

式(1.12)称为棣莫弗(De Moivre)公式.

例 1.8 试将 $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$ 分别用 $\cos \theta$, $\sin \theta$ 表示.

解 由式(1.11),取 $n=3$ 即得

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

故

$$\cos 3\theta + i \sin 3\theta = \cos^3 \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta + i(3\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)$$

根据复数相等的定义,即得

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$$