夢溪筆談校證

夢溪筆談全編卷二十四　　沈括存中述

雜誌一

延州今有五城說者以謂舊有東西二城夾河對立高萬興典郡始展南北東三關城余因讀杜甫詩云五城何迢、迢、隔河水延州秦北戶關防猶可倚乃知天寶中已有五城矣

鄜延境內有石油舊說高奴縣出脂水即此也生於水際沙石與泉水相雜惘惘而出土人以雉尾裛

編號：158

夢溪筆談校證（上下二冊）　類別：文學藝術

著者　〔宋〕沈括
校注者　胡道靜
出版者　上海出版公司
上海市書刊出版業營業許可證出零叁肆號
地址：上海市南京東路153號
排版者　廣華印刷廠
地址：上海市七浦路254弄10號
印刷者　華新日曆印刷廠
地址：上海市海寧路791弄4號
經售者　新華書店上海發行所

定價：進口紙本人民幣7元　一九五六年一月第一版
字數：784,000　印數：1—2,200—一九五六年一月第一次印刷
開本：762耗×1067耗1/25　印張：49-3/25

宋錢塘沈括撰

技藝 校 崇禎本『藝』下有『一』字，它本均無。林校記云：『舊本無「一」字。』

賈魏公爲相日，有方士姓許，對人未嘗稱名，無貴賤皆稱『我』，時人謂之許我。校 『時』弘治本作『將』，稗海本作『士』。言談頗有可採，然傲誕，視公卿蔑如也。校 弘治本『蔑』作『滅』。公欲見，使人邀召數四，校 揮犀四『召』作『之』。卒不至。又使門人苦邀致之，許騎驢徑欲造丞相廳事，門吏止之不可，吏曰：『此丞相廳門，雖丞郎亦須下。』許曰：『我無所求於丞相，丞相召我來。若如此，但須我去耳。』不下驢而去。門吏急追之不還，以白丞相。魏公又使人謝而召之，終不至。公歎曰：『許市井人耳，惟其無所求於人，尚不可以勢屈，況其以道義自任者乎！』㈠㈡ 校 學津本脫『以』字。【18一*二九八

㈠宋吳坰五總志：

富鄭公初不識許我，聞其名，遽召見之。我乘馬直造廳廡，謁者請就賓次通姓名，我曰：『既召我來，而不迎我，是見輕也。』復乘馬逕去。公聞之嘆息曰：『許我所以能「我」者，以無所求，而俯仰在我也。』

㈡宋王闢之澠水燕談錄卷第四『高逸』：

史延壽，嘉州人，以善相遊京師，貴人爭延之。視貴賤如一，坐輒箕踞爾我，人號曰『史不拘，』又曰『史我。』呂文靖公嘗邀之，延壽至，怒閽門不開門，批之，閽者曰：『此相公宅，雖侍臣亦就客次。』延壽曰：『彼來者皆有求於相公。我無求，相公自欲見我耳。不開門，我竟還矣。』閽者走白公，開門迎之。延壽挾術以遊于世，無心於用舍，故能自重也如此。

按宋人軼事彙編云：『五總志以邀許我者爲富鄭公；澠水燕談錄述史延壽號史我，呂文靖爲相嘗邀之，事迹略同。大抵一人一事，而傳說紛歧也。』

營舍之法，按類苑五十二引『營』作『造』。謂之木經，或云喩皓按『皓』，弘治本、稗海本及類苑五十二引同，津逮本、崇禎本、學津本、玉海堂本、叢刊本均作『晧』。三一二條則各本皆作『晧』字。所撰。㊀至㊂ 凡屋有三分，去聲 自梁以上爲『上分，』地以上爲『中分，』階爲『下分。』凡梁長幾何，則配極幾何，以爲榱等。如梁長八尺，配極三尺五寸，則廳法堂也。此謂之『上分。』楹若干尺，則配堂基若干尺，以爲榱等。若楹一丈一尺，則階基四尺五寸之類，按『基』弘治本作『級』。以至承栱榱桷，皆有定法，謂之『中分。』階級有峻、平、慢三等。宮中則以御輦爲法。凡自下而登，前竿垂盡臂，後竿展盡臂，爲『峻道；』荷輦十二人：前二人曰『前竿』，次二人曰『前條』，又次曰『前脇』；後二人曰『後脇』，又後曰『後條』，末後曰『後竿』；輦前隊長一人曰『傳唱』，後一人曰『報賽』。按『次二人』津逮本、玉海堂本、叢刊本作『女二人』。『前脇』津逮本、玉海堂本、叢刊本誤作『前會』。『後二人曰「後脇」』，類苑五十二引『二』作『一』，津逮本、玉海堂本、叢刊本作『三』。『後條』弘治本作『後修』，稗海本作『後脩』。『輦前隊長』，類苑引『前』作『併』。前竿平肘，後竿平肩，爲『慢道；』前竿垂手，後竿平肩，爲『平道，』此之爲『下分。』按弘治本、稗海本及類苑五十二引『爲』作『謂』。其書三

卷。近歲土木之工，校 林校記云：『舊本「之」作「人」。』益爲嚴善，舊木經多不用，未有人重爲之，㈣亦良工之一業也。

【18 二＊二九九

㈠宋晁公武昭德先生讀書後志第一卷『史類職官類』

將作營造法式三十四卷。右皇朝李誡撰，熙寧初，勑將作監編修營造法式，誡以爲未備，乃考究經史，詢訪匠氏，以成此書，頒于列郡。世謂喻皓木經，極爲精詳，此書蓋過之。

㈡宋歐陽修歸田錄卷一：

開寶寺塔，〔一〕在京師諸塔中最高，而制度甚精，都料匠預浩所造也。塔初成，望之不正而勢傾西北，人怪而問之，浩曰：『京師地平無山，而多西北風，吹之不百年，當正也。』其用心之精蓋如此。國朝以來木工一人而已。至今木工皆以預都料爲法，有木經三卷行於世。世傳浩惟一女，年十餘歲，每臥，則交手於胸爲結構狀；如此踰年，撰成木經三卷，今行於世者是也。

按依歸田錄所誌傳說，則木經乃喻皓之女所撰。『喻皓』之寫法，又有作『預皓、』『喻皓、』『喻浩』（此見楊文公談苑）者。

〔一〕李燾續資治通鑑卷四云：『開寶寺塔，成于端拱二年八月。』

㈢梁思成中國建築與中國建築師：

人民傳頌的建築師，第一名我們應該提出魯班。二千多年來，他被供奉爲木匠之神。……十世

紀末葉的著名匠師喩皓，最長於建造木塔及多層樓房。他設計河南省開封的開寶寺塔，先作模型，然後施工。他預計塔身在一百年西北傾側，以抵抗當地的主要風向。他預計塔身在一百年內可以被風吹正，並預計塔可存在七百年。可惜這塔因開封的若干次水災，宋代的建設現在已全部不存，殘餘遺跡也極少，這塔也不存痕跡了。此外喩皓曾將木材建造技術著成木經一書，後來宋代的營造法式就是依據此書寫成的。文物參考資料一九五三年第十期頁六七。

㊃按，營造法式以元符三年（一一〇〇）成書，崇寧二年（一一〇三）刊行。筆談成書在元祐（一〇八六—九三）間，故謂『未有人爲之』也。

審方面勢，覆量高深遠近，算家謂之『軎術』。**校**『軎』弘治本、津逮本、崇禎本、學津本、玉海堂本、叢刊本作『叀』，稗海本作『叀』，類苑五十二引作『叀』。下『軎』字亦如此。軎文象形，如繩木所用墨斗也。求星辰之行，步氣朔消長，謂之『綴術』。謂不可以形察，但以算數綴之而已。北齊祖亘有綴術二卷。㊀ 【18三*三〇〇

㊀錢寶琮關於祖暅和他的綴術：

祖暅是祖冲之〔四二九—五〇〇〕的兒子。和他的父親一樣，也是一位博學多才的科學家。他的生卒年代無可查考，在梁朝初年（公元五〇四年和五〇九年）他兩次建議修改曆法，提出他父親所創造的大明曆術，說可以糾正何承天元嘉曆術的疏遠。……

和祖暅同一時代的一位目錄學家阮孝緒(四七九—五三六)撰七錄，其中數術的部分請他編訂。(阮孝緒七錄序)顏之推少年時在梁朝做官，他說：『算術亦是六藝要事，……江南此學殊少，惟范陽祖暅精之，位至南康太守。』(顏氏家訓雜藝篇)所以祖氏名暅是無可懷疑的。唐初，王孝通撰輯古算術，自序說：『祖暅之綴術，時人稱之精妙。』所謂『祖暅之綴術』應該解釋作祖暅的綴算書。然而李淳風注釋九章算術，他在少廣章立圓術注中引祖暅的球體積公式的理論基礎時，『暅』字下邊多了一個『之』字。李延壽南史卷七十二文學傳也說，祖冲之的兒子名叫『暅之。』清阮元的疇人傳，因而爲『祖暅之』作傳。依據上面所引阮孝緒七錄序、顏氏家訓、梁書、北史、隋書等史料，這被後人憑空添出來的『之』字是應該删去的。

南齊書祖冲之傳和南史文學傳都說，冲之『注九章，造綴術數十篇。』隋書律曆志於敍述祖冲之在數學工作中的偉大成就後，說『所著之書名爲綴術。』經籍志記錄『綴術六卷』而沒有註明作者姓名。唐書經籍志載『綴術五卷，祖冲之撰。』綴術當然是祖冲之的數學傑作，他的數學研究，如圓周率的計算，開差冪，開差立算法的應用之類，都應該包含在內。王孝通說：『祖暅之綴術』却是把祖暅做綴術的作者的。大概在祖冲之死後，他的兒子又把他自己的數學研究添寫上去，豐富了綴術的內容。計算球體積的正確公式也許就是他添上去的得意之作。(數學通報一九五四年三月號頁一二。)

算術求積尺之法，校 『算術』玉海堂本、叢刊本作『筭𢾗』，津逮本作『□數』。算經十書作『數求積尺之法』，蓋從津逮本之脫字者也。林校記云：『「算術」，舊本作「筭數」。』王校記云：『「算數」，毛、馬同，陶作「算術」。』按，毛本實作『□數』，而馬本亦作『算術』也。 如芻萌、芻甍、方池、冥谷、塹堵、鼈臑、圓錐、陽馬之類，㊀ 校 算經十書『萌』作『甍』。 物形備矣，獨未有『隙積』一術。古法，凡算方積之物，有『立方』，謂六幕皆方者，校 類苑五十二引『幕』作『羃』。 其法再自乘則得之。有『塹堵』，謂如土牆者，兩邊殺，兩頭齊，其法併上下廣折半以為之廣，以直高乘之，又以直高為股，校 『股』各本均誤作『句』，從張文虎說校正，見注㊁。 以上廣減下廣，餘者半之為句，校 各本並脫『半之』二字，又誤『句』為『股』，從張文虎說校正，見注㊂。 句股求弦，校 『求』各本均誤作『乘』，從張文虎說校正，見注㊂。 以為斜高。有『芻童』，謂如覆㪷者，四面皆殺，其法倍上長加入下長，以上廣乘之，倍下長加入上長，以下廣乘之，併二位法，以高乘之，六而二。『隙積』者，㊃㊄ 謂積之有隙者，如累棊層壇及酒家積罌之類，雖似覆斗，校 『似』弘治本、稗海本誤作『以』，其它各本作『佀』。『斗』類苑五十二引作『㪷』。 四面皆殺，緣有刻缺及虛隙之處，用『芻童法』求之，常失於數少。予思而得之，用『芻童法』為上行、下行，別列下廣，以上廣減之，餘者以高乘之，六而一，併入上行。假令積罌：最上行縱廣各二罌，最下行各十二罌，行行相次，先以上二行相次，率至十二，當十一行也。以『芻童法』求之，倍上行長得四，併入下長得十六，以上廣乘之，得之三十二，又倍下二長得十六，併入上長，得四十六㊂，以下廣乘之，得三百一十二，併二位得三百四十四，以高乘之，得三千七百八十四，重列下廣十二，以上廣減之餘十，以高乘之，得一百一十，併入上行，得三千八百九十四，六而一，得六百四十九，此為罌數也。『芻童』求見實方之積，『隙積』求見合角不盡益出羨積也。校 『最上行縱廣』，玉海堂本、叢刊本『行』作『无』。『最下行各十二罌行行相次』，玉海堂本、叢刊本、津逮本、算經十書作『最下行各十二行行罌相次』。『先以上二行相次』，弘治本、稗海本『先』下有『止』字。『當十一行也』，原作『當十二行也』，崇禎本同，其它各本及類苑引、算經十書並作『十一行』。『得之三十二』，『之』字原脫，崇禎本同，從其它各本及類苑引補。『三十二』弘治本作『二十一』，其它各本並作『二十二』，算經十書作『三十二』，今從十書校正。『又倍下二長』，津逮本、玉海堂本、叢刊本『又』誤作『人』；弘治本、稗海本、崇禎本、愛廬本脫『二』字。『得三百一十二，弘治本、

稗海本脫『二』字。『倂二位』，『位』各本均誤作『倍』，從張文虎說校正。『得三百四十四』，弘治本、稗海本『得』上有『重』字。『得三千七百八十四』，各本『三』誤作『二』，從張文虎說校正。『以上廣減之』，類苑引『以』作『已』。『得一百一十』，津逮本、學津本、玉海堂本、叢刊本『得』作『則』。『得三千八百』，津逮本、玉海堂本、叢刊本及算經十書『得』作『者』。『此爲罊數也』，弘治本、稗海本『爲』作『謂』。履畝之法，方圓曲直盡矣，未有『會圓』之術。㊅ 校『圓』原作『圜』，從其它各本並類苑五十二引校正。凡圓田既能拆之，校『拆』弘治本、稗海本及算經十書作『折』，類苑五十二引作『析』。須使會之復圓，古法惟以中破圓法拆之，校『拆』弘治本、稗海本、類苑五十二引、算經十書均作『折』。其失有及三倍者。予別爲『拆會』之術，校『爲』原作『無』，津逮本、崇禎本、玉海堂本、叢刊本同誤，從弘治本、稗海本、學津本校正。『拆』原作折，從學津本改，其它各本亦均作『折』。置圓田徑半之以爲弦，又以半徑減去所割數，餘者爲股，各自乘，以股除弦，餘者開方除爲句，倍之爲割田之直徑，以所割之數自乘，退一位倍之，又以圓徑除所得，加入直徑爲割田之弧，再割亦如之，減去已割之數，則再割之數也。校 假令有圓田徑十步，欲割二步，以半徑爲弦，五步自乘得二十五，又以半徑減去所割二步，餘三步爲股，自乘得九，用減弦外，有十六開平方，除得四步爲句，倍之；爲所割直徑，以所割之數二步自乘爲四，倍之得爲八，退上一位爲四尺，以圓徑除。今圓徑十，已是盈數，無可除，只用四尺加入直徑，爲所割之弧，凡得圓徑八步四尺也，再割亦依此法，如圓徑二十步求弧數，則當折半，乃所謂以圓徑除之也。校『又以半徑減去』，玉海堂本『去』誤作『式』。『退上一位』，『位』字各本俱誤作『倍』，從張文虎說校正。『圓徑八步四尺』，玉海堂本、叢刊本『八』誤作『入』。『則當折半』，弘治本、稗海本『則』下有罊釘，作『則■當折半』，玉海堂本『折』作『拆』。此二類皆造微之術，古書所不到者，漫志於此。㊆

【18 四＊三〇一】

㊀魏劉徽注、唐李淳風釋九章算術卷第五『商功』

今有圓錐，下周三丈五尺，高五丈一尺，問積幾何？

答曰：一千七百三十五尺一十二分尺之五。於徽術當積一千六百五十八尺三百一十四分尺之十三，依密率爲積一千六百五十六尺八十八分尺之四十七

術曰：下周自乘，以高乘之，三十六而一。按，此術圓錐下周，以爲方錐下方，方錐下方令自乘，以高乘之，合三而一，得大錐方之積。大錐方之積，合十二圓矣。今求一圓，復

合十二除之，故令三乘十二，得三十六而連除。於徽術當下周自乘，以高乘之，又以二十五乘之，九百四十二而一。圓錐比於方錐，亦二百分之一百五十七，令徑自乘者，亦當以一百五十七乘之，六百而一。臣淳風等謹按，依密率，以七乘之，二百六十四而一。

今有塹堵，下廣二丈，袤一十八丈六尺，高二丈五尺，問積幾何？

答曰：四萬六千五百尺。

術曰：廣袤相乘，以高乘之，二而一。邪解立方，得兩壍堵，雖復橢方，亦爲壍堵，故二而一。此則合所見纂，推其物體，蓋爲壍上疊也。其形如城，而無上廣，與所規基形異而同實，未聞所以名之爲壍堵之說也。

今有陽馬，廣五尺，袤七尺，高八尺，問積幾何？

答曰：九十三尺少半尺。

術曰：廣袤相乘，以高乘之，三而一。按，此術陽馬之形，方錐一隅也。今謂四柱屋隅爲『陽馬』。假令廣袤各一尺，高一尺，相乘之，得立方積一尺。邪解立方，得兩壍堵。邪解壍堵，其一爲陽馬，一爲鼈臑；陽馬居二，鼈臑居一，不易之率也。合兩鼈臑，成一陽馬；合三陽馬，而成一立方，故三而一。驗之以棊，其形露矣。悉割陽馬，凡爲六鼈臑。觀其割分，則體勢互通，蓋易了也。其棊或脩短，或廣狹立方不等者，亦割分以爲六鼈臑，其形不悉相似，然見數同積實均也。鼈臑殊形，然陽馬異體，則不純合，不純合，則難爲之矣。何則？按邪解方棊，以爲壍堵者，必當以半爲分。邪解壍堵，以爲陽馬者，亦必當以半爲分，一從一橫耳。設陽馬分內，鼈臑爲分外，棊雖或隨脩短廣狹，猶有此分常率如殊形異體亦同也者，以此而已。其使鼈臑廣袤各高二尺，用壍堵、鼈臑之棊各二，皆用赤棊，又使陽馬之廣袤高各二尺，用立方之棊一，壍堵陽馬之棊各二，皆用黑棊，棊之赤黑，接爲壍堵，廣袤高各二尺，於是中效其廣，又中分其高，合赤黑壍堵各自適當一方，高二尺，方二尺，每二分鼈臑則一陽馬也。其餘兩端，各積本體，合成一方焉，是爲別種而方者率居三，通其體而方者率居一。雖方隨棊改，而固常有然之勢也。按，餘數具而可知者有一二分之別，即一二之爲率定矣，其於理也豈虛矣。若爲數而窮之，置餘廣袤高之數各半之，則四分之三又可知也。半之彌少，其餘彌細，至細曰微，微則無形，由是言之，安取餘哉。數而求窮之者，謂以精推，不用籌算。鼈臑之物，不同器用。陽馬之形，或隨脩短廣狹。然不有鼈臑，無以審陽馬之數；不有陽馬，無以知錐亭之數，功實之主也。

今有鼈臑，下廣五尺無袤，上袤四尺無廣，高七尺，問積幾何？

答曰：二十三尺少半尺。

術曰：廣袤相乘，以高乘之，六而一。按此術臑者臂骨也。或曰『半陽馬』。其形有似鼈肘，故以名云。中破陽馬，得兩鼈臑，鼈臑之見數，卽陽馬之半數，數同而實據半，故云六而一卽得。

今有芻甍，下廣三丈，袤四丈，上袤二丈無廣，高一丈，問積幾何？

答曰：五千尺。

術曰：倍下袤，上袤從之，以廣乘之，又以高乘之，六而一。推明義理者舊說云：凡積芻甍，有上下廣，曰『童甍』，謂其屋蓋之茨也。是故甍之下廣袤與童之上廣袤等，正斬方亭，兩邊合之，卽芻甍之形也。假令下廣二尺，袤三尺，上袤一尺無廣，高一尺。其用棊也，中央壍堵二，兩端陽馬各二，倍下袤，上袤從之，爲七尺，以高廣乘之，得冪十四尺。陽馬之袤，各居一，壍堵之冪，各居三，以高乘之，得積十四尺。其於本棊也，皆一而爲六，故六而得一卽得。亦可令上下袤差乘廣以高乘之，三而一，卽四陽馬也。下廣乘上袤而半之高乘之，卽二壍堵并之以爲甍積也。

芻童、曲池、盤池、冥谷皆同術。

術曰：倍上袤，下袤從之。亦倍下袤，上袤從之。各以其廣乘之，并以高若深乘之，皆六而一。按此術假令芻童上廣一尺，袤二尺，下廣三尺，袤四尺，高一尺。其用棊也，中央立方二，四面壍堵六，四角陽馬四。倍下袤爲八，上袤從之爲十，以下廣乘之，得積三十尺，是爲得中央立方各三，兩邊壍堵各四，兩旁壍堵各六，四角陽馬亦各六。復倍上袤，下袤從之爲八，以高廣乘之，得積八尺，是爲得中央立方亦各三，兩端壍堵各二，并兩旁三品棊皆一而爲六，故六而一卽得。爲術又可令上下廣袤差相乘，以高乘之，三而一，亦四陽馬。上下廣袤互相乘，并而半之，以高乘之，卽四面六壍堵，與二立方，并之爲芻童積。又可令上下廣袤互相乘而半之，上下廣袤又各自乘，并以高乘之，三而一卽得也。

今有芻童，下廣二丈，袤三丈，上廣三丈，袤四丈，高三丈，問積幾何？

答曰：一萬六千五百尺。

今有冥谷，上廣二丈，袤七丈，下廣八尺，袤四丈，深六丈五尺，問積幾何？

答曰：五萬二千尺。

按圓錐今謂之平截圓錐，塹堵今謂之長方體截體，陽馬今謂之四角錐，鼈臑今謂之三角錐，芻甍今謂之楔，芻童、冥谷今謂之平截楔。

㈠宋趙與旹賓退錄卷第四：

廣陵所刻夢溪筆談第十八卷『積罂之術』注中『又倍下長得十六，』當作『二十四，』『倂入上長得四十六，』當作『二十六。』士夫知算術者少，故莫辨其誤。漫記之。

㈡清張文虎舒藝室雜箸甲編卷下『書夢溪筆談後二：』

趙與時賓退錄云：『廣陵所刻夢溪筆談第十八卷積罂之術注中……漫記之。』按，趙氏所據卷數錯誤，並同今本。又云『廣陵所刻，』蓋卽湯脩年刊於揚州者也。檢湯跋稱：『證辨訛舛凡五十餘字，疑者無他本，不敢以意驟易，姑仍其舊。』然則此書之譌謬相因，其來久矣。今以馬本第十八卷算術條勘之，猶不止如趙氏所舉。塹堵法云：『倂上下廣折半以爲之廣，以直高乘之，又以直高爲句，以上廣減下廣，餘者爲股，句股乘弦，以爲斜高。』此尤謬誤。當云：『又以直高爲股，以上廣減下廣，餘者半之爲句，句股求弦，以爲斜高。』積罂術注：『先以上二行相次率至十二，當十二行也，』當作

『當十一行也』〔二〕『以上廣乘之得二十二』，當作『三十二』。〔三〕『併二倍』及下會圓術注『退上一倍』『倍』皆當作『位』。『以高乘之得二千七百八十四』，當作『三千七百八十四』。此條微波榭刻十種算經，曾採附數術記遺之後，孔荭谷非不知算術者，亦仍其誤，何與？

〔一〕〔三〕按，此二處誤字，算經十書已校正。

㊃李儼中算史論叢（中國科學院印本）第一集『中算家的級數論』（商務印書館舊印本在第三集，新印本有修正。）

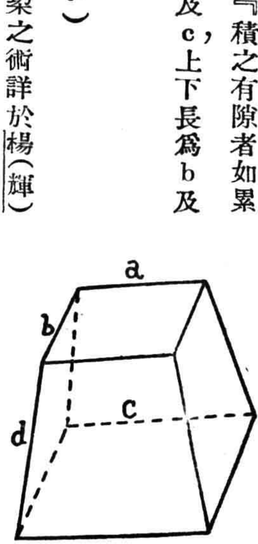
宋沈括夢溪筆談卷十八有『隙積術』，謂『積之有隙者，如纍棋、層壇及酒家積罌之類』，設圖如上下廣爲a及c，上下長爲b及d，其高爲h，則

$$V=\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{h}{6}(c-a)$$

顧觀光（一七九九——一八六二）稱『堆垛之術詳於楊（輝）氏、朱（世傑）氏二書，而瓶始之功，斷推沈（括）氏』。〔原注一〕因楊輝詳解九章算法（一二六一）『商功第五』方梁、芻童果子梁、芻甍果子梁；朱世傑四元玉鑑（一三〇三）卷下『果梁疊藏』三角臺梁、四角臺梁、芻童梁、芻甍梁，都依隙積術立算。隙積術可如下法補證：

$$V=ab+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots\cdots+(a+h-1)(b+h-1)$$

$$=ab+\{ab+\overline{a+b}+1^2\}+\{ab+2(a+b)+2^2\}+\cdots\cdots+\{ab+(h-1)(a+b)$$



$$+(h-1)^2\}$$

$$=h.ab+(a+b)\frac{1}{2}\cdot h(h-1)+\frac{1}{3}(h-1)(h-\frac{1}{2})h,$$

因 $a+h-1=c,\quad h=c-a+1,$

$b+h-1=d,\quad h=d-b+1,$

代入消得

$$V=\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{h}{6}(c-a).$$

頁三三七—三三八．商務印本在第三集頁二三〇—二三一．

〔原注一〕見九數存古卷五，第六四頁。

㊄許稀舫多才多藝的數學家——沈括『隙積術』

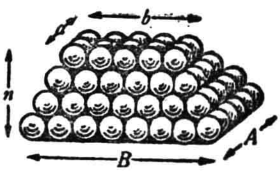
在中國數學裏，很早就談到級數。九章算術和孫子算經裏都載等差級數和等比級數的問題，但沒有求總和的方法。南北朝時，張邱建算經首創等差級數的算法，但此後經五六百年並無進展。直到宋朝，突然出現了一種高等級數，它是兩串連續整數各相當項的積，形如

$ab,(a+1)(b+1),(a+2)(b+2),(a+3)(b+3),\cdots\cdots$。

沈括的隙積術，就是這一種高等級數求總和的算法。

在沈括的夢溪筆談中，說到九章算術的商功一章裏載着『芻童』（卽長方稜台）的求積

法，但罌罍是由六個平面圍成的實質的立體；如果是酒店或陶器店裏堆積的甕、缸、瓦盆之類，堆成的形狀雖像罌罍，但有缺刻和虛隙，這就不能照罌罍的算法來計算總數了。因此，沈括就創造出一種隙積術來。這一種算法和後世西洋數學中的『積彈』類似。（如圖一）把同樣的許多物件層層堆積，各層都是一個長方形，自上而下，逐層的長、闊各增一個。設頂層闊a個，長b個；底層闊A個，長B個，計n層。把沈括計算總數S的方法譯成公式如下：



〔圖 一〕

$$S = ab + (a+1)(b+1) + (a+2)(b+2) + \cdots\cdots$$
$$+ (A-1)(B-1) + AB \quad \text{〔計n項〕}$$
$$= \frac{n}{6}\left[a(2b+B) + A(2B+b) + (B-b)\right].$$

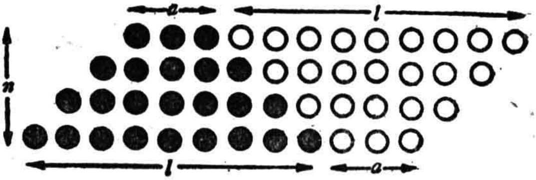
這一個公式用何法求得，原書沒有交代。我們推測起來，大概是從等差級數和自然數的平方級數推廣而得的。

等差級數求總和的公式是很簡單的。設首項是a，末項是1，項數是n，則總和

$$S' = \frac{1}{2}n(a+1) \cdots\cdots\cdots\cdots (1).$$

張邱建算經早已把這一個公式應用，但未經證明。據宋朝楊輝所著田畝比類乘除捷法（一二七五）中的『梯栔』算法，知道這公式大概是利用如圖二的圖形求得的。這理由很簡單，不必說明

丁。

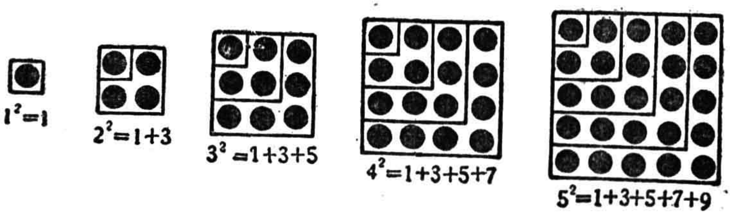


〔圖 二〕

自然數的平方級數，在沈括及沈括以前的書中雖未見，但稍後的楊輝書中有『四隅垛』的算法，就是這一種級數。楊氏的書多介紹古法，極少自己發明。設想這一種級數算法早在沈括以前就有了。這級數的開首n項是:

$$1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,\cdots\cdots n^2.$$

就圖形來說，是堆物成正方棱台，頂層1個，以下逐層是每邊多1個的正方形。中國古代利用圖形來研究數，是常用的方法。這級數求總和的方法，可能也是利用圖形的，（如圖三，）把正方棱台的各層剖析而爲若干連續奇數的和，那末總數裏有n個1（圖是假定n=5繪成的，實際n不論何數，都是一樣，）(n－1)個3，(n－2)個5，………。把它們改排一下，先連排n個1，再續排(n－1)個3，(n－2)個5，………得圖四黑點所示的形式。又用兩個同樣的正方棱台各層的數各照原式配在兩旁，（如圖四

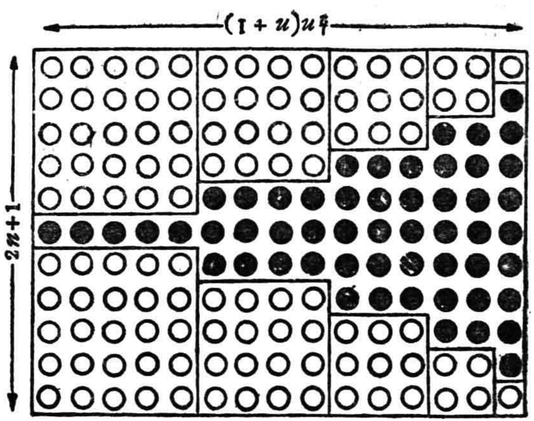


〔圖 三〕

圓圈所示）恰成一長方形。由公式（1）得這長方形的長邊的個數是 $1+2+3+4+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$，闊邊的個數是 $2n+1$，總數恰爲原有正方稜台總數（S''）的3倍，即

$$3S''=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1).$$

$$\therefore S''=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$



〔圖　四〕

有了公式（1）和（2，）要證明沈括的隙積術公式就很簡單。證法如下：

$$S=ab+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1})(b+\overline{n-1})$$

$$=ab+[ab+1(a+b)+1^2]+[ab+2(a+b)+2^2]+\cdots\cdots+[ab+(n-1)(a+b)+(n-1)^2]$$

$$=nab+[1+2+\cdots\cdots+(n-1)](a+b)+[1^2+2^3+\cdots\cdots+(n-1)^2]$$

$$=nab+\frac{1}{2}(n-1)n(a+b)+\frac{1}{6}(n-1)n[2(n-1)+1]$$

$$=\frac{n}{6}[6ab+3(n-1)(a+b)+(n-1)(2n-1)]\cdots\cdots\cdots(3).$$