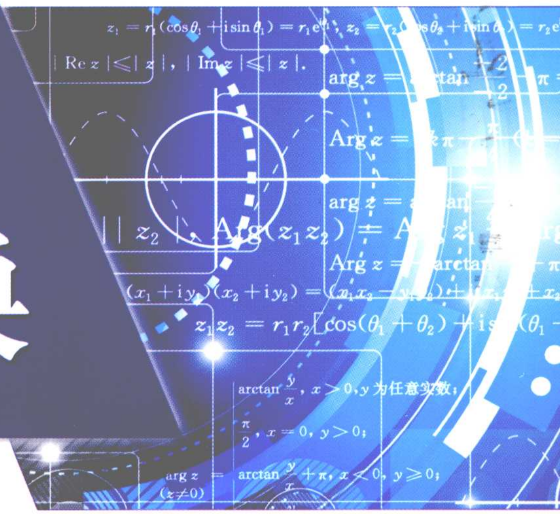
FUBIAN HANSHU YU JIFEN BIANHUAN

普通高等教育公共基础课程用书

（第二版）

复变函数与积分变换



主编 赵建丛 黄文亮

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

复变函数与积分变换

（第二版）

赵建丛　黄文亮　主编

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/赵建丛,黄文亮主编.—2版.—上海:华东理工大学出版社,2012.2
ISBN 978-7-5628-3219-5

Ⅰ.复… Ⅱ.①赵…②黄… Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材 ②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ.O174.5②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第010444号

复变函数与积分变换(第二版)

主　　编/赵建丛　黄文亮
责任编辑/郭　艳
责任校对/金慧娟
封面设计/裘幼华
出版发行/华东理工大学出版社有限公司
地址:上海市梅陇路130号,200237
电话:(021)64250306(营销部)　64252714(编辑部)
传真:(021)64252707
网址:pess.ecust.edu.cn
印　　刷/常熟华顺印刷有限公司
开　　本/787 mm×1092 mm　1/16
印　　张/14
字　　数/335千字
版　　次/2012年2月第2版
印　　次/2012年2月第1次
书　　号/ISBN 978-7-5628-3219-5/O·242
定　　价/29.80元

第二版前言

本书是在第一版的基础上广泛吸取了教师和学生的意见后修订而成的. 新版教材在主要内容和结构框架上未做大的变动,秉承原有特色,对已经发现的错误和不妥之处进行了修正,并调整了一些例题和习题. 为了满足某些专业的应用,在第 5 章增加了辐角原理及其应用,在第 7 章增加了 Fourier 变换的能量积分和乘积定理,在第 8 章增加了 Laplace 变换的初值定理和终值定理,这些内容都加了“ * ”号,读者可根据需要选学.

本教材的修订得到了华东理工大学教材建设委员会的大力支持,在修订工作中,李建奎、邵方明、章文华、李启慧等老师为本书提供了很多宝贵的意见和建议,在此向他们表示衷心的感谢! 也衷心感谢使用过本书第一版的广大师生,感谢在本书编写过程中所参阅的资料的作者.

由于编者水平有限,书中难免有不当和不妥之处,敬请专家、读者予以指正.

编　者

2011.12

前　言

“复变函数与积分变换”是面向高等工科院校学生的具有明显工程应用背景的数学课程. 随着科学技术的迅速发展，它的理论和方法已广泛应用于电工技术、力学、自动控制、通信技术等许多工程技术和科学研究领域. 为了更好地体现本课程的实用性和工科学生学习的特点，满足教学改革和课程建设的需求，我们编写了这本教学用书.

本书是在编者多年来讲授工科复变函数与积分变换课程的基础上，遵照教育部制定的对本课程教学大纲的基本要求编写而成的. 在编写过程中，我们广泛吸取了国内同类教材的主要优点，并融合了编者多年来讲授该门课程的经验和体会. 考虑到工科学生学习本课程的目的主要在于实用，我们侧重了对基本概念和解题方法的讲解，基本概念的引入尽可能联系实际，淡化了一些理论的证明. 在内容安排上力求由浅入深，循序渐进. 与同类教材相比，本书删减了部分理论性较强的内容，使之更适合工科学生阅读. 同时，为了便于自学和实际的需要，在注意行文的科学性与严密性的同时，力求叙述简洁，通俗易懂. 本书在每一章都安排了较多的例题与习题，并且在例题和习题的选择上注重典型性和多样性，以培养学生解决实际问题的能力. 同时，本书以每三章为一阶段配有阶段复习题，并在全书的最后安排了期末模拟试题. 书后附有习题答案供读者参考.

本教材是华东理工大学“十一五”规划教材，并获得了华东理工大学优秀教材出版基金的资助. 在编写过程中，得到了华东理工大学教材建设委员会的大力支持，得到了华东理工大学理学院鲁习文院长和张先梅副院长的关心和支持，在此对他们表示衷心的感谢. 还要特别感谢李建奎教授，他始终关心本教材的编写和出版，在本教材的编写过程中提出了许多宝贵建议，并通读了本教材初稿. 同时，还要感谢刘剑平、殷锡鸣、章文华、黄定江、邵方明等老师，他们在本书编写过程中提供了宝贵的建议. 还要感谢路冠军同学，他在该书的完成中做了许多工作.

限于编者的水平，本书难免有不妥与不足之处，敬请广大师生和读者指正.

编　者

2008. 6

目 录

1 复数与复变函数

复变函数是本课程研究的对象，它是以复数作为自变量和因变量取值的函数. 复变函数的理论和方法在数学、自然科学和工程技术中都有着广泛的应用，是解决诸如流体力学、电磁学、热学、弹性理论中平面问题的有力工具.

本章将首先从代数和几何两方面讨论复数的概念及其运算，然后讨论复变函数及其连续和可导的概念，这些内容为研究解析函数奠定了必要的基础.

1.1 复数及其运算

1.1.1 复数的概念

形如 $x+\mathrm{i}y$ 的数称为**复数**，其中 x 和 y 是任意两个实数；i 称为**虚数单位**，满足 $\mathrm{i}^2=-1$，通常记复数为 $z=x+\mathrm{i}y$.

x, y 又分别称为复数 z 的**实部**与**虚部**，记作

$$x=\operatorname{Re} z,\ y=\operatorname{Im} z.$$

当 $y=0$ 时，$z=x$，即为实数 x；当 $y\neq 0$ 且 $x=0$ 时，$z=\mathrm{i}y$，称之为**纯虚数**.

由所有复数构成的集合称为**复数集**或**复数域**，常用 **C** 表示.

$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 是两个复数，当且仅当 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ 时，称两个复数**相等**，记作 $z_1=z_2$.

我们把 $x+\mathrm{i}y$ 与 $x-\mathrm{i}y$ 称为**互为共轭的复数**. 若记 $z=x+\mathrm{i}y$，则其共轭复数记作 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$.

显然，$\bar{\bar{z}}=z$, $\operatorname{Re} z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z=\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$.

1.1.2 复平面

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 本质上可由一对有序实数 (x, y) 唯一确定，于是我们可以建立平面上的全部点与全体复数间的一一对应关系. 换句话说，可以借助于横坐标为 x、纵坐标为 y 的点来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$（图 1-1）. 由于 x 轴上的点对应着实数，y 轴（非原点）对应着纯

虚数，故称 x 轴为**实轴**，y 轴为**虚轴**，这样表示的平面称为**复平面**或 **z 平面**.

于是，对于复数 $z=x+\mathrm{i}y$，我们也可以说点 z. 例如，点 $z=1+2\mathrm{i}$. 为方便起见，我们不再区分复数与复平面上的点.

在复平面上，从原点到点 $z=x+\mathrm{i}y$ 所引的向量$\boldsymbol{OP}$与复数 z 也构成一一对应关系（复数 0 对应零向量）（图 1－1），所以，复数 z 也可以看成是复平面内的向量.

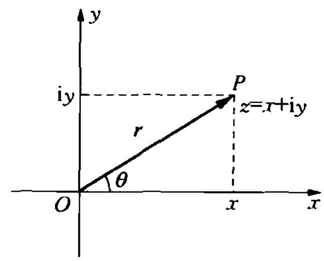


图 1－1

向量$\boldsymbol{OP}$的长度称为复数 z 的**模**，记为 $|z|$ 或 r，即 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$.

显然，$|\operatorname{Re} z|\leqslant|z|$，$|\operatorname{Im} z|\leqslant|z|$.

以正实轴为始边，以 $z(z\neq 0)$ 所对应的向量为终边的角称为复数 z 的**辐角**(Argument)，记为 $\operatorname{Arg} z$.

显然辐角是多值的，它们之间相差 2π 的整数倍. 我们把在 $(-\pi,\pi]$ 之间的辐角称为 z 的**主辐角**（或**主值**），记为 $\arg z$. 于是

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi\ (k=0,\pm 1,\cdots) \tag{1.1}$$

注意，当 $z=0$ 时，辐角无意义.

$\arg z$ 可由反正切 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 的主值 $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 按如下关系确定（图 1－2，图 1－3）.

$$\underset{(z\neq 0)}{\arg z}=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x},\ x>0,y\ \text{为任意实数}; \\ \dfrac{\pi}{2},\ x=0,\ y>0; \\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi,\ x<0,\ y\geqslant 0; \\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi,\ x<0,\ y<0; \\ -\dfrac{\pi}{2},\ x=0,\ y<0.\end{cases}$$

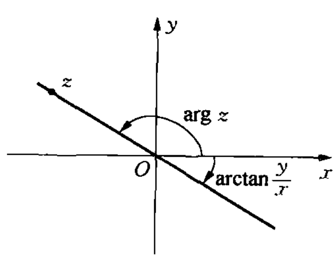


图 1－2

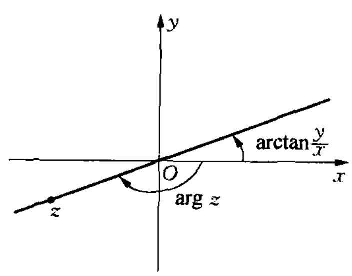


图 1－3

例 1.1　计算下列复数的辐角：

(1) $z=2-2\mathrm{i}$; (2) $z=-2-2\mathrm{i}$; (3) $z=-3+4\mathrm{i}$.

解　(1) $\arg z=\arctan\dfrac{-2}{2}=\arctan(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$

$$\operatorname{Arg} z=2k\pi-\frac{\pi}{4}\ (k=0,\pm 1,\cdots).$$

(2) $\arg z=\arctan\dfrac{-2}{-2}-\pi=\arctan 1-\pi=-\dfrac{3}{4}\pi$

$$\operatorname{Arg} z=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\ (k=0,\pm 1,\cdots).$$

(3) $\arg z=\arctan\dfrac{-3}{4}+\pi=-\arctan\dfrac{3}{4}+\pi$

$$\operatorname{Arg} z=-\arctan\frac{3}{4}+\pi+2k\pi\ (k=0,\pm 1,\cdots).$$

另外，根据图 1-1 还可以用复数的模与辐角来表示非零的复数 z，即

$$z=x+\mathrm{i}y=r\left(\frac{x}{r}+\mathrm{i}\frac{y}{r}\right)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta). \tag{1.2}$$

由 Euler 公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,$$

我们可把式(1.2)写成

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.3}$$

分别称式(1.2)和式(1.3)为复数的**三角形式**和**指数形式**. 相应地，$z=x+\mathrm{i}y$ 称为复数的**代数形式**. 三种形式是可以相互转化的.

例 1.2　将下列复数化为三角形式和指数形式：

(1) $z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$; (2) $z=\sin\dfrac{\pi}{12}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{12}$.

解　(1) 显然，$r=|z|=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=2$，由于 $z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 在第二象限，

$$\tan\theta=-\sqrt{3},\ \theta=\frac{2\pi}{3},$$

于是，$z=-1+3\mathrm{i}$ 的三角形式和指数形式为

$$z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}.$$

(2) 显然，$r=|z|=1$，而

$$\sin\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{5\pi}{12}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{5\pi}{12}$$

于是 z 的三角形式和指数形式为

$$z=\cos\frac{5\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}.$$

1.1.3　复数的四则运算

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 是两个复数.

(1) 加法和减法

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2). \tag{1.4}$$

几何意义

由于复数可以用向量表示，所以，复数的加减法与向量的加减法一致，满足平行四边形法则(图 1-4)和三角形法则(图 1-5).

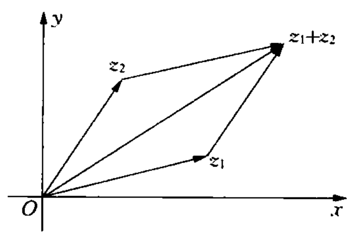


图 1-4

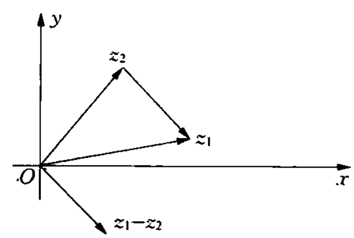


图 1-5

(2) 复数乘法　两个复数相乘，可以按多项式乘法法则来进行. 即

$$z_1z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1). \tag{1.5}$$

若复数用三角形式或指数形式表示，即

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\ z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2},$$

则

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}. \tag{1.6}$$

显然

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\ \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2. \tag{1.7}$$

复数乘法的几何意义：复数 z_1 与 z_2 的乘积在几何上相当于把向量 z_1 旋转 $\theta_2(\theta_2>0$

时，沿逆时针旋转)，然后再伸长 ($|r_2|>1$) 或缩短 ($|r_2|<1$) $|r_2|$ 倍(图 1-6).

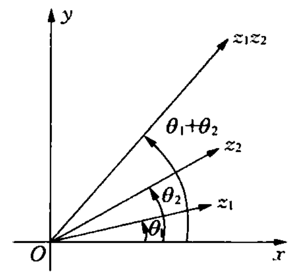


图 1-6

(3) 除法

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$
$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\ (z_2\neq 0). \qquad (1.8)$$

若 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$

则 $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}. \qquad (1.9)$$

显然

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\ (|z_2|\neq 0),\ \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{Arg}\,z_2. \qquad (1.10)$$

复数除法的几何意义：复数 z_1 与 z_2 的商 $\frac{z_1}{z_2}(z_2\neq 0)$ 在几何上相当于把向量 z_1 旋转 θ_2($\theta_2>0$ 时，沿顺时针旋转)，然后再伸长 ($|r_2|<1$) 或缩短 ($|r_2|>1$) $\left|\frac{1}{r_2}\right|$ 倍(图 1-7).

(4) 共轭复数的运算

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},\quad \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\ (z_2\neq 0)$$

$$z\overline{z}=|z|^2=r^2=x^2+y^2=(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2.$$

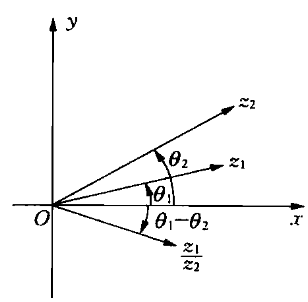


图 1-7

复数的运算满足如下运算律.

已知复数 z_1, z_2, z_3，则有

交换律 $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$.

结合律 $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$.

分配律 $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

例 1.3 设 $z=\frac{2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}-\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\mathrm{Re}\,z$, $\mathrm{Im}\,z$, $z\overline{z}$.

解　$z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}-\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(2+\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}-\dfrac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}$

$$=-2\mathrm{i}+1-\frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{2}=2-3\mathrm{i}$$

故

$$\operatorname{Re} z=2,\ \operatorname{Im} z=-3,\ z\bar{z}=|z|^2=2^2+(-3)^2=13.$$

例 1.4　设复数 z 满足 $z\bar{z}-3\mathrm{i}\bar{z}=1+3\mathrm{i}$，求复数 z.

解　设 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$，代入原方程有

$$x^2+y^2-3y-3\mathrm{i}x=1+3\mathrm{i}$$

于是有

$$\begin{cases}-3x=3\\ x^2+y^2-3y=1\end{cases}$$

解得　$x=-1, y=0$ 或 3

所以　$z=-1$ 或 $z=-1+3\mathrm{i}$.

例 1.5　证明不等式　$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

证　由于 $z\bar{z}=|z|^2$，所以有

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$

$$=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2+z_2\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2$$

由于 $z_2\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2=\overline{\bar{z}_2 z_1}+\bar{z}_2 z_1=2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$，于是

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

$$\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$$

$$=(|z_1|+|z_2|)^2.$$

于是，该不等式成立. 它的几何意义是：三角形的两边之和大于第三边.

例 1.6　将直角坐标系下的直线方程 $ax+by+c=0$ 化为复变量形式.

解　由于 $z=x+\mathrm{i}y$，$x=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$，$y=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$，于是

$$a(z+\bar{z})-\mathrm{i}b(z-\bar{z})+2c=0$$

$$(a-\mathrm{i}b)z+(a+\mathrm{i}b)\bar{z}=-2c$$

令 $A = a + \mathrm{i}b$, $B = -2c$，则可得

$$\overline{A}z + A\overline{z} = B.$$

实际上，很多平面图形都能用复数形式的方程(或不等式)来表示. 另外，也可以由给定的复数形式的方程(或不等式)来确定它所表示的平面图形.

例 1.7 求下列复数方程所表示的点的轨迹：

(1) $|z+\mathrm{i}| = 1$； (2) $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\overline{z}) = 4$； (3) $|z-1| = \mathrm{Re}\,z + 1$.

解 (1) 在几何上不难看出，方程 $|z+\mathrm{i}| = 1$ 表示所有与点 $-\mathrm{i}$ 距离为 1 的点的轨迹，即圆心为 $-\mathrm{i}$，半径为 1 的圆.

(2) 令 $z = x + \mathrm{i}y$，则 $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$, $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\overline{z}) = \mathrm{Im}(x + (1-y)\mathrm{i}) = 1 - y$，于是可得

$$1 - y = 4\text{，即 } y = -3\text{，是一条平行于 } x \text{ 轴的直线.}$$

(3) 令 $z = x + \mathrm{i}y$，则 $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = x + 1$，即 $y^2 = 4x$，表示一条抛物线.

1.1.4 复数的乘幂与开方

(1) 复数的乘幂

我们把 n 个相同的复数 z 的乘积称为 z 的 **n 次方幂**，即

$$z^n = \overbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}^{n}$$

设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，则

$$z^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) \tag{1.11}$$

特别地，当 $r=1$ 时，

$$z^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta \tag{1.12}$$

式(1.12)称为**棣莫弗(De Moivre)公式**.

例 1.8 试将 $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$ 分别用 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 表示.

解 由式(1.11)，取 $n = 3$ 即得

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta$$

故

$$\cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + \mathrm{i}(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

根据复数相等的定义，即得

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$